

非饱和土固结的混合物理论(II)*

陈正汉

(重庆后勤工程学院, 1992年7月17日收到)

摘要

本文应用文[1]建立的非饱和土固结的数学模型求解边值问题。借助 Laplace 变换和有限 Fourier 变换求得了一维问题的解析解, 从控制方程同时解出了竖向位移、孔隙水压力和孔隙气压力, 并给出了固结系数和固结度的理论公式。应用 Galerkin 权余法导出了二维固结问题的有限元方程, 编制了 8 结点等参元 FORTRAN 程序 CSU8, 求解了平面应变固结问题, 揭示了非饱和土固结的若干规律及数值分析的某些特点。这些成果为把本文的理论应用于工程实际提供了方便。

关键词 孔隙水压力 孔隙气压力 固结系数 固结度 瞬时沉降 有限元

一、数学模型

文[1]建立的非饱和土固结的三维数学模型的增量控制方程组是

$$\left. \begin{aligned} \mu \nabla^2(\delta X_s) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot (\delta X_s) - \chi \nabla(\delta P_f) - (1 - \chi) \nabla(\delta P_g) &= 0 \\ (s - an) \nabla \cdot (\delta X_s) + \beta n (\delta P_f - \delta P_g) &= \frac{K_f}{\gamma_f} \nabla^2(\delta P_f) \\ (1 - s + an) \nabla \cdot (\delta X_s) - \beta n (\delta P_f) + \left[\frac{n(1-s)}{P_g} + \beta n \right] \delta P_g &= \frac{K_g}{\gamma_f} \nabla^2(\delta P_g) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中, δX_s , δP_f , δP_g 分别为固相位移增量, 孔隙水压力增量和孔隙气压力增量, n 是土的孔隙率, s 是饱和度, λ 和 μ 是土的 Lamé 常数, χ 是有效应力参数, P_g 是孔隙气压力, γ_f 是水的密度, K_f 和 K_g 分别是水和气的渗透系数, α , β 可根据文[1]的(5.15)式算出。所有参数都可用试验测定, 详细情况可参阅文[2, 3]。

本文应用(1.1)求解非饱和土固结的边值问题。为方便起见, 采用以下记号

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= s - an, \quad a_2 = \beta n, \quad a_3 = -\beta n \\ b_1 &= 1 - a_1, \quad b_3 = n(1-s)/P_g + \beta n \\ P_1 &= \delta P_f, \quad P_2 = \delta P_g, \quad K_1 = \frac{K_f}{\gamma_f}, \quad K_2 = \frac{K_g}{\gamma_f} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

如前所述^[1], 在一个增量过程中, λ , μ , χ 及(1.2)中各量均可视为常量。

* 蒋咏秋推荐。

国家自然科学基金资助课题。

二、一维固结问题

设有一土层厚度为 h 的无限大地基, 位于一刚性的不透水不透气基岩上(图1), 其上表面作用着强度为 q 的均布荷载。由于问题的对称性, 侧向不发生膨胀变形, 水和气也只能从上表面排出。这是一个有实际意义的一维固结问题。其控制方程可由(1.1)得到:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \chi \frac{\partial P_1}{\partial z} + (1 - \chi) \frac{\partial P_2}{\partial z} \quad (2.1a)$$

$$a_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial z} + a_2 \frac{\partial P_1}{\partial t} + a_3 \frac{\partial P_2}{\partial t} = K_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} \quad (2.1b)$$

$$b_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial z} - a_2 \frac{\partial P_1}{\partial t} + b_3 \frac{\partial P_2}{\partial t} = K_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} \quad (2.1c)$$

式中, W 是土的竖向位移增量。

问题的边界条件可描述为

$$P_1(0, t) = P_2(0, t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial P_1(h, t)}{\partial z} = \frac{\partial P_2(h, t)}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

$$W(h, t) = 0 \quad (2.4)$$

1. 初始条件

设荷载是瞬时施加的, 则加载瞬时既来不及排水也来不及排气。这意味着

$$\int_0^{0^+} K_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} dt = \int_0^{0^+} K_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} dt = 0 \quad (2.5)$$

式中积分限0和 0^+ 分别代表开始加载的时刻和加载完成的时刻。于是由(2.1b)和(2.1c)得

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{\partial W(z, 0^+)}{\partial z} + a_2 P_1(z, 0^+) + a_3 P_2(z, 0^+) &= 0 \\ b_1 \frac{\partial W(z, 0^+)}{\partial z} - a_2 P_1(z, 0^+) + b_3 P_2(z, 0^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

另一方面, 把(2.1a)对 z 积分一次,

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial W}{\partial z} = \chi P_1 + (1 - \chi) P_2 + f(t) \quad (2.7)$$

