

等腰三角形管道进口段流动阻力研究

祝世兴* 王致清

(哈尔滨工业大学)

(钱伟长推荐, 1990年12月21日收到)

摘 要

本文首先利用 Л. В. Канторович 变分方法求出了等腰三角形管道不可压缩流体层流完全发展段流动速度的变分解, 并且给出了压力损失的理论计算值与实验值。继而, 本文推求出适用于各种顶角的等腰三角形管道进口段流动的速度分布模型和附加压力损失系统以及进口段长度计算方法。并对两种顶角($2\alpha=45.1^\circ, 60^\circ$)的等腰三角形管道进口段流动进行了具体计算和实验。本文的理论分析与其他作者的理论分析比较表明, 本文的分析结果具有很高的精度和广泛的实用性, 并与作者的实验结果吻合较好。

关键词 层流 进口段 速度分布 压力损失 进口段长度

一、引 言

由于非圆管道在热交换设备上和液压技术上的应用日益增多, 引起了越来越多的学者关注。特别是等腰三角形管道, 具有散热比大和工艺性好等优点, 因此, 更好地解决其流动计算问题非常具有工程实际意义。对等边三角形管道层流完全发展段流动, 首先在文献[1]中给出了速度精确解, 随后在文献[2]中给出了任意顶角下的等腰三角形管道完全发展段流动速度的级数解。本文对等腰三角形管道完全发展段流动所提供的速度变分解, 与文献[2]的级数解相比, 计算量要少很多倍, 并且当顶角为 60° 时与文献[1]给出的精确解完全相同, 但文献[2]当顶角为 60° 时与文献[1]的精确解不完全吻合。从而证明了本文给出的速度变分解的精度与可靠性。对于等腰三角形管道层流进口段流动问题, 在文献[3, 4, 5, 6, 7]中分别进行了分析和研究, 其计算比较复杂。本文利用速度变分解和文献[2]的积分方法提出了适用于各种顶角的等腰三角形管道进口段的速度模型。利用速度变分解和文献[2]的级数解求出了进口段附加压力损失修正系数的对比值, 并提出了适用于各种顶角的等腰三角形管道进口段长度计算方法。并对顶角 $2\alpha=45.1^\circ, 60^\circ$ 作为算例进行了具体计算, 求出了压力损失和进口段长度。本文的理论计算值为作者的实验所验证, 表明本文提供的理论计算是简单又可靠的, 并完全满足工程实际的计算精度要求。

* 现在佳木斯工学院任教。

符 号 表

 x, y, z ——直角坐标 r, θ, z ——圆柱坐标 x_0 ——进口段长度 h ——等腰三角形腰高 p_0 ——在进口($x=0$)处压力 p_0 ——在进口段终了处($x=x_0$)的压力 p ——在离进口 x 处的压力 u, v, w ——在 x, y, z 方向速度分量 u_m ——沿 x 方向断面平均速度 ρ ——流体的密度 μ ——流体的动力粘度 ν ——流体的运动粘度 τ ——壁面摩擦应力 Q ——流量 K ——进口段附加压力损失修正系数 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ——二维拉普拉斯算子 $f = \tau / (\rho u_m^2 / 2)$ ——摩擦系数 $\bar{p} = p / (\rho u_m^2 / 2)$ ——无量纲压力 $\bar{x} = x / DRe$ —— x 方向无量纲坐标 $Re = \frac{u_m D}{\nu}$ ——雷诺数 $D = \frac{4A}{\chi}$ ——水力直径 χ ——湿周长 u_{∞} ——沿 x 方向完全发展了的速度

二、完全发展段流动

2.1 速度变分解

基于假设条件：1) 流动为不可压缩流体等温流动；2) 同一断面上各点压力相等；3) 定常层流流动。对等腰三角形管道，在图 1 所示的坐标系下，Navier-Stokes 方程简化为

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (2.1)$$

$$边界条件为 \quad u|_{\Gamma} = 0 \quad (2.2)$$

式中 Γ 为等腰三角形的周边。这是一个具有第一类边界条件的Poisson方程的定解问题，可用变分方法求解。为此，给出下列泛函

$$J(u) = \int_{y=0}^{y=h} \int_{z=-Ty}^{z=Ty} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2u \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \right] dy dz \quad (2.3)$$

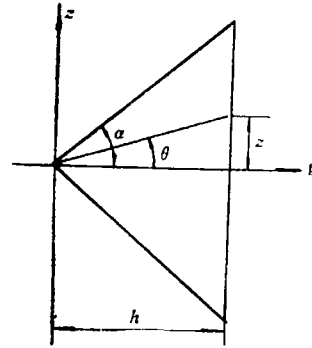


图 1

式中 $T = \text{tg} \alpha$ 。此泛函的极小值 $u(y, z)$ 将是 Poisson 方程 (2.1) 的解。按 Л. В. Канторович 变分方法选取下列形式的近似函数

$$u = \sum_{k=1}^n v_k(y) f_k(y, z) \quad (2.4)$$

式中 $v_k(y)$ 为坐标 y 的函数； $f_k(y, z)$ 为坐标函数序列。首先，选取一级近似函数

$$u = (z^2 - T^2 y^2) v_1(y) \quad (2.5)$$

这个函数已满足边界条件 $z = \pm Ty$ 。现将 (2.5) 式代入 (2.3) 式，泛函 $J(u)$ 化为

$$J(u) = \int_0^h \left[\frac{16}{15} T^5 y^5 v_1'^2 + \frac{16}{3} T^5 y^5 v_1 v_1' + \left(8T^5 y^3 + \frac{8}{3} T^3 y^3 \right) v_1^2 \right] dy$$

$$-\frac{8}{3}T^3y^3\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}v_1]dy \tag{2.6}$$

