应用数学和力学，第14卷第10期（1993年10月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

多参数多状态变量离散型有势非线性稳定问题的活化方法*

邓长根

（上海 同济大学，1992年9月9日收到）

摘　要

本文针对多参数变量和多状态变量的离散型有势系统的非线性稳定问题，提出了活化方法，导出了活化势函数和活化平衡方程。活化方法是弹性稳定理论中Liapunov-Schmidt方法的改进和提高，它比通常的摄动方法更加一般化、规范化。活化势函数可变换成标准突变势函数，活化平衡方程可作为分岔方程。本文的研究将促进弹性稳定理论与突变理论和分岔理论的结合。

关键词　多参数变量　多状态变量　离散型　有势　非线性稳定　活化方法　渐近分析

一、引　　言

原来由势泛函或微分方程（组）所描述的连续型有势非线性稳定问题，通过里兹法、伽辽金法、最小二乘法、有限元法等离散化，转化为由势函数或代数平衡方程组所描述的离散型有势非线性稳定问题，其中势函数$D=D(u_J,\ \lambda_p)$是状态变量$u_J(J=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$和参数变量$\lambda_p(p=1,\ 2,\ \cdots,\ L)$的非线性函数，由势函数驻值条件导出的代数平衡方程组$D_I(u_J,\ \lambda_p)=\partial D/\partial u_I=0(I=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$是关于状态变量$u_J$和参数变量$\lambda_p$的非线性代数方程组．这里参数变量是指荷载参数、初始缺陷参数等已知参数；状态变量是指描述结构变形状态的待求响应，如里兹法、伽辽金法、最小二乘法中的待定系数，或有限元法中的节点位移．参数变量作为结构的外部输入参数，状态变量作为结构的内部输出响应．

实际求解离散型有势非线性稳定问题时，为了达到一定精度，状态变量数一般是多个，远不止一二个．如果需考虑非比例加载，则荷载参数有多个；如果需考虑初始缺陷的影响，则初始缺陷参数可能有很多个．总之，我们通常需分析多参数变量和多状态变量的离散型有势非线性稳定问题．

弹性稳定理论[1,2]、突变理论[3]和分岔理论[4]都可用于非线性稳定分析，但目前还不能直接用于多参数变量和多状态变量的情形．

弹性稳定理论中，处理多状态变量时，将状态变量分为活坐标和逆坐标，按照Liapunov-Schmidt方法消去逆坐标；处理多参数变量时，归并同类参数，在参数空间中选定某一方向．这些方法和结果值得借鉴，但不足以直接用于一般多参数变量和多状态变量的离散型有

* 徐次达推荐．

国家自然科学基金与建设部联合资助项目．

势非线性稳定分析，因为弹性稳定理论还有以下不足之处[1,2]：

（1） 仅适用于由能量函数描述的非线性稳定问题；

（2） 平衡点处能量函数对荷载参数的高阶导数为零的假设 $D_i''=D_i'''=D_{ij}''=D_{ij}'''=\cdots=0$ 限制了应用范围；

（3） 没有给出逆坐标对活坐标和参数变量的显式导数公式，无法得到逆坐标的渐近式；

（4） 没有给出消去逆坐标后的新能量函数对活坐标和参数变量的高阶导数公式；

（5） 合并同类参数和选定参数空间中某一方向没有简单的、确切的描述．

突变理论中，根据标准势函数划分突变类型。标准势函数是活化状态变量的非线性函数，是控制参数的线性函数．其中活化状态变量个数M一般为$M=1$或$M=2$；控制参数由突变类型确定，其个数H也是有限的$H\leqslant 8$．如何将多参数变量和多状态变量势函数变换成标准势函数，以便确定突变类型，引用其研究结论，有待探讨。