由地基中任一点的总应力等于 q 知

$$f(t) = -q \quad (2.8)$$

把(2.8)代入(2.7)得

$$\frac{\partial W}{\partial z} = a_s [\chi P_1 + (1 - \chi) P_2 - q] \quad (2.9)$$

$$\text{式中 } a_s = 1/(\lambda + 2\mu) \quad (2.10)$$

a_s 称为土的压缩性。设

$$P_1(z, 0^+) = P_{10}, \quad P_2(z, 0^+) = P_{20}$$

把(2.9)代入(2.6), 解得

$$\left. \begin{aligned} P_{10} &= (\Delta_{10}/\Delta)q, \quad P_{20} = (\Delta_{20}/\Delta)q, \quad \Delta_{10} = a_s(a_1b_3 + a_2b_1), \quad \Delta_{20} = a_s a_2 \\ \Delta &= \chi \Delta_{10} + (1-\chi)\Delta_{20} + a_2(a_3 + b_3) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

进而可求出地基中任一点在加载瞬时由荷载引起的有效应力为

$$\sigma_{z0} = \sigma_z(z, 0^+) = (\Delta_{z0}/\Delta)q, \quad \Delta_{z0} = a_2(a_3 + b_3) \quad (2.12)$$

我们知道, 在饱和土地基中, $\sigma_{z0} = 0$ 。由(2.12)可以看出, 在加载瞬时, 非饱和土地基中的初始有效应力并不为零, 它当然要引起地基的瞬时沉降。

2. 问题的解答

把(2.9)对 t 求导后代入(2.1b)和(2.1c), 就得到关于 $P_1(z, t)$ 和 $P_2(z, t)$ 的二阶偏微分方程组

$$\left. \begin{aligned} (a_s a_1 \chi + a_2) \frac{\partial P_1}{\partial t} + [a_s a_1 (1-\chi) + a_3] \frac{\partial P_2}{\partial t} &= K_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} \\ (a_s b_1 \chi - a_2) \frac{\partial P_1}{\partial t} + [a_s b_1 (1-\chi) + b_3] \frac{\partial P_2}{\partial t} &= K_2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

应用Laplace变换和有限Fourier变换^[10], 可以解得

$$\left. \begin{aligned} P_1(z, t) &= \frac{4}{\pi} q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_1(n, t)}{2n+1} \exp[-m^2 C t] \sin mz \\ P_2(z, t) &= \frac{4}{\pi} q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_2(n, t)}{2n+1} \exp[-m^2 C t] \sin mz \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

式中

$$m = \frac{(2n+1)\pi}{2h}, \quad C = \frac{\Delta_{11} + \Delta_{22}}{2\Delta} \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1(n, t) &= \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \operatorname{ch} \omega t + \frac{(\Delta_{10}/\Delta)(\Delta_{22} - \Delta_{11}) + 2(\Delta_{20}/\Delta)\Delta_{12}}{\sqrt{(\Delta_{11} - \Delta_{22})^2 + 4\Delta_{12}\Delta_{21}}} \operatorname{sh} \omega t \\ F_2(n, t) &= \frac{\Delta_{20}}{\Delta} \operatorname{ch} \omega t + \frac{2(\Delta_{10}/\Delta)\Delta_{21} + (\Delta_{20}/\Delta)(\Delta_{11} - \Delta_{22})}{\sqrt{(\Delta_{11} - \Delta_{22})^2 + 4\Delta_{12}\Delta_{21}}} \operatorname{sh} \omega t \\ \omega &= m^2 \sqrt{\frac{(\Delta_{11} - \Delta_{22})^2 + 4\Delta_{12}\Delta_{21}}{2\Delta}} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$$\Delta_{11} = [a_s b_1 (1-\chi) + b_3] K_1, \quad \Delta_{12} = [a_s a_1 (1-\chi) + a_3] K_2$$

$$\Delta_{21} = (a_s b_1 \chi - a_2) K_1, \quad \Delta_{22} = (a_s a_1 \chi + a_2) K_2$$

由(2.15)、(2.16)和(1.2)可知, C 是一个反映非饱和土地基的压缩性、饱和度、密度、渗水性、渗气性及吸力的综合指标, 可称为非饱和土的一维固结系数。它与Biot-Terzaghi关于饱和土的一维固结理论中的固结系数

$$C_v = K_r(1+e)/\gamma_s a \quad (2.17a)$$

相应。Biot-Terzaghi一维固结理论的孔隙水压力为

$$P_f = \frac{4}{\pi} q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \exp[-m^2 C_v t] \sin mz \quad (2.17b)$$

与(2.14)比较可以看出, (2.14)多出因子 $F_1(n, t)$ 和 $F_2(n, t)$, 说明 C , F_1 , F_2 反映了地基非

饱和的性质对固结的影响。

3. 地基沉降

把(2.14)代入(2.9)并进行积分, 就得到地基在任一时刻 t 的总沉降

$$W(t) = \int_0^h \varepsilon_z dz = - \int_0^h \frac{\partial W}{\partial z} dz$$

$$= a_s q h \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} [\chi F_1 + (1-\chi) F_2] \exp[-m^2 C t] \right\} \quad (2.18)$$

