

# 边裂纹柱扭转的强奇性积分方程解法\*

王劲松 汤任基

(上海交通大学工程力学系, 1992年5月22日收到)

## 摘 要

本文利用单裂纹扭转的位错型解答, 使用有限部积分的概念和方法, 最后将含有单根水平裂纹的柱体扭转问题归为解一个强奇性积分方程, 并为其建立了数值求解方法, 文末作了若干数值例子的计算, 结果令人满意。

**关键词** 边裂纹柱的扭转 强奇性积分方程 应力强度因子

## 一、引 言

用强奇性积分方程方法求解线弹性断裂力学问题, 这是近几年来发展起来的一种新方法<sup>[1]</sup>。在过去的文献中, 若使用奇异积分方程求解裂纹问题, 则常将问题归为解一个或一组在主值意义下的奇异积分方程, 这种方程亦称为主值型积分方程。此种方程的未知函数是裂纹面的位错密度函数<sup>[2]</sup>, 它在裂纹前沿无界, 因此函数的性质不好, 这直接影响数值计算的收敛性和精度。对于平面断裂力学, 由于一维主值型方程已有较好的数值法, 故在数值计算上还不会出现很大困难; 但对于韧带很小的深裂纹问题, 由于边界影响剧烈且未知函数在裂纹前沿性质不好, 此时数值计算的收敛很慢, 因此此种方程使用不再方便。此外, 对三维断裂力学, 由于二维主值型奇异积分方程数值法尚未很好建立, 所以此种方程在三维断裂力学中用得更少。最近 N. I. Ioakimidis<sup>[1]</sup>和 F. Erdogan<sup>[3]</sup>等将强奇性积分的有限部积分法引入断裂力学, 并导出了 I 型裂纹问题的强奇性积分方程。这种方程的未知函数是裂纹面的位错函数, 它在裂纹前沿连续有界, 所以在使用有限部积分的方法后, 强奇性积分方程的数值法要比主值型的更易建立, 此时数值计算的工作量也将大大减少, 所以, 在目前的文献中, 这种方法已被许多学者采用<sup>[1,3,4]</sup>。本文的目的是将强奇性积分方程方法推广用于带裂纹柱体的扭转。我们对文 [5] 获得的单裂纹解进行改造, 将其用裂纹面的位错函数表示, 进而将含有单根水平裂纹的柱体扭转问题, 归结为解一个强奇性积分方程, 并仿照文 [3] 的方法为其建立数值法, 最后以边界裂纹问题为例进行具体的数值计算。从得到的结果来看, 数值结果具有很高的精度, 此外, 这里的数值法也较主值型的更为简单, 因此强奇性积分方程方法是可以推广使用的。

\* 国家教委博士点基金资助项目。

## 二、单裂纹扭转的位错型基本解

对于图1单裂纹圆柱, 它的扭转函数  $\varphi(x, y)$  由文[5]给出为:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left[ \operatorname{arctg} \frac{h-y}{x-t} + \operatorname{arctg} \frac{hx-ty}{R^2-hy-tx} \right] f(t) dt \quad (2.1)$$

式中  $f(t)$  为裂纹  $(a, b)$  的位错密度函数:

$$f(t) = -\frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial t} [u_z(t, h^+) - u_z(t, h^-)] \quad (2.2)$$

若引入裂纹  $(a, b)$  的位错函数:

$$F(t) = -[u_z(t, h^+) - u_z(t, h^-)]/2a \quad (2.3)$$

则对 (2.1) 进行分部积分, 并使用裂纹的位移单值条件后, 以上单裂纹解便可用裂纹的位错函数  $F(t)$  表为:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{y-h}{(x-t)^2 + (y-h)^2} F(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{-R^2y + h(x^2 + y^2)}{(R^2 - hy - tx)^2 + (hx - ty)^2} F(t) dt \quad (2.4)$$