若使方程(2.6)取得极小值, 则 $v_1(y)$ 必须满足Euler方程, 则有

$$y^2\frac{d^2v_1}{dy^2} + 5y\frac{dv_1}{dy} - \frac{5}{2}\frac{1-T^2}{T^2}v_1 = -\frac{5}{4}\frac{1}{T^2}\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} \tag{2.7}$$

利用边界条件

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ 时, } v_1(y) \text{ 为有限值} \\ y=h \text{ 时, } v_1(y)=0 \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

方程(2.7)的定解为

$$v_1 = \frac{1}{2(1-T^2)} \left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^{(-2+\frac{1}{2T}\sqrt{10+2T^2})} \right] \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \tag{2.9}$$

把(2.9)式代入(2.5)式得速度分布

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{1}{1-T^2} (z^2 - T^2y^2) \left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^{(-2+\frac{1}{2T}\sqrt{10+6T^2})} \right] \frac{dp}{dx} \tag{2.10}$$

特别地, 当 $T = \text{tg}30^\circ = \sqrt{3}/3$ 时, 就得出等边三角形管道的速度分布

$$u = \frac{1}{4\mu} \left(1 - \frac{y}{h}\right)(y^2 - 3z^2) \left(-\frac{dp}{dx}\right) \tag{2.11}$$

这与文献[1]中所给出的精确解完全相同. 因而(2.10)式的精度与可靠性间接地得到了验证. 同时还可证明, (2.10)式仅在 $T = \text{tg}30^\circ = \sqrt{3}/3$ 时才是精确解, 而在其他顶角条件下都是近似解. 一级近似解的精度, 在工程计算上已完全能满足其精度要求.

通过对任意顶角的等腰三角形管道断面的流量计算得出

$$Q = \frac{h^4}{6\mu} \frac{T^3}{1-T^2} \left(1 - \frac{8T}{4T + \sqrt{10+6T^2}}\right) \left(-\frac{dp}{dx}\right) \tag{2.12}$$

由于管断面面积 $A = Th^2$, 因而管断面上平均流速

$$u_m = \frac{Q}{A} = \frac{h^2}{6\mu} \frac{T^2}{1-T^2} \left(1 - \frac{8T}{4T + \sqrt{10+6T^2}}\right) \left(-\frac{dp}{dx}\right) \tag{2.13}$$

为了清楚看出流速在管断面上分布情况, 绘出了管断面上等速线图和沿对称轴的速度分布图.

将顶角为 $\alpha = 38^\circ, 50^\circ, 70^\circ$ 管道断面上等速线图, 分别绘在图2、图3和图4(由于对称性仅绘出一半). 图中在等速线上标注的数字为 u/u_m 的值, 而且 u/u_m 的最大值是在对称轴的某个点上. 从图中观察得知, 对于较小顶角情形, 速度在底边中间部分比在顶角部分变化

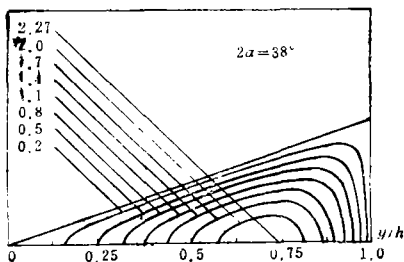


图 2

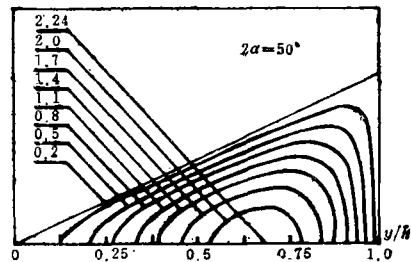
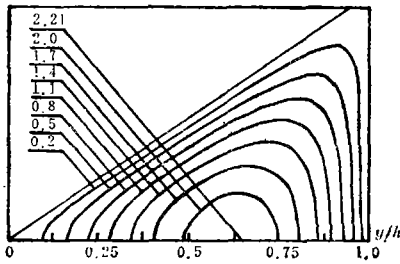


图 3

得更快,即等速线越密集的地方,速度梯度越大;反之,速度梯度越小.但随着顶角的增大,速度最大的极值点沿着 y 坐标轴(对称轴)向右移动(数值减小).在图 2 中的极值点数值为 0.731,在图 4 中极值点数值为 0.644.



2α=70°
图 4

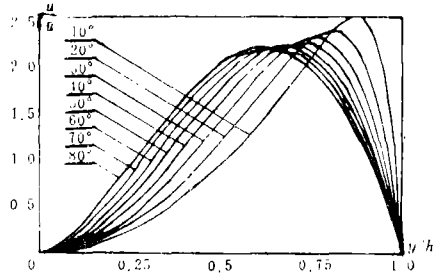


图 5

将顶角为 $2\alpha=10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ 无量纲速度 u/u_m 沿对称轴的分布曲线绘于图 5 所示.从图中观察和计算得知,随着顶角的增大,速度的最大值由大变小,曲线变化由陡峭变为平缓,分布趋于均匀.速度最大的极值点,通过对 (2.10) 式求极值得出

$$y = \sqrt{\frac{b}{2+b}} \cdot \frac{2}{2+b} h, \quad z = 0 \tag{2.14}$$

式中 $b = -2 + \frac{1}{2T} \sqrt{10+6T^2}$. 可见,极值点在对称轴上,且随顶角增大而减小.

