

厚件压缩滑移线场的参变量积分问题*

赵德文 张卫军

(沈阳 东北大学, 1993年5月10日收到)

摘 要

本文提出一种可使厚件压缩获得解析解的参变量积分方法. 对传统数值计算

$$\int \phi_i dy = \sum_{-1}^n \phi_i \cdot \Delta y$$

找到了 ϕ 与 y 的函数关系, 从而可用参量积分求得解析解. $l/h=0.121$ 的滑移线场算例表明参量积分结果与数值计算结果基本一致, 在理论上表明厚件压缩滑移线场求得解析解完全可能.

关键词 厚件 滑移线场 参量积分 解析解

一、引 言

厚件压缩问题滑移线场是 Hill^[1]最先研究的. 然而近年来的报道表明该场边界滑移线积分 $\int \phi dy$ 仍采用数值计算^[2-4]. 本文目的是探索该场边界滑移线的可积性, 建立 y 对 ϕ 的参数方程, 然后以参变量积分方法寻求解析解. 由于张角 θ 大于 45° 时, 其边界滑移线不再是标准摆线, 故参量积分将比有心扇形场^[5]及摆线场^[6,7]困难. 本文将以 $l/h=0.121$, $h=16.5$ 的厚件压缩场为例详述积分步骤.

二、传统解法简介

图1所示为厚件压缩水平对称轴上半部分的滑移线场^[2], 本文不再介绍滑移线场的作法, 承认惯用解法的全部基本假设. 对图1的滑移线场, 传统确定单位压力 p 的方法如下:

按 Hencky 应力方程沿 β 线 EC ,

$$p_E = p_C - 2k\theta \quad (2.1)$$

沿 α 线 EM 上任一点 i ,

$$p_i = p_E + 2k(\phi_E - \phi_i) \quad (2.2)$$

由图1, $\phi_E = 3\pi/4 - \theta$, 把此式及(2.1)式代入(2.2)式得

$$p_i = p_C + 2k(3\pi/4 - 2\theta - \phi_i) \quad (2.3)$$

* 钱伟长推荐.

1990年4月25日第一次收到.

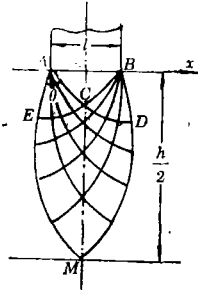


图1 平钻压厚件($b/h < 1$) 转移线场

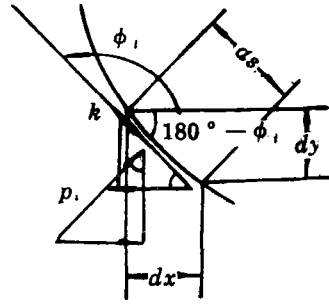


图2 线素 ds 上的应力

沿 AEM 上线素 ds 受力如图2, 其上静水压力为 p_i , 切应力为 k , 线素所受水平方向合力为:

$$dp_H = p_i dy - k dx$$

将(2.3)代入上式, 积分后令 AEM 上水平总力为零(两端无任何水平外力作用)得:

$$p_H = \int_0^{h/2} \left[p_0 + 2k \left(\frac{3}{4}\pi - 2\theta - \phi_i \right) \right] dy$$

$$- \int_0^{l/2} k dx = 0$$

积分后得

$$p_0 = k \left(4\theta + \frac{l}{h} - 1.5\pi \right) + \frac{4k}{h} \int_0^{h/2} \phi_i dy \tag{2.4}$$

目前, 传统解法对(2.4)式中最后一项的积分问题尚未解决, 只能按下式进行数值计算:

$$p_0 = k \left(4\theta + \frac{l}{h} - 1.5\pi \right) + \frac{4k}{h} \sum_{i=1}^n \phi_i \cdot \Delta y_i \tag{2.5}$$

按(2.5)求得 p_0 后, 则 AB 面上平均单位压力为:

$$\bar{p} = p_0 + k; \quad n_\sigma = \bar{p}/2k = p_0/2k + 0.5 \tag{2.6}$$

上述各式中, p_0 为图1中 C 点的静水压力; θ 为转移线场的张角; l 为锤头宽度; h 为工件厚度; 上述场满足 $l/h < 1$.