地基的瞬时沉降为

$$W(0) = a_s q h \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left[\chi \frac{\Delta_{10}}{\Delta} + (1-\chi) \frac{\Delta_{20}}{\Delta} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \right\} = a_s \sigma_{z0} h \quad (2.19)$$

这里利用了 $\operatorname{ch} \omega t|_{t=0} = 1$, $\operatorname{sh} \omega t|_{t=0} = 0$ 及公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (2.20)$$

(2.19)表明, 非饱和土地基的瞬时沉降正是由于加载瞬时土中的有效应力引起的, 其根源在于气相的压缩性。对一维饱和土地基而言, 水是不可压缩的, 初始有效应力等于零, 故瞬时沉降也等于零。

地基在任一时刻的固结沉降是

$$W_c(t) = W(t) - W(0) = a_s q h \left\{ \chi \frac{\Delta_{10}}{\Delta} + (1-\chi) \frac{\Delta_{20}}{\Delta} - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot [\chi F_1 + (1-\chi) F_2] \exp[-m^2 C t] \right\} \quad (2.21)$$

地基的最终固结沉降量为

$$W_c(\infty) = a_s q h \left[\chi \frac{\Delta_{10}}{\Delta} + (1-\chi) \frac{\Delta_{20}}{\Delta} \right] = a_s [\chi P_{10} + (1-\chi) P_{20}] h \quad (2.22)$$

与(2.19)比较可知, $W_c(\infty)$ 就是初始孔隙水压力和气压力完全转化为有效应力引起的沉降。

地基的最终沉降量可在(2.18)中令 $t = \infty$ 求得,

$$W(\infty) = a_s q h = W(0) + W_c(\infty) \quad (2.23)$$

利用(2.21)和(2.22)可以定义地基的固结度为

$$U(t) = \frac{W_c(t)}{W_c(\infty)} = 1 - \frac{1}{\chi \Delta_{10}/\Delta + (1-\chi) \Delta_{20}/\Delta} \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot [\chi F_1 + (1-\chi) F_2] \exp[-m^2 C t] \quad (2.24)$$

它表示地基固结沉降完成的程度。这样, 我们就从控制方程同时解出了孔隙水压力、孔隙气压力和土体位移, 不仅算出了固结沉降, 还算是瞬时沉降。在二、三维的情况下, 本模型还可计算地基的瞬时沉降和水平位移, 这将在下节讨论。因此, 本模型保留了 Biot 理论的优点, 是该理论的合理推广。由于非饱和土中气相的压缩性很大, 可以推测, Mandel-Cryer 效应不会发生, 即使存在, 也是不显著的。

4. 与Fredlund理论的比较

Fredlund提出的一维非饱和土固结的偏微分方程组是^[4, 6]

$$\frac{\partial u_f}{\partial t} + C_f \frac{\partial u_a}{\partial t} = C_v^f \frac{\partial^2 u_f}{\partial z^2}, \quad C_a \frac{\partial u_f}{\partial t} + \frac{\partial u_a}{\partial t} = C_v^a \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} \quad (2.25)$$

把(2.13)稍加变动可写为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{a_s a_1 (1-\chi) + a_3}{a_s a_1 \chi + a_2} \frac{\partial P_2}{\partial t} &= \frac{K_1}{a_s a_1 \chi + a_2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2} \\ \frac{a_s b_1 \chi - a_2}{a_s b_1 (1-\chi) + b_3} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial P_2}{\partial t} &= \frac{K_2}{a_s b_1 (1-\chi) + b_3} \frac{\partial^2 P_2}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

从形式上看, 二者是相似的, 但有着不同的内涵。除了在连续方程、渗透规律和本构关系方面的差别而外, 在导出(2.26)时还用到了固相连续方程、总体平衡方程和几何方程。因此(2.26)中的孔压是和土体的位移紧密联系的, 用Fredlund理论是无法求出地基的瞬时沉降和固结沉降的。式(2.25)中的系数 C_f 和 C_a 分别称为液相方程的相互作用系数和气相方程的相互作用系数; C_v^f 和 C_v^a 则由Fredlund定义为液相固结系数和气相固结系数。从文[4~6]可知, C_v^f 只与水的性质有关, 而 C_v^a 只与气的性质及 s, n , 有关, 即

$$C_v^f = \frac{1}{R_f} \frac{K_f}{\gamma_f m_1^f}, \quad C_v^a = \frac{R\theta}{\Omega} \frac{D_a}{(1-R_a)(p_a + u_a)m_1^a + (1-s)n} \quad (2.27)$$

它们都不能象(2.15)定义的 C 那样综合反映非饱和地基土的性质。

Fredlund还定义了两个固结度

$$U_f = 1 - \int_0^h u_f dz / \int_0^h u_{f0} dz, \quad U_a = 1 - \int_0^h u_a dz / \int_0^h u_{a0} dz \quad (2.28)$$