将(2.14)式代入(2.10)式得最大速度

$$u_{max} = \frac{h^2}{2\mu} \frac{T^2}{1-T^2} \left(\frac{2}{2+b}\right)^2 \left(\frac{b}{2+b}\right) \left(-\frac{dp}{dx}\right) \tag{2.15}$$

因而无量纲最大速度

$$u_{max}/u_m = \frac{5}{4T + \sqrt{10+6T^2}} \left(\frac{2}{2+b}\right)^2 \left(\frac{b}{2+b}\right) \tag{2.16}$$

根据(2.16)式,给出八种顶角的无量纲最大速度值,列在表 1 中.

表 1

2α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
u_{max}/u_m	2.534	2.387	2.310	2.265	2.238	2.222	2.213	2.208

2.2 压力损失

考虑长为 dx 的管段上力的平衡,得

$$-dpA = \tau \chi dx \tag{2.17}$$

式中 A ——管道断面面积(Th^2), χ ——管道湿周长度,因而有

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\tau \chi}{A} = 4 \frac{\tau}{D} \tag{2.18}$$

式中 $D = 4A/\chi$ ——水力直径.由于摩擦系数

$$f = \tau / (\rho u_m^2 / 2) \tag{2.19}$$

将(2.19)式代入(2.18)式, 得

$$- \frac{dp}{dx} = f \cdot \frac{2\rho u_m^2}{D} \tag{2.20}$$

式中水力直径

$$D = \frac{4A}{\chi} = 2hs\sin\alpha / (1 + \sin\alpha) \tag{2.21}$$

对(2.20)式在管长 l 的管段上积分, 得压力损失

$$\Delta p = 4f \frac{l}{D} \frac{1}{2} \rho u_m^2 = \lambda \frac{l}{D} \frac{1}{2} \rho u_m^2 \tag{2.22}$$

式中 $\lambda = 4f$ 为沿程流动阻力系数. 为了确定 f 或 λ , 将(2.20)式中一个平均速度 u_m 用 Q/A 替换, 整理可得摩擦系数

$$f = 12 \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) \left(\frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} \right)^2 \left(1 - \frac{8T}{4T + \sqrt{10 + 6T^2}} \right)^{-1} / Re \tag{2.23}$$

则沿程流动阻力系数

$$\begin{aligned} \lambda = 4f &= 48 \left(\frac{1}{T^2} - 1 \right) \left(\frac{\sin\alpha}{1 + \sin\alpha} \right)^2 \left(1 - \frac{8T}{4T + \sqrt{10 + 6T^2}} \right)^{-1} / Re \\ &= \frac{B}{Re} \end{aligned} \tag{2.24}$$

对于等边三角形管道, 以 $T = \text{tg}30^\circ = \sqrt{3}/3$ 代入上式得沿程流动阻力系数

$$\lambda = \frac{53.33}{Re} \tag{2.25}$$

这就是在一般文献中所引用的公式.

在不同顶角情况下: $2\alpha = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$, 等腰三角形管道的沿程阻力系数中 B 值列在表 2 中, 可见 B 值变化范围是不大的.

表 2

2α	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
B	49.92	51.32	52.29	52.91	53.24	53.33	53.25	53.03

在水洞实验台上, 对顶角 $2\alpha = 45.1^\circ$ 和 60° 两种等腰三角形管道进行了测量. 在图 6 和图 7 上的横坐标轴代表雷诺数 Re , 纵坐标轴代表无量纲压力损失 $\Delta p / (\rho u_m^2 / 2)$. 压力损失的理论计算和实验测量管长度 $l = 90\text{mm}$, 水力直径 D 分别为 19.4mm 和 17.33mm . 图中曲线是

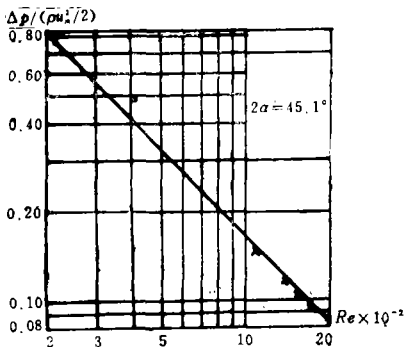


图 6

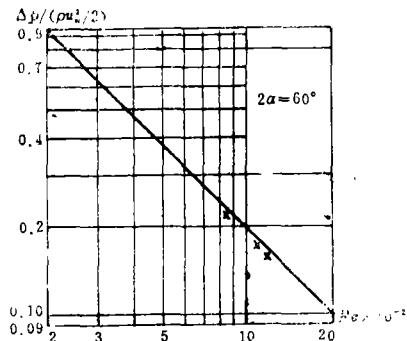


图 7

在双对数坐标系内绘出的。横坐标轴的雷诺数 Re 比实际值缩小 100 倍，纵坐标轴的数值为实际值。同时，将理论值与实验值列在表 3 与表 4 中，可见，理论值与实验值吻合得很好。

表 3

Re	$\Delta p / (\rho u_m^2 / 2)$	
	理论值	实验值
1097.7	0.1496	0.141
1405.0	0.1169	0.110
1576.2	0.1042	0.101
1710.5	0.0960	0.095

表 4

Re	$\Delta p / (\rho u_m^2 / 2)$	
	理论值	实验值
740.2	0.2495	0.238
1065.9	0.1732	0.165
1184.3	0.1559	0.149

三、进口段流动

根据文献[3]所给出的进口段流动速度模式，我们利用本文的完全发展段的速度变分解，提出了任意顶角的等腰三角形管道进口段速度分布模式，进而对顶角 $2\alpha = 45.1^\circ$ 和 60° 时的等腰三角形管道的压力损失、附加压力损失系数和进口段长度进行了计算和讨论，并用实验进行了验证。