当 $l/h = 0.121$, $h = 16.5$, 按 $\Delta\phi = 5^\circ$ 所作转移线场如图3. 其中张角 $\theta = 75^\circ = 1.31\text{rad}$. 表1为对应计算数据^[2]. 按(2.5)及表1的数值

计算结果 $\sum_{i=1}^n \phi_i \Delta y_i = 14.07$, 将其代入(2.5)得

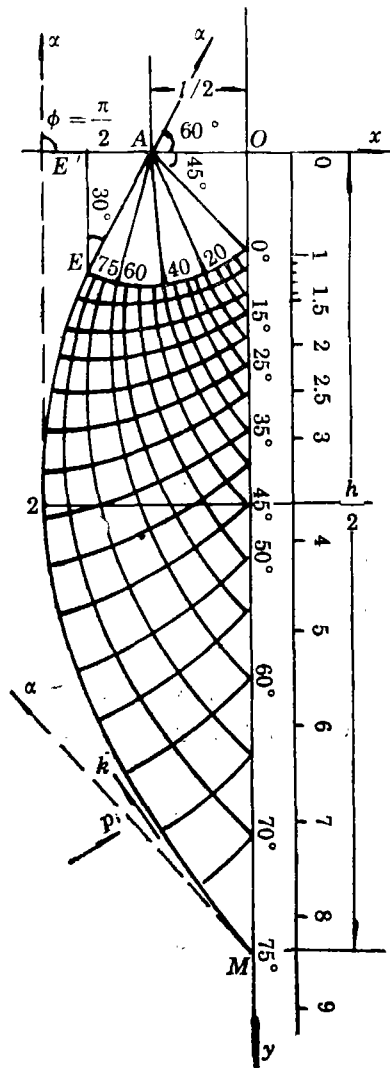


图3 $l/h = 0.121, \Delta\phi = 5^\circ$ 转移线场 ($\theta = 75^\circ$)

表1 文献[2]所取的数值计算数据 $\Sigma \phi_i \Delta y = 14.07$

Δy	1.28	0.58	0.72	0.81	0.98	1.15	1.20	1.25	0.6
ϕ_i (rad)	1.05	1.13	1.31	1.48	1.66	1.83	2.00	2.18	2.31
ϕ_i (°)	(60)	(65)	(75)	(85)	(95)	(105)	(115)	(125)	(132.5)
$\phi_i \Delta y$	1.31	0.655	0.945	1.20	1.63	1.92	2.40	2.72	1.39

$$p_0 = k(4 \times 1.31 + 0.121 - 1.5 \times 3.14) + \frac{4k}{16.5} \times 14.07 = 4.07k \quad (2.7)$$

将(2.7)代入(2.6)

$$n_\sigma = \bar{p}/2k = 4.07k/2k + 0.5 = 2.54 \quad (2.8)$$

(2.7)与(2.8)即用数值计算方法计算积分 $\int \phi_i \Delta y$ 得到的数值解。详细计算步骤见文献[2]，相同计算方法见文献[3~4]。

作者认为，对图3或各种类似厚件压缩滑移线场，如设法建立 y 对 ϕ 的参数方程，不仅可能设法以参量积分求得解析解，而且对深入理解所谓“特征线”的数学与物理特点很有补益。