式中 u_{f0} 和 u_{a0} 分别是加载瞬时的孔隙水压力和气压力。事实上, 上式仅分别表示孔隙水压力和孔隙气压力在固结过程中的消散程度, 而不能象(2.24)那样真正表示地基固结沉降完成的程度。

5. 地基沉降后的饱和度、孔隙率及其它参数

地基沉降后的体应变为

$$\theta = \varepsilon_z = W/h$$

相应的孔隙比和孔隙率为

$$e = e_0 - (1 + e_0)\theta, \quad n = e / (1 + e) \quad (2.29)$$

式中, e_0 为加载前的孔隙比, 地基的饱和度增量为

$$\delta s = \partial \theta - \beta(P_2 - P_1) \quad (2.30)$$

固结后的饱和度与孔隙率作为新的起始参数, 可以用来确定地基在下一级荷载作用下固结所需的参数 χ, K_1, K_2 等。

三、二维固结问题

用 u, v 分别表示水平和竖直方向的位移分量的增量, 则(1.1)在二维情况下的具体形式是

$$\left. \begin{aligned}
 (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \chi \frac{\partial P_1}{\partial x} - (1 - \chi) \frac{\partial P_2}{\partial x} + b_x &= 0 \\
 \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \chi \frac{\partial P_1}{\partial y} - (1 - \chi) \frac{\partial P_2}{\partial y} + b_y &= 0 \\
 -a_1 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} - a_2 \frac{\partial P_1}{\partial t} + a_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} + K_1 \left\{ \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} \right\} &= 0 \\
 -b_1 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} + a_2 \frac{\partial P_1}{\partial t} - b_3 \frac{\partial P_2}{\partial t} + K_2 \left\{ \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2} \right\} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中的 b_x 和 b_y 分别是 x 和 y 方向的体力分量。应用伽辽金权余法和有限元的思想^(7,8)，可从(3.1)导出求解平面问题的有限元方程

$$\sum_{e=1}^{MELES} \sum_{j=1}^{NNODE} [K_{ij}]_e^{t+\Delta t} \{X_i\}_e^{t+\Delta t} = \sum_{e=1}^{MELES} \{R_i\}_e^{t+\Delta t} \quad (i=1, 2, \dots, NNODE) \quad (3.2)$$

式中，MELES——土体单元总数，NNODE——单元结点数。本文采用8结点等参元，NNODE=8。由于每个结点有4个自由度，故

$$\{X_i\}_e^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ P_{1i} \\ P_{2i} \end{bmatrix}^{t+\Delta t}$$

单元刚度矩阵是 32×32 矩阵，而每个单刚子块 $[K_{ij}]_e^{t+\Delta t}$ 包含16个分量

$$[K_{ij}]_e^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} K_{ij}^{11} & K_{ij}^{12} & \chi K_{ij}^{13} & (1-\chi) K_{ij}^{14} \\ K_{ij}^{21} & K_{ij}^{22} & \chi K_{ij}^{23} & (1-\chi) K_{ij}^{24} \\ a_1 K_{ij}^{31} & a_1 K_{ij}^{32} & K_{ij}^{33} & -a_2 K_{ij}^{34} \\ b_1 K_{ij}^{41} & b_1 K_{ij}^{42} & -a_2 K_{ij}^{43} & K_{ij}^{44} \end{bmatrix}^{t+\Delta t} \quad (3.3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned}
 K_{ij}^{11} &= \iint_{A_e} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\
 K_{ij}^{12} &= \iint_{A_e} \left[\lambda \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right] dx dy \\
 K_{ij}^{21} &= \iint_{A_e} \left[\mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \lambda \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\
 K_{ij}^{22} &= \iint_{A_e} \left[\mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\
 K_{ij}^{13} &= - \iint_{A_e} \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j dx dy = K_{ij}^{14} \\
 K_{ij}^{23} &= - \iint_{A_e} \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j dx dy = K_{ij}^{24} \\
 K_{ij}^{31} &= - \iint_{A_e} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dx dy = K_{ij}^{41}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_{ij}^{32} &= -\iint_{Ae} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dx dy = K_{ij}^{42} \\
 K_{ij}^{34} &= -\iint_{Ae} N_i N_j dx dy = K_{ij}^{44} \\
 K_{ij}^{33} &= a_2 K_{ij}^{34} + \xi \Delta t \iint_{Ae} -K_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \\
 K_{ij}^{44} &= b_3 K_{ij}^{43} + \xi \Delta t \iint_{Ae} -K_2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy
 \end{aligned} \right\}$$

$N_i, N_j (i, j=1, 2, \dots, 8)$ 是形函数, 且位移和孔压的形函数相同. Δt 是时间步长, ξ 是时间积分参数, 由

$$\int_t^{t+\Delta t} f(t) dt = \xi f(t+\Delta t) + (1-\xi) f(t)$$

定义. 根据 Booker 等人的研究^[9], $1/2 \leq \xi \leq 1$ 时数值积分是无条件稳定的. 本文取 $\xi=2/3$.