3.1 速度分布公式的建立

在文献[3]中，对于腰高为 1 的等边三角形管道进口段速度模式，有如下形式

$$u/u_m = (1 - \exp[-\lambda s_1])(1 - \exp[-\lambda s_2])(1 - \exp[-\lambda s_3])/H \quad (3.1)$$

$$\text{式中 } H = \frac{(1 - \exp[-\lambda](1 + 12/\lambda^2) - 6(1 + \exp[-\lambda]))}{\lambda} \quad (3.2)$$

λ 是非线性效应参数， s_1, s_2, s_3 分别表示管道断面内任意点至三个边的距离，且有

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}(y - \sqrt{3}z) \\ s_2 &= \frac{1}{2}(y + \sqrt{3}z) \\ s_3 &= 1 - y \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

本文基于速度模式(3.1)，提出任意顶角等腰三角形管道进口段速度模式，首先由(2.10)和(2.13)式得出等腰三角形管道完全发展段流动速度分布

$$\frac{u}{u_m} = \frac{3}{T^2 \left(1 - \frac{8T}{4T + \sqrt{10} + 6T^2} \right)} \left(T \frac{y}{h} - \frac{z}{h} \right) \cdot \left(T \frac{y}{h} + \frac{z}{h} \right) \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^b \right] \quad (3.4)$$

当 λ 是小量时，有近似式

$$1 - \exp[-\lambda s] \approx \lambda s, \quad H \approx \frac{\lambda^3}{60} \quad (3.5)$$

因此进口段流动速度模式(3.1)式近似为

$$\frac{u}{u_m} \approx 60 s_1 s_2 s_3 \quad (3.6)$$

参照(3.3)式和(3.4)式, 可取

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= c \left(T \frac{y}{h} - \frac{z}{h} \right) \\ s_2 &= c \left(T \frac{y}{h} + \frac{z}{h} \right) \\ s_3 &= a \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^b \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

式中 a, c 是待定常数. 因为当 λ 为小量时 (理论上 $\lambda \rightarrow 0$), 进口段流动进入完全发展段, 所以 (3.4) 式与(3.6)式两端应相等, 得

$$c^2 a = \frac{1}{20T^2 \left(1 - \frac{8T}{4T + \sqrt{10 + 6T^2}} \right)} \quad (3.8)$$

由分析可知, 当顶角增大时, z 坐标的影响应当减小, 所以 c 应与 T 成反比. 另外, 当 $T = \text{tg}30^\circ = \sqrt{3}/3$ 时, (3.7)式中各等式应与(3.3)式中各等式对应相等. 故取

$$c = \frac{1}{2T} \quad (3.9)$$

将(3.9)式代入(3.8)式, 得

$$a = \frac{1}{5 \left(1 - \frac{8T}{4T + \sqrt{10 + 6T^2}} \right)} \quad (3.10)$$

将(3.8)式和(3.9)式分别代入(3.7)式, 得

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2T} \left(T \frac{y}{h} - \frac{z}{h} \right) \\ s_2 &= \frac{1}{2T} \left(T \frac{y}{h} + \frac{z}{h} \right) \\ s_3 &= \frac{1}{5 \left(1 - \frac{8T}{4T + \sqrt{10 + 6T^2}} \right)} \left[1 - \left(\frac{h}{y} \right)^b \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

因而, 对任意顶角的等腰三角形管道的速度模式就建立起来了.

当 λ 取任意大值时 (理论上 $\lambda \rightarrow \infty$), 将有近似式

$$H \doteq 1 - \frac{6}{\lambda} \quad (3.12)$$

$$\frac{u}{u_m} \doteq 1 \quad (3.13)$$

上式说明, 当 λ 取任意大值时, 进口处的速度趋于均匀分布.

下面对两种顶角 $2\alpha = 45.1^\circ$ 和 $2\alpha = 60^\circ$ 的等腰三角形管道进口段速度分布进行分析和讨论.

当 $2\alpha = 45.1^\circ$ 时,

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} - \frac{y}{h} - 1.20116 \frac{z}{h} \\ s_2 &= \frac{1}{2} - \frac{y}{h} + 1.20116 \frac{z}{h} \\ s_3 &= 0.6 \left[1 - \left(-\frac{y}{h} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

当 $2\alpha = 60^\circ$ 时

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} - \frac{y}{h} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{h} \\ s_2 &= \frac{1}{2} - \frac{y}{h} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{z}{h} \\ s_3 &= 1 - \frac{y}{h} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

将(3.14)式和(3.15)式分别代入(3.1)式中,按不同的 λ 值绘出的等腰三角形管道进口段速度沿 y 轴分布曲线,分别如图8和图9所示。

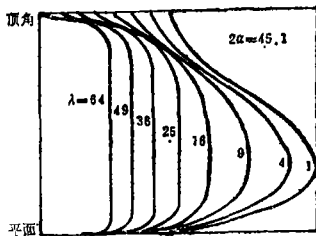


图 8

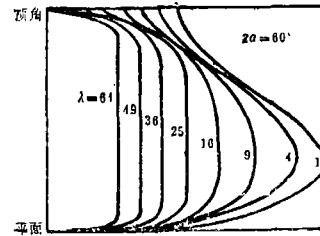


图 9

3.2 压力损失

由运动方程和连续性方程

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

将(3.17)式两端同乘以 u 加到(3.16)式,整理得

$$\frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nabla^2 u \quad (3.18)$$

对(3.18)式两端在横截面上积分,并利用

$$\int_A \left[-\frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) \right] dA = 0, \text{ 得}$$

$$\frac{d}{dx} \int u^2 dA = \nu \int \nabla^2 u dA - \frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p}{\partial x} dA \quad (3.19)$$