分岔理论中，研究的是少数几个分岔方程的解图和分岔点．如何由许多个代数平衡方程导出少数几个分岔方程，尚需研究。

本文提出的活化方法克服了弹性稳定理论的上述不足之处。活化方法是 Liapunov-Schmidt 方法的改进和提高，主要体现在以下几方面：

（1） 定义了混合坐标，简化公式推导；

（2） 根据求导次序的可交换性，引入了组合项求和符号，使导数公式更简洁，使得推导高阶导数成为可能；

（3） 引入了综合参数变量，它们是参数变量的泰勒级数和．用综合参数变量描述、处理参数变量更简洁、更确切、更统一；

（4） 在势函数和代数平衡方程组中消去逆坐标，分别得到活化势函数和活化平衡方程．

突变理论和分岔理论用于多参数变量和多状态变量的离散型有势非线性稳定分析时出现的上述两个问题，得到如下答案．首先，通过一定的坐标变换，可将活化势函数化成标准突变势函数，从而确定突变类型．其次，可将活化平衡方程作为分岔方程，应用分岔理论求解，确定分岔点类型．因此有理由说，本文的研究将促进弹性稳定理论与突变理论和分岔理论的结合．

二、离散型有势非线性稳定问题的描述

本文研究由如下对角化势函数所描述的离散型有势非线性稳定问题

$$D=D(u_J,\ \lambda_p) \tag{2.1}$$

其中，$u_J(J=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$为对角化状态变量，$\lambda_p(p=1,\ 2,\ \cdots,\ L)$为参数变量．

所谓对角化，本文是指由势函数D导出的代数平衡方程组的切线刚度矩阵是对角矩阵，即 $D_{IJ}=\partial^2 D/\partial u_I\partial u_J=0\,(I\neq J)$。关于对角化分析与非对角化分析之间的相互关系以及两者之间状态变量、势函数导数等的转换关系，参见文献[5]．

由对角化势函数的驻值条件导出代数平衡方程组

$$D_I=D_I(u_J,\ \lambda_p)=\partial D/\partial u_I=0 \qquad (I=1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{2.2}$$

文献[5]已论证，势能函数和方差函数是满足本文要求的势函数；由里兹法、伽辽金法、

最小二乘法、基于虚位移原理的有限元法导出的代数平衡方程组符合(2.2)．因此，本文的研究适用于由这些方法导出的代数平衡方程组所描述的离散型有势非线性稳定问题．

临界点或分岔点C处，$u_J=0$，$\lambda_p=0$，代数平衡方程组切线刚度矩阵奇异，即$\det[D_{IJ}]=0$．由对角化条件$D_{IJ}=0(I\neq J)$可得$\det[D_{IJ}]=D_{11}D_{22}\cdots D_{NN}$．当$D_{ii}=0(i=1,2,\cdots,M)$，$D_{\alpha\alpha}>0(\alpha=M+1,\ M+2,\ \cdots,\ N)$，$M\leqslant N$时，称$C$为$M$重临界点，$u_i$为活坐标，$u_\alpha$为逆坐标．

坐标或变量下标规定如下．用英文小写字母i，j，k，l，m，n，h作为活坐标的下标，下标变化范围为1至M；希腊小写字母α，β，γ，θ，ω作为逆坐标的下标，下标变化范围为$M+1$至N；英文大写字母I，J作为活坐标($I=i$，$J=j$)或逆坐标($I=\alpha$，$J=\beta$)的下标；英文小写字母p，q，s，t作为参数变量的下标，下标变化范围为1至L；英文小写字母a，b，c，d，e，f，g作为以下将定义的混合坐标的下标，下标变化范围为1至$M+L$．

为了叙述方便，按以下规则表示D的各阶偏导数：D的下标i，j，k，l，m，n，h表示D对相应下标活坐标的偏导数；D的下标α，β，γ，θ，ω表示D对相应下标逆坐标的偏导数；在不致混淆的情况下，D的下标p，q，s，t表示D对相应下标参数变量的偏导数．例如：

$$D_i=\frac{\partial D}{\partial u_i},\ D_{ij}=\frac{\partial^2 D}{\partial u_i\partial u_j},\ D_{ip}=\frac{\partial^2 D}{\partial u_i\partial\lambda_p},\ D_{pq}=\frac{\partial^2 D}{\partial\lambda_p\partial\lambda_q},\ \cdots \tag{2.3}$$