域中的应力由上式求得为:

$$\tau_{xz} = -\alpha\mu y - \frac{\alpha\mu}{\pi} \int_a^b \frac{2(h-y)(x-t)}{[(x-t)^2 + (h-y)^2]^2} F(t) dt + \frac{\alpha\mu}{\pi} \int_a^b \frac{2R^2(R^2 - hy - tx)(hx - ty)}{[(R^2 - hy - tx)^2 + (hx - ty)^2]^2} F(t) dt \quad (2.5)$$

$$\tau_{xy} = \alpha\mu x - \frac{\alpha\mu}{\pi} \int_a^b \frac{(x-t)^2 - (h-y)^2}{[(x-t)^2 + (h-y)^2]^2} F(t) dt - \frac{\alpha\mu}{\pi} \int_a^b \frac{R^2[(R^2 - hy - tx)^2 - (hx - ty)^2]}{[(R^2 - hy - tx)^2 + (hx - ty)^2]^2} F(t) dt \quad (2.6)$$

柱体的抗扭刚度应按以下公式计算:

$$D = \frac{\pi\mu R^4}{2} - 2\mu \int_a^b F(t) \cdot t dt \quad (2.7)$$

应力强度因子可按普通定义求得为:

$$K_{\text{I}}(a) = \alpha\mu \lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{\sqrt{2(x-a)}} \quad (2.8)$$

$$K_{\text{I}}(b) = -\alpha\mu \lim_{x \rightarrow b} \frac{F(x)}{\sqrt{2(b-x)}} \quad (2.9)$$

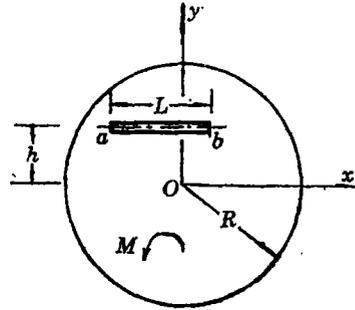


图 1

## 三、强奇性积分方程

使用表达式(2.6),使其满足图1裂纹(a,b)上下表面无外力作用条件,则得问题的强奇性积分方程为:

$$\int_a^b \frac{F(t)}{(t-x)^2} dt - \int_a^b K_1(t,x)F(t)dt = -\pi x, \quad x \in (a,b) \quad (3.1)$$

式中第一个积分是强奇性的,应按有限部积分方法计算,第二个积分在内裂纹时为普通积分,在边裂纹时可按主值积分计算,其中核为:

$$K_1(t,x) = \frac{R^2[(R^2-h^2-tx)^2-h^2(t-x)^2]}{[(R^2-h^2-tx)^2+h^2(t-x)^2]^2} \quad (3.2)$$

以上强奇性积分方程(3.1)可使用文[3]介绍的数值法求解,此处只计算边界裂纹,则坐标 $a^2=R^2-h^2$ .若引入新的变量(r,s)和新函数 $\varphi(r)$ :

$$t = \frac{b-a}{2}r + \frac{b+a}{2}, \quad x = \frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2} \quad (3.3)$$

$$F(t) = \frac{b-a}{2}\varphi(r), \quad K_1(t,x) = K(r,s) / \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad (3.4)$$

则(3.1)化为标准形式:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(r)}{(r-s)^2} dr + \int_{-1}^1 K(r,s)\varphi(r)dr = -\pi\left(\frac{b-a}{2}s + \frac{b+a}{2}\right), \quad s \in (-1,1) \quad (3.5)$$

对于端点a与柱的边界 $\Gamma$ 接触的边界裂纹,则函数 $\varphi(r)$ 可表示为:

$$\varphi(r) = \psi(r)\omega(r) \quad (3.6)$$

其中

$$\omega(r) = \sqrt{1-r} \quad (3.7)$$

函数 $\psi(r)$ 取以下待定多项式:

$$\psi(r) = \sum_{n=0}^m a_n r^n \quad (3.8)$$

则系数 $a_n$ 可由以下代数方程组决定:

$$\sum_{n=0}^m a_n G_n(s_j) = -\pi\left(\frac{b-a}{2}s_j + \frac{b+a}{2}\right) \quad (j=0,1,\dots,m) \quad (3.9)$$

式中 $s_j$ 为第一类Chebyshev多项式的零点:

$$s_j = \cos\left(\frac{2j+1}{m+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.10)$$

此外 $G_n(s_j)$ 由以下强奇性积分得到:

$$G_n(s) = \int_{-1}^1 \frac{r^n \sqrt{1-r}}{(r-s)^2} dr + \int_{-1}^1 K(r,s)r^n \sqrt{1-r} dr \quad (3.11)$$

式中右边第一个积分是强奇性的,因而按有限部积分法计算,文[3]已给出了具体公式,但该文中的一般表达式有印刷错误,故本文在附录中作了重新推导.