将(3.19)式两端同除以 Au_m^2 , 整理得

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{A} \int \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 dA = \frac{D^2}{A} \int \nabla^2 \left(\frac{u}{u_m} \right) dA - \frac{1}{2A} \int \frac{\partial p}{\partial x} dA \quad (3.20)$$

考虑管道核心区流动, 运动方程简化为

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = \nu \nabla^2 u_0 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.21)$$

式中脚标“0”代表一个特殊位置, 即 $y = \sqrt{\frac{b}{2} + b}$, $z=0$ 轴线. 仿照前面的处理方法, 有

$$\frac{d}{d\bar{x}} \frac{1}{A} \int_A \frac{1}{2} \left(\frac{u}{u_m} \right)_0^2 dA = \frac{D^2}{A} \int_A \nabla^2 \left(\frac{u}{u_m} \right)_0 dA - \frac{1}{2A} \int_A \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} dA \quad (3.22)$$

用(3.20)式减去(3.22)式, 得

$$\frac{d}{d\bar{x}} \frac{1}{A} \int \left[\left(\frac{u}{u_m} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{u_m} \right)_0^2 \right] dA = \frac{D^2}{A} \int \left[\nabla^2 \left(\frac{u}{u_m} \right) - \nabla^2 \left(\frac{u}{u_m} \right)_0 \right] dA \quad (3.23)$$

$$\text{令} \quad L = \frac{1}{A} \int \left[\left(\frac{u}{u_m} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{u}{u_m} \right)_0^2 \right] dA \quad (3.24)$$

$$M = \left\{ -\frac{D^2}{A} \int \left[\nabla^2 \left(\frac{u}{u_m} \right) - \nabla^2 \left(\frac{u}{u_m} \right)_0 \right] dA \right\}^{-1} \quad (3.25)$$

因此, (3.23)式可简记为

$$d\bar{x} = M dL = M L'_\lambda d\lambda = M \frac{dL}{d\lambda} d\lambda \quad (3.26)$$

这样, 参数 λ 和 \bar{x} 之间的关系就由(3.26)式唯一确定了.

将(3.20)式两端对 \bar{x} 积分, 得

$$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = 2 \frac{1}{A} \int \left[\left(\frac{u}{u_m} \right)_{\bar{x} - \bar{x}}^2 - \left(\frac{u}{u_m} \right)_{\bar{x} = 0}^2 \right] dA - 2 \int_0^{\bar{x}} \left[-\frac{D^2}{A} \int \nabla^2 \left(\frac{u}{u_m} \right) dA \right] d\bar{x} \quad (3.27)$$

(3.27)式是严格从运动方程和连续性方程出发推导出的进口段压力损失计算关系式, 未经任何简化, 所以是准确的.

对(3.26)式积分就可求出 λ 和 \bar{x} 的关系. 按一般假设, 进口处速度绝对均匀, λ 应从 ∞ 积分到 0 (不等于 0), 对应的 \bar{x} 从 0 积分到某一点 \bar{x} . 但从实验测试结果可知, 进口处的速度分布是近似均匀的, 即在管道中心部分 $u/u_m > 1$. 这就是说在边界上有较大的速度梯度. 我们通过在水洞实验台上对顶角 $2\alpha = 45.1^\circ$ 的等腰三角形管道进口速度的实测可知, 在管道中心部分 $u/u_m = 1.1$, 这时由(3.1)式和(3.14)式可求得 $\lambda = 64$, 这就是说(3.26)式的积分区间为

$$\int_0^{\bar{x}} d\bar{x} = \int_{64}^{\lambda} M L'_\lambda d\lambda \quad (3.28)$$

利用 \bar{x} 和 λ 的关系和(3.28)式, 可求得进口段的压力损失为

$$\begin{aligned} \frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} &= 2 \frac{1}{A} \int \left[\left(\frac{u}{u_m} \right)^2 - \left(\frac{u}{u_m} \right)_{\lambda=64}^2 \right] dA \\ &\quad - 2 \int_{64}^{\lambda} \left[-\frac{D^2}{A} \int \nabla^2 \left(\frac{u}{u_m} \right) dA \right] M L'_\lambda d\lambda \end{aligned} \quad (3.29)$$

利用(3.29)式可以求得从进口处到任意截面处的压力降. 本文对两种顶角 $2\alpha = 45.1^\circ$ 和 60° 进行了计算, 其相应的计算结果分别列在表5和表6中. 为了便于比较, 将不计进口段效

应时的压力降也列在相应的表中,其相应的计算关系式由(2.22)式可表示为

$$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = 4f \cdot Re \bar{x} \quad (3.30)$$

式中 $f \cdot Re$ 由(2.23)式确定.