按以下规则表示逆坐标u_α的各阶偏导数：u_α逗号后的下标i，j，k，l，m，n，h表示u_α对相应下标活坐标的偏导数；在不致混淆的情况下，u_α逗号后的下标p，q，s，t表示u_α对相应下标参数变量的偏导数；u_α逗号后的下标a，b，c，d，e，f，g表示u_α对相应下标混合坐标的偏导数．例如：

$$u_{\alpha,i}=\frac{\partial u_\alpha}{\partial u_i},\ u_{\alpha,p}=\frac{\partial u_\alpha}{\partial\lambda_p},\ u_{\alpha,ij}=\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial u_i\partial u_j},\ u_{\alpha,ip}=\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial u_i\partial\lambda_p},\ u_{\alpha,pq}=\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial\lambda_p\partial\lambda_q},\ \cdots \tag{2.4}$$

由对角化和M重临界点条件可知：$D_{ij}=0$，$D_{\alpha i}=0$，$D_{\alpha\beta}=0(\alpha\neq\beta)$，$D_{\alpha\alpha}>0$．以下公式推导过程中，将反复利用这些已知条件，不再作特别说明．

三、逆坐标渐近式

消去逆坐标，将逆坐标u_α表示成活坐标u_i和参数变量λ_p的函数：

$$u_\alpha=u_\alpha(u_i,\ \lambda_p)=u_\alpha(v_a) \tag{3.1}$$

其中，v_a为混合坐标，定义如下

$$v_a=u_i\qquad(a=i=1,\ 2,\ \cdots,\ M);\ v_a=\lambda_p\qquad(a=M+p;\ p=1,\ 2,\ \cdots,\ L) \tag{3.2}$$

引入混合坐标，可简化公式推导，使公式表达更简洁．

u_α在临界点C处的泰勒展开式为

$$u_\alpha=u_{\alpha,a}v_a+\frac{1}{2!}u_{\alpha,ab}v_av_b+\frac{1}{3!}u_{\alpha,abc}v_av_bv_c+\frac{1}{4!}u_{\alpha,abcd}v_av_bv_cv_d+\text{h.o.t.} \tag{3.3}$$

式中，h.o.t. 表示高阶项；等式左边不出现的重复下标需在下标变化范围内求和（以下同），例如，等式(3.3)右边第一项$u_{\alpha,a}v_a=\sum\limits_{a=1}^{M+L}u_{\alpha,a}v_a$；对等式左边出现的重复下标不求和（以下同），例如，等式$u_{\alpha,\alpha}=-D_{\alpha\alpha}/D_{\alpha\alpha}$中，等式左边出现重复下标$\alpha$，故对$\alpha$不求和．

将$u_\beta=u_\beta(v_i,\ \lambda_p)=u_\beta(v_a)$代入平衡方程$D_\alpha=0$，得到关于混合坐标$v_a$的平衡恒等式

$$D_\alpha[u_i,\ u_\beta(u_i,\ \lambda_p),\ \lambda_p]\equiv D_\alpha[v_a,\ u_\beta(v_a)]\equiv 0 \tag{3.4}$$

式(3.4)对v_a，v_b，…求偏导数，分别得到各阶平衡方程，由此导出临界点C处u_α的各阶偏导数。例如，利用已知条件$D_{\alpha\beta}=0(\alpha\neq\beta)$和$D_{\alpha\alpha}>0$，由一阶平衡方程

$$\partial D_\alpha/\partial v_a=D_{\alpha a}+D_{\alpha\beta}u_{\beta,a}=0$$

求得$u_{\alpha,a}=-D_{\alpha a}/D_{\alpha\alpha}$；由二阶平衡方程

$$\partial^2 D_\alpha/\partial v_a\partial v_b=D_{\alpha ab}+D_{\alpha a\beta}u_{\beta,b}+D_{\alpha\beta b}u_{\beta,a}+D_{\alpha\beta\gamma}u_{\beta,a}u_{\gamma,b}+D_{\alpha\beta}u_{\beta,ab}=0$$