解以上代数方程组(3.9),可求出各待定系数 $a_n(n=0,1,\dots,m)$ ,将它们回代(3.8)、(3.6)、(3.4),即得原来的未知函数 $F(t)$ ,再由(2.4)便可求得柱体的扭转函数 $\varphi(x,y)$ ,于是图1扭转问题便获得解决.对于裂纹端点a与 $\Gamma$ 接触的边界裂纹,柱的抗扭刚度由(2.7)按

下式计算:

$$D^* = \frac{D}{D_0} = 1 - \frac{(b-a)^2}{\pi R^2} \sum_{n=0}^m a_n \int_{-1}^1 \sqrt{1-r^2} r^n \left( \frac{b-a}{2} r + \frac{b+a}{2} \right) dr \quad (3.12)$$

式中  $D_0 = \pi \mu R^4 / 2$ , 裂纹端点  $b$  的应力强度因子由 (2.9) 求得为:

$$K_{\mathbf{I}}(b) = \frac{\alpha \mu \sqrt{b-a}}{2} \sum_{n=0}^m a_n, \quad a = \sqrt{R^2 - h^2} \quad (3.13)$$

还应指出, 本文作数值计算时曾遇到系数矩阵为病态的情形, 因而使用了文 [6] 介绍的改进的 Gram-Schmidt 方法对  $a_n$  进行了处理<sup>[7]</sup>. 从得到的结果看, 本文的处理是成功的.

#### 四、数值结果

本文仅对边界裂纹的扭转作了数值计算. 计算时使用了无量纲参数的不同组合, 数值结果与文献 [8] 作了比较, 主要结果如下:

例1  $h=0$  的边裂纹柱的扭转

当图1中的边裂纹位于  $x$  负轴上, 柱的抗扭刚度已由文 [8] 用复函数法获得:

$$\tilde{D}^* = \frac{2D}{\pi \mu R^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \left[ 2 \left( 1 - \frac{b}{R} \right)^2 A^2 + \frac{b}{R} (A+B)^2 \right] \quad (4.1)$$

式中

$$A = \frac{R}{b} \left[ \left( 1 + \frac{b}{R} \right)^2 \frac{\arctg \sqrt{b/R}}{\sqrt{b/R}} - (1 - \sqrt{b/R}) \right] \quad (4.2)$$

$$B = \frac{R-b}{b} \left[ 2 - \frac{3}{4} (1 - \sqrt{b/R}) A \right] \quad (4.3)$$

为了验证本文方法, 这里使用前面得到的强奇性积分方程, 按不同的无量纲参数  $L/R$  对柱的抗扭刚度及裂纹端点  $b$  的应力强度因子作了数值计算, 所得的无量纲抗扭刚度  $D^* = D/D_0$  及应力强度因子  $K_{\mathbf{I}}^*(b) = K_{\mathbf{I}}(b)/K_0$  ( $K_0 = \mu MR \sqrt{L} / (\sqrt{2} D_0)$ ) 列于表1, 其中  $D^*$  与理论值  $\tilde{D}^*$  作了比较.

表 1  $D^*$ ,  $K_{\mathbf{I}}^*(b)$  随比值  $b/R$  的变化及与理论值  $\tilde{D}^*$  的比较 ( $h=0$ ,  $a=R$ )

$L/R$	$D^*$	$\tilde{D}^*[8]$	$K_{\mathbf{I}}^*(b)$
0.1	0.9907	0.99068	1.3541
0.2	0.9652	0.96536	1.3159
0.3	0.9272	0.92771	1.2919
0.4	0.8799	0.88109	1.2783
0.5	0.8264	0.82852	1.2735
0.6	0.7693	0.77270	1.2746
0.7	0.7109	0.71596	1.2777
0.8	0.6532	0.66036	1.2810
0.9	0.5978	0.60757	1.2805
1.0	0.5482	0.55899	1.2714