广义荷载向量为

$$\{R_i\}_e^{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ Q_{i1} \\ Q_{i2} \end{pmatrix}_e^{t+\Delta t} \tag{3.5}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 F_{ix}^{t+\Delta t} &= \iint_{Ae} N_i b_x^{t+\Delta t} dx dy - \int_{\Delta L_T} N_i \hat{T}_x^{t+\Delta t} dl \\
 F_{iy}^{t+\Delta t} &= \iint_{Ae} N_i b_y^{t+\Delta t} dx dy - \int_{\Delta L_T} N_i \hat{T}_y^{t+\Delta t} dl \\
 Q_{i1}^{t+\Delta t} &= \int_{\Delta L_{Q_1}} N_i [\xi \hat{Q}_{i1}^{t+\Delta t} + (1-\xi) \hat{Q}_{i1}^t] \Delta t dl + \sum_{j=1}^8 \left\{ a_1 K_{ij}^{31} u_j^t \right. \\
 &\quad \left. + a_1 K_{ij}^{32} v_j^t + [a_2 K_{ij}^{34} - (1-\xi) \Delta t] \iint_{Ae} -K_1 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \right] P_{1j}^t - a_2 K_{ij}^{34} P_{2j}^t \left. \right\} \\
 Q_{i2}^{t+\Delta t} &= \int_{\Delta L_{Q_2}} N_i [\xi \hat{Q}_{i2}^{t+\Delta t} + (1-\xi) \hat{Q}_{i2}^t] \Delta t dl + \sum_{j=1}^8 \left\{ b_1 K_{ij}^{31} u_j^t \right. \\
 &\quad \left. + b_1 K_{ij}^{32} v_j^t - a_2 K_{ij}^{34} P_{1j}^t + [b_3 K_{ij}^{34} - (1-\xi) \Delta t] \iint_{Ae} -K_2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \right] P_{2j}^t \left. \right\}
 \end{aligned} \right\} \tag{3.6}$$

在(3.4)和(3.6)中, Ae 是单元的面积, $\Delta L_T, \Delta L_{Q_1}, \Delta L_{Q_2}$ 分别是与力边界、水的流量边界、气的流量边界相重合的单元边界部分, $b_x^{t+\Delta t}, b_y^{t+\Delta t}$ 和 $\hat{T}_x^{t+\Delta t}, \hat{T}_y^{t+\Delta t}$ 分别是 $t+\Delta t$ 时的体力和边界面力. 对小变形问题, 它们在固结中保持不变, 可按一般弹性力学有限元方法处理. 而 $\hat{Q}_{i1}, \hat{Q}_{i2}$ 和 $\hat{Q}_{i1}^{t+\Delta t}, \hat{Q}_{i2}^{t+\Delta t}$ 分别是时刻 t 和 $t+\Delta t$ 时的边界面流量, 它们与边界面上

的排水条件有关。\$u_i^t\$, \$v_i^t\$, \$P_i^t\$ 和 \$P_i^{t'}\$ 分别是结点在 \$t\$ 时刻的位移和孔压, 从(3.2)~(3.6)可知, 只要知道了固结过程中 \$t\$ 时刻各结点的位移和孔压, 就能算出 \$t + \Delta t\$ 时刻的相应值。但需重新计算 \$K_{ij}^{t'}\$ 和 \$K_{ij}^{t''}\$, 并按(3.6)的第三式和第四式修正右端项。

从(3.3)和(3.4)可以看到两个显著特点。第一是刚度矩阵不对称, 我们采用存储总刚全部元素的方法, 先在微机上调通程序, 再在 VAX8350 机上计算。第二个特点是 \$K_{ij}^{t'}\$ 和 \$K_{ij}^{t''}\$ 都由两项组成, 其中第一项 \$a_i K_{ij}^{t'}\$ 和 \$b_i K_{ij}^{t''}\$ 都与时间无关, 这就为进行加载瞬时不排水不排气分析提供了方便。

根据以上各式, 笔者设计了名为 CSU8 的程序, 即用八结点等参元编制的非饱和土固结程序。该程序共有 20 个子程序, 可用来分析平面应变问题和平面应力问题。

四、数值例子

本节通过数值分析揭示非饱和土固结的规律性。

例1 一维固结问题, 解析解

地基如图 1 所示, \$h=4\text{m}\$, 初始孔隙率 \$n_0=0.4873\$, 初始饱和度 \$s_0=50\%\$, 均布荷载强度 \$q=300\text{kPa}\$, 其它各参数可根据文[2, 3]得出

$$K_1 = 2.50 \times 10^{-4} \frac{\text{cm}^2}{\text{s} \cdot \text{kPa}}, \quad K_2 = 5.28 \times 10^{-3} \frac{\text{cm}^2}{\text{s} \cdot \text{kPa}}$$