根据表5和表6给出的压力降的计算值绘出的进口段压力损失曲线以及在水洞实验台上测

表 5

 $2\alpha = 45.1^\circ$

λ	\bar{x}	$(u/u_m)_0$	$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$	$4fRe$	λ	\bar{x}	$(u/u_m)_0$	$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$	$4fRe\bar{x}$
64	0	1.0999	0	0	17	3.118×10^{-3}	1.4363	0.8202	0.1656
50	7.4514×10^{-5}	1.1302	0.06759	0.003957	16	3.6566×10^{-3}	1.4658	0.9078	0.1942
40	2.09×10^{-4}	1.1662	0.1502	0.0111	15	4.3121×10^{-3}	1.4986	1.0081	0.29
35	3.4352×10^{-4}	1.1928	0.2129	0.01877	14	5.115×10^{-3}	1.535	1.1234	0.2716
30	5.7999×10^{-4}	1.2293	0.3014	0.0308	13	6.1045×10^{-3}	1.5753	1.2564	0.3242
29	6.4758×10^{-4}	1.2383	0.3236	0.03439	12	0.007332	1.6199	1.4107	0.3894
28	7.2472×10^{-4}	1.2480	0.3478	0.03849	11	0.008865	1.669	1.5902	0.4708
27	8.1313×10^{-4}	1.2585	0.3741	0.04318	10	0.01079	1.7226	1.8002	0.5732
26	9.1486×10^{-4}	1.2699	0.4029	0.04859	9	0.01324	1.7807	2.0469	0.7029
25	1.0324×10^{-3}	1.2823	0.4346	0.05483	8	0.1636	1.8427	2.3381	0.8687
24	1.1687×10^{-3}	1.2958	0.4695	0.06207	7	0.02039	1.9076	2.7442	1.0828
23	1.328×10^{-3}	1.3106	0.5081	0.07052	6	0.02567	1.974	3.0996	1.363
22	1.5144×10^{-3}	1.3268	0.551	0.08043	5	0.03272	2.0396	3.6073	1.7375
21	1.734×10^{-3}	1.3445	0.5987	0.09209	4	0.04255	2.1017	4.2514	2.2596
20	1.9938×10^{-3}	1.3642	0.6522	0.1059	3	0.05783	2.157	5.1608	3.0709
19	2.303×10^{-3}	1.3858	0.7123	0.1223	2	0.09322	2.2021	7.0577	4.9506
18	2.673×10^{-3}	1.4098	0.7432	0.142	1	0.6584	2.2338	37.0818	34.9653

表 6

 $2\alpha = 60^\circ$

λ	\bar{x}	$(u/u_m)_0$	$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$	$4fRe\bar{x}$	λ	\bar{x}	$(u/u_m)_0$	$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_m^2}$	$4fRe\bar{x}$
64	0	1.0999	0	0	17	3.8622×10^{-3}	1.4372	0.8611	0.206
50	1.2964×10^{-4}	1.1302	0.06759	0.006914	16	4.4829×10^{-3}	1.4669	0.95	0.2391
40	3.3479×10^{-4}	1.1662	0.1502	0.01786	15	5.235×10^{-3}	1.4999	1.052	0.2792
35	5.2356×10^{-4}	1.1928	0.2129	0.02792	14	6.1527×10^{-3}	1.5365	1.1694	0.3281
30	8.3643×10^{-4}	1.2293	0.3015	0.04461	13	7.28×10^{-3}	1.577	1.3054	0.3883
29	9.2312×10^{-4}	1.2386	0.3238	0.04923	12	8.6748×10^{-3}	1.6218	1.4637	0.4627
28	1.021×10^{-3}	1.2481	0.348	0.05445	11	0.01041	1.6711	1.6488	0.5554
27	1.132×10^{-3}	1.2586	0.3744	0.06038	10	0.0126	1.7248	1.8663	0.6718
26	1.2585×10^{-3}	1.27	0.4033	0.06712	9	0.01536	1.7827	2.1234	0.8192
25	1.4032×10^{-3}	1.2824	0.4351	0.07484	8	0.01889	1.8444	2.429	1.0074
24	1.5696×10^{-3}	1.296	0.4701	0.08371	7	0.02344	1.0985	2.7951	1.245
23	1.762×10^{-3}	1.3108	0.5089	0.09397	6	0.02937	1.7936	3.238	1.5663
22	1.9855×10^{-3}	1.3271	0.522	0.106	5	0.03722	2.0373	3.782	1.985
21	2.2465×10^{-3}	1.3449	0.6001	0.1198	4	0.04784	2.0966	4.4667	2.5515
20	2.5533×10^{-3}	1.3646	0.654	0.1362	3	0.06276	2.148	5.3658	3.3471
19	2.9157×10^{-3}	1.3846	0.7146	0.1555	2	0.08525	2.188	6.6466	4.5465
18	3.4367×10^{-3}	1.4105	0.7832	0.1833	1	0.1253	2.2135	8.8424	1.6848

出的实验点如图10和图11所示。

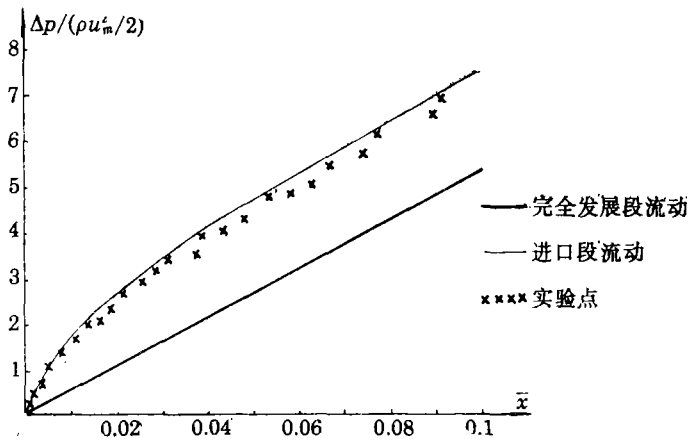


图10. 顶角为 45.1° 的等腰三角形管道进口段压力降曲线

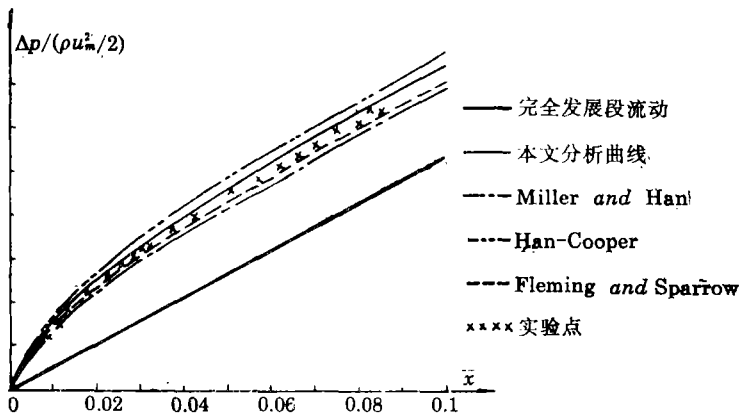


图11 等腰三角形管道进口段压力降曲线

如果计算时管道很长，且不要求进出口段任一截面处的压力降，而仅仅要要求出从进口处到进口段结束时的压力降，通常的作法是将进口段的压力降为两部分：

$$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = 4fRe\bar{x} + K \tag{3.31}$$