三、边界滑移线的参数方程

在[5~7]中，作者已就有心扇形场，摆线场的边值积分问题提出相应的参量积分方法，然而图3所示的边界滑移线，当 $\theta > 45^\circ$ 时已不再是标准摆线方程，公式(2.4)中 y 与 ϕ 的关系不能再按摆线参数方程描述。Collins^[8] 近来的研究表明，滑移线曲率半径的变化可以级数形式表示，这给作者以启示，即能否用摆线与级数的组合函数来描述 $\theta > 45^\circ$ 的厚件压缩滑移线场的边界滑移线。对图3，边界滑移线 AEM 有

$$y = a \left\{ (2\phi - \sin 2\phi) + (\phi - \phi_E) + \frac{(\phi - \phi_E)^2}{2!} + \frac{(\phi - \phi_E)^3}{3!} + \dots \right\} \quad (3.1)$$

注意到图3中 $l/2 = 1$ 为锤头半宽， $\phi_E = \phi_A = \pi/3$ 。当 $\phi = \pi/3$ 时代入上式， $y_E = 1.22468$ ，于是 $a = 0.997$ ，则(3.1)式变为

$$y = 0.997 \left\{ (2\phi - \sin 2\phi) + \left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{(\phi - \pi/3)^2}{2!} + \frac{(\phi - \pi/3)^3}{3!} + \dots \right\} \quad (3.1)'$$

显然，(3.1)'式是含有幂级数与摆线的组合函数的参数方程。鉴于参数 ϕ 有无穷多项，为此必须进一步简化，由高等数学^[9]

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

知

$$\left(\phi - \frac{\pi}{3} \right) + \frac{(\phi - \pi/3)^2}{2!} + \frac{(\phi - \pi/3)^3}{3!} + \dots = e^{(\phi - \pi/3)} - 1 \quad (3.2)$$

将(3.2)代入(3.1)'则得到函数显式为

$$y = 0.997 \{ (2\phi - \sin 2\phi) + e^{(\phi - \pi/3)} - 1 \} \quad (3.3)$$

(3.3)式即为边界滑移线 AEM 的参数方程。对其它滑移线(3.3)式参数方程一般形式为：

$$y = a \{ (2\phi - \sin 2\phi) + \exp[\phi - \phi_E] - 1 \} + C \quad (3.4)$$

下面我们检验参数方程(3.3)的可靠程度。对图3将 $\phi = \phi_E = \pi/3$ 代入(3.3)得 E 点 y 值为

$$y_E = 0.997[2\pi/3 - \sin(2\pi/3)] = 1.22468 \quad (a)$$

将 $\phi = \pi/2$ 代入(3.3)式得2点 y 值(见图3)为

$$\begin{aligned} y_2 &= 0.997 \times \{(2 \times \pi/2 - \sin\pi) + \exp[\pi/2 - \pi/3] - 1\} \\ &= 0.997 \times \{3.14 + 0 + 1.688 - 1\} = 3.81 \end{aligned} \quad (b)$$

将 $\phi = \phi_M = 3\pi/4$ 代入(3.3)式可确定 M 点 y 值为

$$\begin{aligned} y_M &= 0.997 \left\{ \left(2 \times \frac{3}{4}\pi - \sin \frac{3\pi}{2} \right) + \exp[3\pi/4 - \pi/3] - 1 \right\} \\ &= 0.997 \times \{4.71 + 1 + 3.70 - 1\} = 8.38 \end{aligned} \quad (c)$$

将(a)、(b)、(c)三点的 y 值与图3比较,可以看出与图3边界滑移线 $E, 2, M$ 三个点的 y 值基本一致.应当指出,由于滑移线网作图时使用的角距 $\Delta\phi$ 不同,不同研究者所作图形精度均有一定偏差^[2,4],只有角距 $\Delta\phi$ 无穷小时,才能接近理论精确值;但是因在 AEM 线上 ϕ 由 E 点开始是连续变化的(AE 段为直线滑移线,其曲率半径不变,故 ϕ 角为常数,仅 EM 段按摆线与幂级数组合函数变化),故进行参量积分时仅取决于 ϕ 的积分边界 ϕ_E 与 ϕ_M ,中间阶段 ϕ 与 y 的对应关系因作图引起的偏差对积分结果影响不大.