求出$u_{\alpha,ab}$。如此进行，可逐一导出u_α的各阶偏导数，其中前四阶偏导数如下：

$$u_{\alpha,a}=-D_{\alpha a}/D_{\alpha\alpha} \tag{3.5}$$

$$u_{\alpha,ab}=-[D_{\alpha ab}+C_{a,b}(D_{\alpha\beta a}u_{\beta,b})+D_{\alpha\beta\gamma}u_{\beta,a}u_{\gamma,b}]/D_{\alpha\alpha} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}u_{\alpha,abc}=&-[D_{\alpha abc}+C_{ab,c}(D_{\alpha\beta ab}u_{\beta,c})+C_{a,b,c}(D_{\alpha\beta\gamma a}u_{\beta,b}u_{\gamma,c})/2!\\&+D_{\alpha\beta\gamma\theta}u_{\beta,a}u_{\gamma,b}u_{\theta,c}+C_{a,bc}(D_{\alpha\beta a}u_{\beta,bc})\\&+C_{a,bc}(D_{\alpha\beta\gamma}u_{\beta,a}u_{\gamma,bc})]/D_{\alpha\alpha}\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}u_{\alpha,abcd}=&-[D_{\alpha abcd}+C_{abc,d}(D_{\alpha\beta abc}u_{\beta,d})+C_{ab,c,d}(D_{\alpha\beta\gamma ab}u_{\beta,c}u_{\gamma,d})/2!\\&+C_{a,b,c,d}(D_{\alpha\beta\gamma\theta a}u_{\beta,b}u_{\gamma,c}u_{\theta,d})/3!+D_{\alpha\beta\gamma\theta\omega}u_{\beta,a}u_{\gamma,b}u_{\theta,c}u_{\omega,d}\\&+C_{ab,cd}(D_{\alpha\beta ab}u_{\beta,cd})+C_{a,b,cd}(D_{\alpha\beta\gamma a}u_{\beta,b}u_{\gamma,cd})\\&+C_{a,b,cd}(D_{\alpha\beta\gamma\theta}u_{\beta,a}u_{\gamma,b}u_{\theta,cd})/2!+C_{a,bcd}(D_{\alpha\beta a}u_{\beta,bcd})\\&+C_{a,bcd}(D_{\alpha\beta\gamma}u_{\beta,a}u_{\gamma,bcd})+C_{ab,cd}(D_{\alpha\beta\gamma}u_{\beta,ab}u_{\gamma,cd})/2!]/D_{\alpha\alpha}\end{aligned} \tag{3.8}$$

以上各式中，符号$C_{\text{下标分组组合表}}$（组合项）为组合项求和符号，表示对“下标分组组合表”中的各种可能下标组合，求“组合项”之和，组合项数等于下标分组组合数。例如：

$$C_{ab,c}(D_{\alpha\beta ab}u_{\beta,c})=D_{\alpha\beta ab}u_{\beta,c}+D_{\alpha\beta bc}u_{\beta,a}+D_{\alpha\beta ca}u_{\beta,b} \tag{a}$$

$$C_{a,b,c}(D_{\alpha\beta\gamma a}u_{\beta,b}u_{\gamma,c})/2!=D_{\alpha\beta\gamma a}u_{\beta,b}u_{\gamma,c}+D_{\alpha\beta\gamma b}u_{\beta,c}u_{\gamma,a}+D_{\alpha\beta\gamma c}u_{\beta,a}u_{\gamma,b} \tag{b}$$

式(a)中$C_{ab,c}$组合项数为$C_3^2C_1^1=3$；式(b)中$C_{a,b,c}/2!$为$C_3^1C_2^1C_1^1/2!=3$。

这种组合项求和符号使求导次序的可交换性得到满足，例如：

$$C_{ab,c}(D_{\alpha\beta ab}u_{\beta,c})=C_{ba,c}(D_{\alpha\beta ba}u_{\beta,c})=C_{bc,a}(D_{\alpha\beta bc}u_{\beta,a})=\cdots$$