式中第一项代表完全发展段压力降，第二项代表由于进口段效应产生的附加压力降。K称为附加压力降系数，按下式计算

$$K = \frac{2}{A} \int \left[\left(\frac{u_{s,0}}{u_m} \right)^2 - \left(\frac{u_{s,\infty}}{u_m} \right)^2 \right] dA \tag{3.32}$$

(3.32)式适用于任何等截面直管道。由式(3.30)和(3.32)可以非常方便地求出进口段压力降，这是求取进口段压力降的又一种方法。利用本文的速度变分解和文献[2]的级数解算出的部分顶角的附加压力降系数K值如表7所示。

结果表明，对于4fRe，两个公式算出的结果基本上是一致的，而对于附加压力降系数K，当顶角2α ≤ 60°时两者符合得很好，而在2α > 60°时，两者出现了一些偏差。作者认为，变分解算出的结果更可靠一些，因为当等腰三角形管道的顶角2α趋于180°时，等腰三角形

表 7

顶 角	2α	10°	20°	30°	40°	45.1°	50°	60°	70°	80°
本 文	K	2.450	2.174	2.013	1.915	1.881	1.855	1.818	1.797	1.787
变 分 解	$4fRe$	49.32	51.32	52.27	52.91	53.11	53.24	53.33	53.25	53.03
Sparrow	K	2.418	2.128	1.966	1.876		1.831	1.818	1.829	1.860
级 数 解	$4fRe$	49.90	51.29	52.26	52.88		53.23	53.32	53.24	52.99

管道流动趋于两平行平板流动，而两平行平板流动的附加压力降系数 $K=1.5$ ，所以 K 值应随 α 增大而逐渐减小。

3.3 进口段长度及其计算

前面已对进口段的速度分布和压力损失进行了分析和计算。本节对进口段长度进行讨论。到目前为止，进口段长度尚无统一的度量标准。由于采用的计算方法不同，给出的进口段长度的定义方法也不同，因而求出的结果也不同。归纳起来，大致有以下几种定义方法。

一是1922年Schiller^[12]在用边界层方程研究圆管进口段时提出的。他认为，在圆管中，当边界层厚度由0增加到圆管半径时，边界层厚度发生变化的那一段长度为进口段长度。类似于Schiller的定义方法，1967年McComas^[13]提出了适用于各种断面管道的进口段长度计算公式：

$$\frac{x_e}{DRe} = \frac{\left(\frac{u_0}{u_m}\right)^2 - 1 - K}{4fRe} \quad (3.33)$$

式中 u_0 是管道核心区的最大速度。对等腰三角形管道，就是 $y = \sqrt{\frac{b}{2+b}}h$ ， $z=0$ 轴线上的最大速度。

二是利用管道中心线处最大速度定义的。当流体在中心线处的速度由进口变到最大速度的98%（或99%）时，流体所经过的这段长度定义为进口段长度。目前，国内流体力学方面的书籍多采用这种定义方法。

三是1969年，由Fleming和Sparrow^[6]提出的。他们认为，当进口段的附加压力降系数 $K(x_e)$ 达到进口段结束时 $K(\infty)$ 的95%，即 $\frac{K(x_e)}{K(\infty)} = 0.95$ 时，这时的 x_e 值定义为进口段长度。

四是1978年由Mohanty和Asthana^[9]提出的。他们在分析光滑圆管进口段时将进口段分为两个区，如图12所示。

从图上看，第四种定义方法物理上更直观，似乎更合理一些。实际上，(A)区长度就是用边界层厚度定义的进口段长度，(A)区加(B)区又和第二种定义方法类似。(B)区长度定义者并没有给出确定标准。若是按速度剖面达到完全发展流动的速度剖面确定，(B)区将是很长，而在(B)区很长时，其附加压力降系数 K 的变化是不大的。这样求出的进口段长度意义是不大的。因此，按照前三种定义方法求出的进口段长度和表8所示。

除了上面提到的四种定义方法之外，本文提出了另外一种进口段长度计算方法。这种方法与McComas^[13]方法所不同的是在管道核心区，粘性项是不能忽略的。如果忽略了

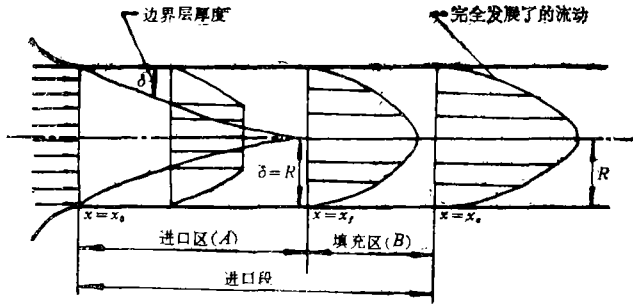


图 12

表 8

定义方法	进口段长度 $\frac{x_e}{DRe}$	
	$2\alpha=45.1^\circ$	$2\alpha=60^\circ$
按(3.34)式计算	0.041081	0.039752
按最大速度的98%计算	0.093221	0.077358
按第三种方法计算	0.085721	0.069858
按本文推出的公式计算	$0.041081+15.319/Re^2$	$0.039752+8.768/Re^2$