在此应顺便指出参数方程(3.3)对数值计算的检验作用.例如将(a)与表1数值计算比较(表1数据取自文献[2])可知,当 $\phi_i = 60^\circ = \pi/3$ 时,取 $\Delta y = 1.28$ 是不确切的.由图3知此时 $\Delta y = E'E = AE \sin 60^\circ = \sqrt{2} \sin 60^\circ = 1.2247$,仅此一项产生误差为4.5%.再如按变形条件, $l/h = 0.12^1$, $h = 16.5$,则工件半厚度在理论上正确值为 $y_M = OM = h/2 = 16.5/2 = 8.25$.然而按文献[2]的数值计算表1则

$$\begin{aligned} \frac{h}{2} &= \sum_{i=1}^9 \Delta y_i = 1.28 + 0.58 + 0.72 + 0.81 + 0.98 + 1.15 \\ &\quad + 1.20 + 1.25 + 0.6 = 8.57 \\ \Delta &= \frac{8.57 - 8.25}{8.57} = 3.7\% \end{aligned} \quad (d)$$

可见数值计算的累积误差与理论值比较不能低估.但是,由于滑移线场绘制方法与所取角距 $\Delta\phi$ 的不同以及实验方面的困难,对作图精度过分苛求是没有意义的.

四、参变量 ϕ 积分方法

由(3.3)式两侧微分

$$dy = 0.997 \{ 2d\phi - 2\cos 2\phi d\phi + e^{(\phi - \pi/3)} d\phi \} \quad (4.1)$$

将(4.1)式代入(2.4),注意到 $y = y_E$, $\phi_E = \pi/3$; $y = y_M = h/2$, $\phi_M = 3\pi/4$; 则

$$p\sigma = k \left(4\theta + \frac{l}{h} - 1.5\pi \right) + \frac{4k}{h} \left\{ \int_0^{y_E} \phi dy + \int_{y_E}^{h/2} \phi dy \right\} \quad (4.2)$$

上式第一项积分,因 AE 段 $\phi = \phi_A = \phi_E = \pi/3$,故

$$\int_0^{y_E} \phi dy = \int_0^{y_E} \phi_A dy = \int_0^{y_E} \frac{\pi}{3} dy = \frac{\pi}{3} y_E = \frac{\pi}{3} \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{3} = 1.283 \quad (e)$$

第二项积分^[9], $y = y_E$, $\phi = \phi_E = \pi/3$; $y = h/2$, $\phi = \phi_M = 3\pi/4$, 则

$$\int_{y_E}^{h/2} \phi dy = \int_{\pi/3}^{3\pi/4} 0.997 \phi \{ 2d\phi - 2\cos 2\phi d\phi + e^{(\phi - \pi/3)} d\phi \}$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.997 \left\{ 2 \frac{\phi^2}{2} \Big|_{\pi/3}^{5\pi/4} - 2 \left[\frac{1}{4} \cos 2\phi + \frac{\phi}{2} \sin 2\phi \right] \Big|_{\pi/3}^{5\pi/4} + \int_0^{5\pi/12} \left(\frac{\pi}{3} + u \right) e^u du \right\} \\
 &= 0.997 \left\{ \left(\frac{9}{16} \pi^2 - \frac{\pi^2}{9} \right) - \left(-\frac{3}{4} \pi + \frac{1}{2} \right) - 0.907 \right\} \\
 &\quad + \frac{\pi}{3} e^u \Big|_0^{5\pi/12} + e^u (u-1) \Big|_0^{5\pi/12} \Big\} \\
 &= 0.997 \left\{ (5.552 - 1.0966) + 3.0132 + \left(\frac{\pi}{3} \times 3.7025 - \frac{\pi}{3} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 3.702 \left(\frac{5}{12} \pi - 1 \right) + 1 \right\} \\
 &= 0.997 \{ 7.17 + 2.83 + 2.144 \} = 12.44 \tag{f}
 \end{aligned}$$