这种组合项求和符合使导数公式表达更简洁，使得推导u_α和以下将定义的B的高阶导数成为可能。

将(3.5)代入(3.6)，可得(3.9)；将(3.5)、(3.9)代入(3.7)，可得(3.10)：

$$u_{\alpha,ab}=-D_{\alpha ab}/D_{\alpha\alpha}+C_{a,b}(D_{\alpha\beta a}D_{\beta b})/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta})-D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta a}D_{\gamma b}/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma}) \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}u_{\alpha,abc}=&-D_{\alpha abc}/D_{\alpha\alpha}+[C_{ab,c}(D_{\alpha\beta ab}D_{\beta c})+C_{a,bc}(D_{\alpha\beta a}D_{\beta bc})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta})\\&-[C_{a,b,c}(D_{\alpha\beta\gamma a}D_{\beta b}D_{\gamma c})/2!+C_{a,b,c}(D_{\alpha\beta a}D_{\beta\gamma b}D_{\gamma c})\\&+C_{a,bc}(D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta a}D_{\gamma bc})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma})+[D_{\alpha\beta\gamma\theta}D_{\beta a}D_{\gamma b}D_{\theta c}\\&+C_{a,b,c}(D_{\alpha\beta a}D_{\beta\gamma\theta}D_{\gamma b}D_{\theta c})/2!+C_{a,b,c}(D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta a}D_{\gamma\theta b}D_{\theta c})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma}D_{\theta\theta})\\&-C_{a,b,c}(D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta a}D_{\gamma\theta\omega}D_{\theta b}D_{\omega c})/(2!D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma}D_{\theta\theta}D_{\omega\omega})\end{aligned} \tag{3.10}$$

利用已知条件$D_{\alpha i}=0$，u_α对活坐标的偏导数可简化如下：

$$u_{\alpha,i}=0 \tag{3.11}$$

$$u_{\alpha,ij}=-D_{\alpha ij}/D_{\alpha\alpha} \tag{3.12}$$

$$u_{\alpha,ijk}=-D_{\alpha ijk}/D_{\alpha\alpha}+C_{i,jk}(D_{\alpha\beta i}D_{\beta jk})/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}) \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}u_{\alpha,ijkl}=&-D_{\alpha ijkl}/D_{\alpha\alpha}+[C_{ij,kl}(D_{\alpha\beta ij}D_{\beta kl})+C_{i,jkl}(D_{\alpha\beta i}D_{\beta jkl})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta})\\&-[C_{ij,kl}(D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta ij}D_{\gamma kl})/2!+C_{i,j,kl}(D_{\alpha\beta i}D_{\beta\gamma j}D_{\gamma kl})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma})\end{aligned} \tag{3.14}$$

u_α对活坐标及参数变量的偏导数可简化如下：

$$u_{\alpha,ip}=-D_{\alpha ip}/D_{\alpha\alpha}+D_{\alpha\beta i}D_{\beta p}/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}) \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}u_{\alpha,ijp}=&-D_{\alpha ijp}/D_{\alpha\alpha}+[D_{\alpha\beta ij}D_{\beta p}+C_{i,j}(D_{\alpha\beta i}D_{\beta jp})+D_{\alpha\beta p}D_{\beta ij}]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta})\\&-[C_{i,j}(D_{\alpha\beta i}D_{\beta\gamma j}D_{\gamma p})+D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta p}D_{\gamma ij}]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma})\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}u_{\alpha,ipq}=&-D_{\alpha ipq}/D_{\alpha\alpha}+[C_{p,q}(D_{\alpha\beta ip}D_{\beta q})+C_{p,q}(D_{\alpha\beta p}D_{\beta iq})+D_{\alpha\beta i}D_{\beta pq}]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta})\\&-[D_{\alpha\beta\gamma i}D_{\beta p}D_{\gamma q}+C_{p,q}(D_{\alpha\beta i}D_{\beta\gamma p}D_{\gamma q})+C_{p,q}(D_{\alpha\beta p}D_{\beta\gamma i}D_{\gamma q})\\&+C_{p,q}(D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta p}D_{\gamma iq})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma})+[D_{\alpha\beta i}D_{\beta\gamma\theta}D_{\gamma p}D_{\theta p}\\&+C_{p,q}(D_{\alpha\beta\gamma}D_{\beta p}D_{\gamma\theta i}D_{\theta q})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma}D_{\theta\theta})\end{aligned} \tag{3.17}$$