例2  $h \neq 0$  的边裂纹柱的扭转

与例1类似, 这里使用不同的无量纲参数  $h/R$  和  $L/\sqrt{R^2-h^2}$  对柱的抗扭刚度  $D$  及应力强度因子  $K_{III}(b)$  作了数值计算, 它们随这些参数的变化见图2和图3:

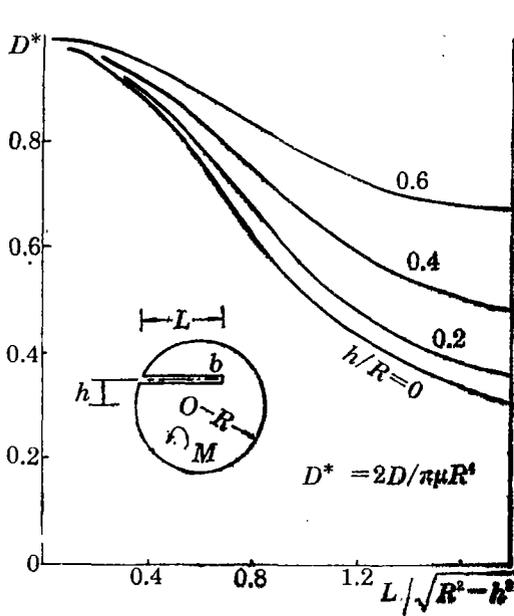


图 2

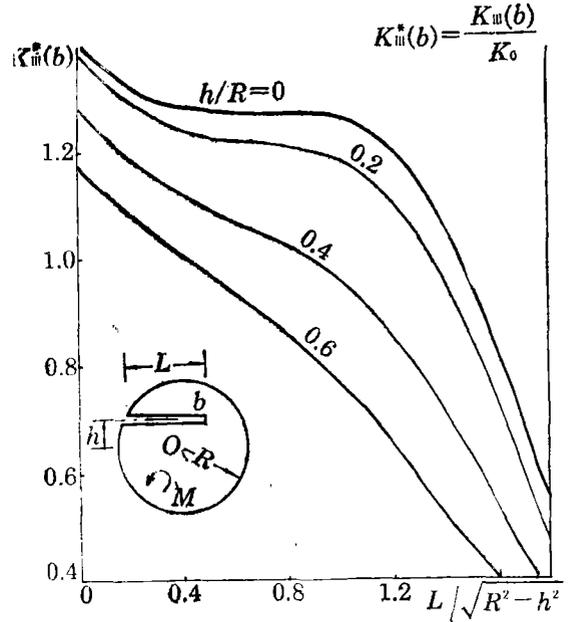


图 3

附 录

公式(3.11)中强奇性积分的计算

公式(3.11)中的二阶强奇性积分可按以下一般表达式计算:

$$R_n^I(s) = \int_{-1}^1 \frac{r^n \sqrt{1-r}}{(r-s)^j} dr \quad (A.1)$$

关于上式的具体计算, 文[3]已对其作了简化, 并在其附录中给出了表达式, 但经作者核验, 其中系数  $A_k^j$  有错误, 故本文在此给出了自己的推导过程:

考虑到强奇性积分的有限积分方法, 此处将被积函数中的因子  $r^n$  作如下展开:

$$r^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (r-s)^i s^{n-i} \quad (A.2)$$

将上式代入(A.1), 则得

$$R_n^I(s) = \sum_{m=1}^j \binom{n}{j-m} s^{n-j+m} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-r}}{(r-s)^m} dr + \sum_{m=0}^{j-1} \binom{n}{j+m} s^{n-j-m} \int_{-1}^1 (r-s)^m \sqrt{1-r} dr \quad (A.3)$$

式中

$$\int_{-1}^1 (r-s)^m \sqrt{1-r} dr = 4\sqrt{2} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} s^{m-k} (-1)^k \sum_{p=0}^k \frac{(-1)^p \binom{k}{p} 2^{k-p}}{2k-2p+3} \quad (A.4)$$