$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ，那么进口段的速度由进口处的近似均匀分布变到完全发展了的最大速度就无法解

释。如果在核心区，假定 $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \gg \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$ ，则在核心区，运动方程可简化为

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \tag{3.34}$$

对(3.34)式从进口 $x=0$ 到 $x=x_e$ 积分，得

$$\frac{1}{2} (u_0^2 - u_m^2) = -\frac{1}{\rho} (p - p_0) + \nu \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=x_e} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) \tag{3.35}$$

当 $x=x_e$ 时，速度 u_0 已出现稳定值，所以有 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_e} = 0$ ，因此，将(3.35)式两端同除以

$\frac{1}{2} u_m^2$ ，整理得

$$\frac{p_0 - p}{\frac{1}{2} \rho u_m^2} = \left(\frac{u_0}{u_m} \right)^2 - 1 + \frac{2\nu}{u_m^2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} \tag{3.36}$$

利用(2.31)式与(3.36)式两端相等，得

$$\frac{x_e}{DRe} = \frac{\left(\frac{u_0}{u_m} \right)^2 - 1 - K}{4fRe} + \frac{1}{2fRe} \frac{1}{R_e^2} \frac{\partial \left(\frac{u_0}{u_m} \right)}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} \tag{3.37}$$

式中 $\bar{x} = \frac{x}{DRe}$ 。(3.37)式就是本文推出的适用于任何断面管道的进口段长度计算式。用此

计算式求出的两种顶角 ($2\alpha=45.1^\circ$ 和 60°) 的进口段长度也列在表8中。

四、结 论

从对等腰三角形管道完全发展段层流流动的理论分析看出, П. В. Канторович 变分方法是求解 Poisson 方程的一种很有效的方法。只要近似函数选得合适, 就可以获得精度很高的近似解。本文对等腰三角形管道完全发展段层流流动的理论分析经与实验结果比较表明, 本文的分析具有很高的精度。本文提出的等腰三角形管道层流进口段速度模型和进口段长度计算公式, 具有简单的函数形式, 非常适合于工程计管, 并且经与其他理论分析结果比较和作者实验验证, 证明本文的分析可靠的。本文提供的任意断面长直管道层流进口段附加压力降系数公式, 简单明了, 是被理论和实验证明了的一种行之有效的计算方法。

参 考 文 献

- [1] 朗道、栗弗席兹著, 《流体力学》, 上册(中文版), 高等教育出版社。
- [2] Sparrow, E. M., Laminar Flow in Isosceles Triangular ducts, *AIChE J.*, **8** (1962), 599—604.
- [3] Han, L. S., and A. L. Cooper, Approximate solutions of two internal flow problems—solutions by an integral method, *Proc. 4th U. S. National Congress Appl. Mech.*, ASME, **2**(1962), 1269—1273.
- [4] Lundgren, T. S., E.M. Sparrow and J.B. Sfarr, Pressure drop to the Entrance region in ducts of arbitrary cross section, *J. Basic Eng.*, Trans. ASME, Series D, **86**(1964), 620—626.
- [5] Miller, R. W. and L. S. Han, Pressure losses for laminar flow in the entrance region of ducts of rectangular and equilateral Triangular cross section, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, (1971), 1083—1087.
- [6] Fleming, D. P. and E. M. Sparrow, Flow in the hydrodynamic entrance region of ducts of arbitrary cross section, *J. Heat Transfer*, Trans. ASME, **91**(1969), 345—354.
- [7] Richard, C. C. and W. H. Richard, Transitional flow in isosceles Triangular ducts, *Ind. Chem. Fundm*, **11**(1972).
- [8] Carlson, L. W. and Jr. T. F. Irvine, Fully developed pressure drop in triangular shaped ducts, *J. Heat Transfer*, (1961), 441—444.
- [9] Mohanty, A. K. and S. B. L. Asthana, Laminar Flow in the entrance region of a smooth pipe, *J. Fluid Mech.*, **90**(1978), 433—446.
- [10] 钱伟长著, 《变分法及有限元》, 科学出版社。
- [11] Sparrow, E.M. and S.H. Lin, Flow development in the hydrodynamic entrance region of tubes and Ducts, *Phys. Fluids*, **7**(1964), 338—347.
- [12] Schiller, L., Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitverteilung unter ihre Bedingung für Zähigkeitmessungen, *ZAMM*, **2**(1922), 96.
- [13] McComas, S. T., Hydrodynamic entrance lengths for ducts of arbitrary cross section, *J. Basic Eng.*, Trans. ASME, Series D, **89**(1967), 847—850.

A Study on Flow Resistance in the Entrance Region of Isosceles Triangular Ducts

Zhu Shi-xing

(Jiamusi Institute of Technology)

Wang Zhi-qing

(Harbin Institute of Technology)

Abstract

In this paper the variational solution of velocity profile for an incompressible laminar and fully developed flow in isosceles triangular ducts is derived by applying the kantovorich method. The theoretical and experimental results of pressure loss are also given. The velocity distribution model, additional pressure loss coefficient and calculating method of inlet length in the entrance region of isosceles triangular ducts are also derived, which are suitable for various kinds of vertex angles. The calculations and experiments are also performed for two models: the isosceles triangular ducts with vertex angles $2\alpha=45.1^\circ$ and $2\alpha=60^\circ$. By the comparisons made between the theoretical analysis in this paper and those of other authors, it can be seen that the present analytical result is of high accuracy and wide practicability, and agrees well with the author's experiment.

Key words laminar flow, entrance region, velocity distribution, pressure loss, entrance length