地基的初始吸力 \$(P_g - P_f)_0 = 125\text{kPa}\$

$$\alpha = 1.1357, \quad \beta = 1.132 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{kPa}}, \quad a_1 = -0.0533$$

$$a_2 = 5.52 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{kPa}}, \quad b_1 = 1.0533$$

$$b_3 = 2.91 \times 10^{-3} \frac{1}{\text{kPa}}, \quad \chi = 0.1, \quad a_3 = 2.50 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{kPa}}$$

由此算出

$$P_{10} = 22.35\text{kPa}, \quad P_{20} = 28.83\text{kPa}, \quad \sigma_{x0} = 271.80\text{kPa}$$

$$C = 1.2862 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}, \quad m = \frac{(2n+1)\pi}{800} \frac{1}{\text{cm}}, \quad \omega = 0.8574\text{m}^2 \frac{1}{\text{s}}$$

$$W(0) = 27.18\text{cm}, \quad W_0(\infty) = 2.82\text{cm}, \quad W(\infty) = 30\text{cm}$$

地基地面任一点的孔压为

$$\left. \begin{aligned} P_1(h, t) &= \frac{4}{\pi} P_{10} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\text{ch}\omega t - 2.2591\text{sh}\omega t) \exp[-Cm^2 t] \\ P_2(h, t) &= \frac{4}{\pi} P_{20} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\text{ch}\omega t - 0.9448\text{sh}\omega t) \exp[-Cm^2 t] \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

地基的固结度为

$$U(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} (\text{ch}\omega t - 1.0491\text{sh}\omega t) \exp[-Cm^2 t] \quad (4.2)$$

按(4.1)和(4.2)计算的结果示于图2。由本例可知, 当饱和度较小时非饱和土固结有以下特

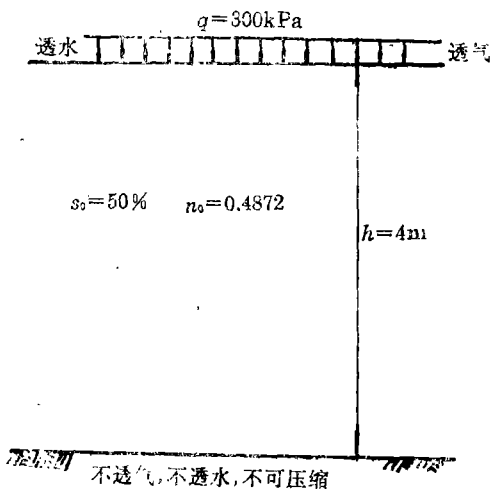


图1 一维边值问题

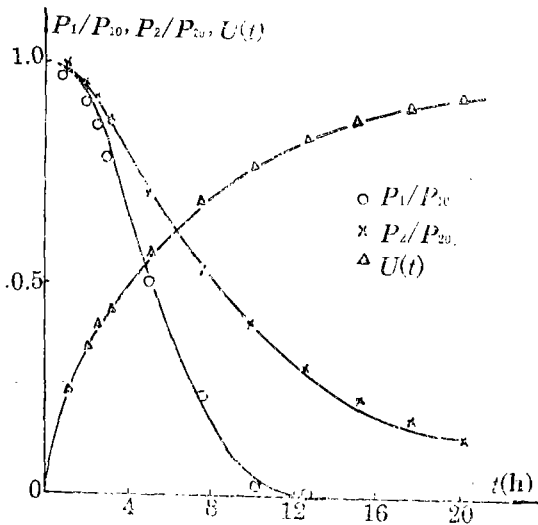


图2 $z=h$ 处的孔压消散与地基的固结度

第一步，加载瞬时的不排水不排气分析。取时间 $t=0$ ，计算结果列于表1。表中括号内给出了相应的解析解数值。可以看出，二者完全一致。

第二步，固结过程分析。采用的时间步长示于表2。表3给出了 $\Delta t=6000s$ ， $t=9000s$ 的相应结果。与表中括号中给出的解析解比较可知，二者的差别是很小的。

这样，我们有理由认为，程序CSU8是可靠的。

例3 平面应变固结问题，有限元解

用CSU8程序计算的平面应变问题如图4所示，利用对称性可只取地基一半研究。地基厚度等于4m，计算宽度取8m，计算厚度取1cm。计算所用参数与例1、例2中的参数完全相同。局部均布荷载强度为300kPa。地基被分成24个单元，93个结点。计算也分两步。进行加载瞬时的不排水不排气分析时取 $t=0$ ；进行固结过程分析对所用时间步长同表2。 $t=0$ 和 $t=1000s$ 的计算结果示于图5(a)，(b)，(c)，(d)。可以看出，地基中的竖向位移、饱和度增量、孔隙水压力和孔隙气压力的分布都有良好的规律性。非饱和土的二维固结除有一维固结