将(c)、(f)代入(4.2)并注意 $\theta = 75^\circ = 1.31 \text{ rad}$, $l/h = 0.121$, 则(1.2)式的解析解为:

$$pc = k(4 \times 1.31 + 0.121 - 1.5 \times 3.14) + \frac{4k}{16.5} \times \{ 1.283 + 12.44 \} = 3.98k \tag{g}$$

将(g)代入(2.6),

$$n_\sigma = \frac{3.98k}{2k} + 0.5 = 2.49 \tag{4.3}$$

(4.3)即参量积分的解析结果。将(4.3)与(2.8)的数值结果比较, 二者相对误差为

$$\Delta = \frac{2.54 - 2.49}{2.54} = 1.9\% \tag{4.4}$$

可见解析解与数值计算结果基本一致。其中积分项对应结果

$$\int_0^{h/2} \phi dy = \int_0^{y_E} \phi dy + \int_{y_E}^{h/2} \phi dy = 1.283 + 12.44 = 13.723$$

对应的数值计算结果

$$\sum_{i=1}^9 \phi_i \cdot \Delta y_i = 14.07$$

二者相对误差为

$$\Delta = \frac{14.07 - 13.723}{14.07} = 2.4\% \tag{4.5}$$

前已指出 $\sum_{i=1}^9 \Delta y_i = 8.57$ 已较变形条件 $h/2 = 8.25$ 偏差约 3.7%, 故在此不再分析(4.5)式的误差原因。

五、结 论

1. 对非标准摆线滑移线场其参数方程为摆线与幂级数的组合函数, 当曲率半径按幂级数变化时, y 与 ϕ 的关系可按(3.4)式描述。
2. $l/h = 0.121$, $h = 16.5$, 张角 $\theta = 75^\circ$ 的滑移线场边界滑移线 y 与 ϕ 的关系满足(3.3)式。
3. 可以对非标准摆线滑移线场进行参变量积分求得解析解。 $l/h = 0.121$ 的厚件压缩算例表明, 解析解与数值结果基本一致。

参 考 文 献

- [1] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford (1950), 35—36, 128—160, 166—168, 254—257.
- [2] 赵志业, 《金属塑料加工学》, 冶金工业出版社 (1987), 176—181.
- [3] William, F. H. and M. C. Robert, *Metal Forming Mechanics and Metallurgy*, Frenlice-Hall Inc. (1983), 187—190.
- [4] 臼井英治著, 《金属加工力学》, 廉元国译, 国防工业出版社 (1984), 210.
- [5] 赵德文、张强, 平面变形正向挤压, 反向挤压参变量积分解法, 应用数学和力学, 9(4) (1988), 379—384.
- [6] 赵德文, 压缩薄件死区边界滑移线函数的可积性, 东北工学院学报, (3) (1986), 118—123.
- [7] Zhao De-wen and Zhang Qiang, An integration depending on parameter ϕ for analytical solution of the compression of thin workpiece, *Chin. J. Met. Sci. Technol.*, 6(2) (1990), 132—139.
- [8] Collins, I. F., Slipline field analysis of forming processes in plane strain and axial symmetry, *Advanced Technology of Plasticity*, 11 (1984), 1074—1084.
- [9] 数学手册编写组, 《数学手册》, 人民教育出版社, 北京 (1979), 228, 272—273.

The Problem of Parametric Integration to the Slip Line Field in the Compression of Thick Workpiece

Zhao De-wen Zhang Wei-jun

(Northeast University, Shengyang)

Abstract

An integration depending on a parameter to the compression of a thick work-piece has been obtained. For the conventional prevailing numerical formula $\int \phi_i dy = \Sigma \phi_i \cdot \Delta y$, a definite functional relationship between ϕ and y is found. Therefore a parametric integration can be used to get an analytical solution. Take the slip line field for $l/h=0.121$ as an example, the analytical solution is basically the same as the prevailing numerical one. It is justified theoretically that for the slip line field a parametric intergration is perfectly possible for a satisfactory analytical solution.

Key words thick workpiece, slip line field, parametric itegration, analytical solution