因此(A.3)的后半部分的积分为:

$$\sum_{m=0}^{n-j} \binom{n}{j+m} s^{n-j-m} \int_{-1}^1 (r-s)^m \sqrt{1-r} dr = 4\sqrt{2} \sum_{k=0}^{n-j} s^{n-j-k} \left[ \binom{n}{j+m} \binom{m}{k} (-1)^m \sum_{p=0}^k \left[ (-1)^p \binom{k}{p} 2^{k-p} / (2(k-p)+3) \right] \right] \quad (\text{A.5})$$

若使用组合数的以下性质:

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k} \quad (\text{A.6})$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} \quad (\text{A.7})$$

则可证明成立以下关系:

$$\sum_{m=0}^{n-j+k} \binom{n-k}{j+m} (-1)^m = \binom{n-k-1}{j-1} \quad (\text{A.8})$$

$$\sum_{m=k}^{n-j} \binom{n}{j+m} \binom{m}{k} (-1)^m = (-1)^k \sum_{m=0}^{n-j-k} \binom{n-k}{j+m} (-1)^m \quad (\text{A.9})$$

因此积分(A.5)可简化为:

$$\sum_{m=0}^{n-j} \binom{n}{j+m} s^{n-j-m} \int_{-1}^1 (r-s)^m \sqrt{1-r} dr = 4\sqrt{2} \sum_{k=0}^{n-j} s^{n-j-k} \left[ (-1)^k \binom{n-k-1}{j-1} \sum_{p=0}^k \frac{(-1)^p \binom{k}{p} 2^{k-p}}{2(k-p)+3} \right] \quad (\text{A.10})$$

上式亦可写为:

$$\sum_{m=0}^{n-j} \binom{n}{j+m} s^{n-j-m} \int_{-1}^1 (r-s)^m \sqrt{1-r} dr = 4\sqrt{2} \sum_{k=0}^{n-j} s^{n-j-k} \left[ \binom{n-k-1}{j-1} \sum_{i=0}^k \left( (-1)^i \binom{k}{i} 2^i / (2i+3) \right) \right] \quad (\text{A.11})$$

若令

$$A_k^j = 4\sqrt{2} \binom{n-k-1}{j-1} \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} 2^i / (2i+3) \quad (\text{A.12})$$

则将(A.11)、(A.12)代入(A.3)后便得

$$R_k^j(s) = \sum_{m=1}^j \binom{n}{j-m} s^{n-j+m} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-r}}{(r-s)^m} dr + \sum_{k=0}^{n-j} A_k^j s^{n-j-k} \quad (\text{A.13})$$

上式即为本文获得的结果,其中等式右边第二个和号与文[3]给出的不同。

### 参 考 文 献

- [1] Ioakimidis, N. I., Application of finite-part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity, *Acta*

- Mechanica*, 45 (1982).
- [ 2 ] Erdogan, F., Mixed boundary-value problems in mechanics, *Mechanics Today*, (4) (1978).
- [ 3 ] Kaya, A. C. and F. Erdogan, On the solution of integral equations with strongly singular kernels, *Quart. Appl. Math.*, 14(1) (1987).
- [ 4 ] Martin, P.A. and F. J. Rizzo, On boundary integral equations for crack problems, *Proc. R. Soc. Lond.*, A421 (1989).
- [ 5 ] 王晓春、汤任基, 关于多裂纹圆柱体的扭转, 应用数学和力学, 9(8) (1988), 693—702.
- [ 6 ] 沈燮昌, 《多项式最佳逼近的实现》, 上海科学技术出版社 (1984).
- [ 7 ] 王劲松, 本科生毕业论文, 上海交通大学 (1990).
- [ 8 ] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅, 《弹性理论的扭转理论》, 科学出版社 (1956).

## Method of Strongly Singular Integral Equation for the Torsion of Cylinder with Edge Crack

Wang Jin-song    Tang Ren-ji

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai)

### Abstract

From the dislocation type solution of the torsion of single crack, by using the concept of finite part integrals, we reduce the torsion problem of cylinder with a single crack into an integral equation with strong singularity. The numerical method is also obtained and several numerical examples are calculated successfully at the end of this paper.

**Key words** the torsion of the cylinder with edge crack, strongly singular integral, stress intensity factor