点：

- (1) 孔隙水压力和孔隙气压力都比较小；
- (2) 瞬时沉降比固结沉降大得多；
- (3) 孔隙水压力比孔隙气压力消散得快。

例2 一维固结问题，有限元解

先把图1所示地基分成三个单元，共有18个结点(图3)。再用程序CSU8分两步计算。

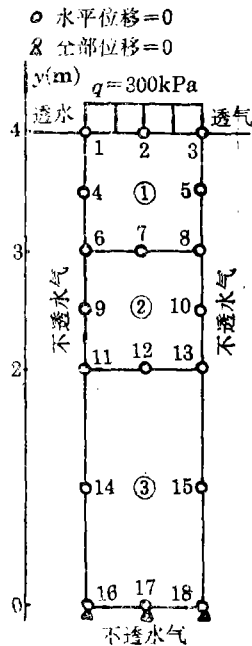


图3 一维边值问题单元剖分与边界条件

的三个规律外，还有以下特点：

(4) 在地基上部靠近荷载处发生轻微松胀；

(5) 二维固结明显快于一维固结。

以上结论对工程实际是有用的。

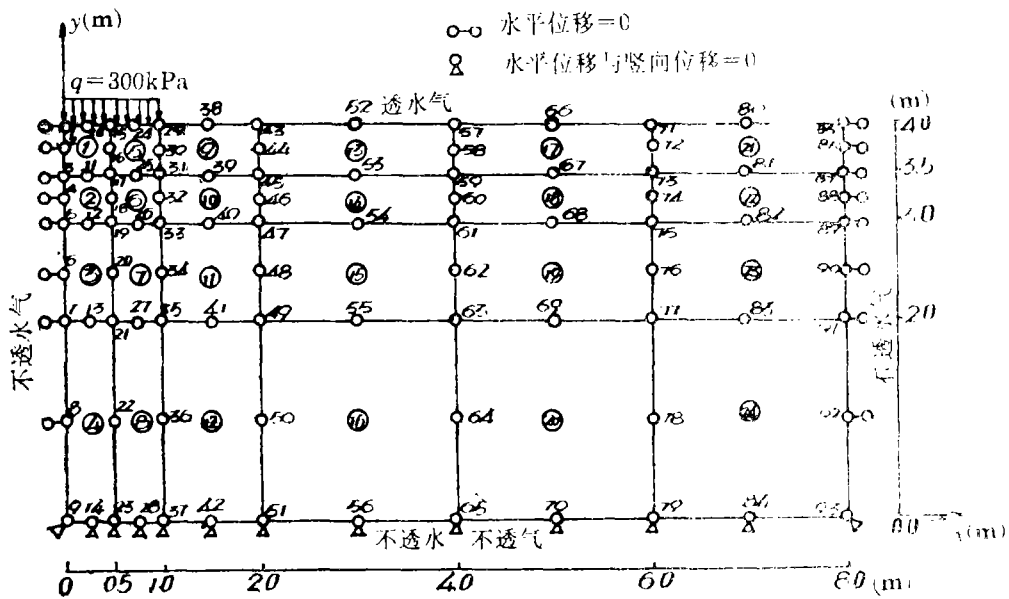


图4 平面应变问题的单元划分与边界条件

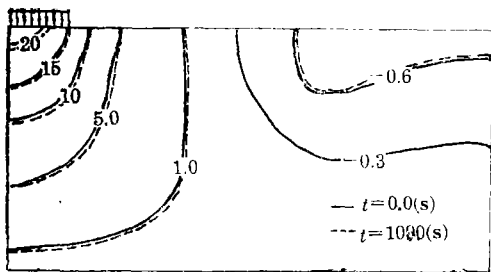


图5(a) 地基沉降等值线图

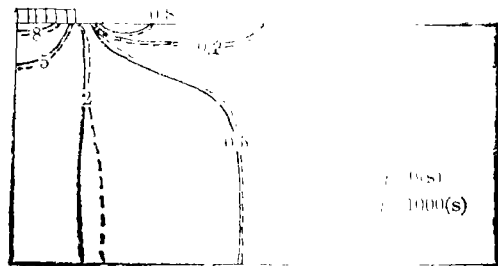


图5(b) 地基饱和度变化的等值线图

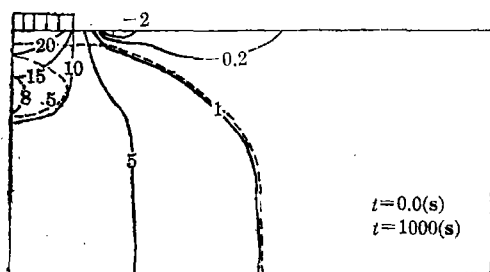


图5(c) 地基孔隙水压力分布等值线图(kPa)

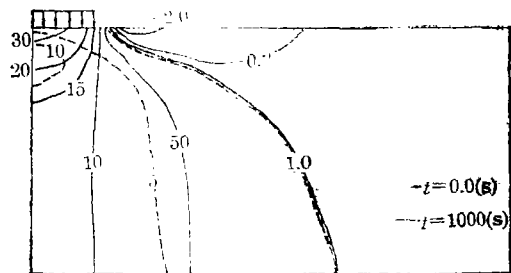


图5(d) 地基孔隙气压力分布等值线图(kPa)

表1 一维问题加载瞬时不排水不排气分析结果

结 点	竖向位移 $W(\text{cm})$	孔隙水压力 $P_1(\text{kPa})$	孔隙气压力 $P_2(\text{kPa})$	三个单元的27个高斯点处		
				竖向应力 $\sigma_z(\text{kPa})$	水平应力 $\sigma_x = \sigma_y(\text{kPa})$	饱和度增量 $\delta s(\%)$
1,2,3	27.18 (27.18)					
4,5	23.78 (23.78)					
6,7,8	20.39 (20.39)					
9,10	16.99 (16.99)	21.82 (21.90)	28.25 (28.25)	266.35 (266.36)	133.15 (133.18)	6.975 (6.989)
11,12,13	13.59 (13.59)					
14,15	6.796 (6.796)					
16,17,18	0					

注：括号中是相应的解析解数值。

表2 有限元计算所采用的时间步长和相应的固结时刻

时间步长(s)	1	9	90	900	2000	6000	9000	18000	36000	72000
固结时刻(s)	1	10	100	1000	3000	9000	18000	36000	72000	144000

表3 一维固结计算结果 ($\Delta t = 6000\text{s}$, $t = 9000\text{s}$)

结 点 号	竖向位移 $W(\text{cm})$	孔隙水压力 $P_1(\text{kPa})$	孔隙气压力 $P_2(\text{kPa})$
1,2,3	28.11(28.30)		0
4,5	24.41		3.87
6,7,8	20.84		9.23
9,10	17.32		12.80
11,12,13	13.82		16.46
14,15	6.88		17.83
16,17,18	0		18.48(18.92)

注：括号中是相应的解析解数值。

参 考 文 献

- [1] 陈正汉等, 非饱和土固结的混合物理论(I), 应用数学和力学, 14(2) (1993), 127—137.
- [2] 陈正汉等, 非饱和土的水气运动规律与吸力、孔压特性的试验研究, 岩土工程学报, 14(3) (1993).
- [3] 陈正汉等, 非饱和土的有效应力探讨, 岩土工程学报, 15(1) (1994). (待发表)
- [4] Fredlund, D. G., et al., One-dimensional consolidation theory: Unsaturated soils, *Canadian Geotechnical Journal*, 16(3) (1979), 521—531.
- [5] Fredlund, D. G., Consolidation of unsaturated porous media, *Proc. of NATO Advanced Study Institute on Mechanics of Fluids in Porous Media*, Newark, Delaware, USA (1982), 525—578.

- [6] Fredlund, D. G., Soil mechanics principles that embrace unsaturated soils, *Proc. 11-st International Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering*, San Francisco, USA (1985), 313—321.
- [7] 沈珠江, 用有限单元法计算软土地基的固结变形, *水利水运科学学报* (1979), 23.
- [8] 朱伯芳, 《有限单元法的原理及其应用》, 水利电力出版社 (1979).
- [9] Booker, J. R. and J. C. Small, An investigation of the stability of numerical solutions of Biot's equations of consolidation, *Int. J. Solids and Structures*, 11(1975), 907—917.
- [10] Wilson, R. K. and E. C. Aifantis, On the theory of consolidation with double porosity, *Int. J. Engng. Sci.*, 20 (1982), 1009—1035.

Consolidation Theory of Unsaturated Soil Based on the Theory of Mixture (II)

Chen Zheng-han

(Logistical Engineering College, Chongqing)

Abstract

The present paper uses the mathematics model for consolidation of unsaturated soil developed in ref. [1] to solve boundary value problems. The analytical solutions for one-dimension consolidation problem are gained by making use of Laplace transform and finite Fourier transform. The displacement and the pore water pressure as well as the pore gas pressure are found from governing equations simultaneously. The theoretical formulae of coefficient and degree of consolidation are also given in the paper. With the help of the Method of Galerkin Weighted Residuals, the finite element equations for two-dimension consolidation problem are derived. A FORTRAN program named CSU8 using 8-node isoparameter element is designed. A plane strain consolidation problem is solved using the program, and some distinguishing features on consolidation of unsaturated soil and certain peculiarities on numerical analysis are revealed. These achievements make it convenient to apply the theory proposed by the author in engineering practice.

Key words pore water pressure, pore gas pressure, coefficient of consolidation, degree of consolidation, initial settlement, finite element