u_α对参数变量的偏导数可以这样求得：分别将(3.5)、(3.9)、(3.10)中的下标a,b,c相应换成下标p，q，s后，分别得到$u_{\alpha,p}$，$u_{\alpha,pq}$，$u_{\alpha,pqs}$。

为了便于应用，利用定义(3.2)，可将(3.3)改写成如下逆坐标渐近式

$$u_\alpha(u_i,\ \lambda_p)=U_\alpha(\lambda_p)+U_{\alpha,i}(\lambda_p)u_i+\frac{1}{2!}U_{\alpha,ij}(\lambda_p)u_iu_j+\frac{1}{3!}u_{\alpha,ijk}u_iu_ju_k+\text{h.o.t.} \tag{3.18}$$

式中：

$$U_\alpha(\lambda_p)=u_{\alpha,p}\lambda_p+\frac{1}{2!}u_{\alpha,pq}\lambda_p\lambda_q+\frac{1}{3!}u_{\alpha,pqs}\lambda_p\lambda_q\lambda_s+\text{h.o.t.} \tag{3.19}$$

$$U_{\alpha,i}(\lambda_p)=u_{\alpha,i}+u_{\alpha,ip}\lambda_p+\frac{1}{2!}u_{\alpha,ipq}\lambda_p\lambda_q+\text{h.o.t.} \tag{3.20}$$

$$U_{\alpha,ij}(\lambda_p)=u_{\alpha,ij}+u_{\alpha,ijp}\lambda_p+\frac{1}{2!}u_{\alpha,ijpq}\lambda_p\lambda_q+\text{h.o.t.} \tag{3.21}$$

$$U_{\alpha,ijk}(\lambda_p)=u_{\alpha,ijk}+u_{\alpha,ijkp}\lambda_p+\text{h.o.t.} \tag{3.22}$$

四、活化势函数与突变类型

1. 活化势函数

将逆坐标u_α代入势函数D，得到关于混合坐标v_a的势函数B

$$B=B(v_a)\equiv D[v_a,\ u_\alpha(v_a)] \tag{4.1}$$

势函数B在临界点C处关于混合坐标v_a的泰勒展开式为

$$B=B_av_a+\frac{1}{2!}B_{ab}v_av_b+\frac{1}{3!}B_{abc}v_av_bv_c+\frac{1}{4!}B_{abcd}v_av_bv_cv_d+\text{h.o.t.} \tag{4.2}$$

式中B对混合坐标的各阶偏导数可由(4.1)导出如下：

$$B_a=D_a+D_\alpha u_{\alpha,a} \tag{4.3}$$

$$B_{ab}=D_{ab}+C_{a,b}(D_{a\alpha}u_{\alpha,b})+D_{\alpha\beta}u_{\alpha,a}u_{\beta,b}+D_\alpha u_{\alpha,ab} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}B_{abc}=&D_{abc}+C_{ab,c}(D_{ab\alpha}u_{\alpha,c})+C_{a,b,c}(D_{a\beta\alpha}u_{\alpha,b}u_{\beta,c})/2!\\&+D_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha,a}u_{\beta,b}u_{\gamma,c}+C_{a,bc}(D_{a\alpha}u_{\alpha,bc})\\&+C_{a,bc}(D_{\alpha\beta}u_{\alpha,a}u_{\beta,bc})+D_\alpha u_{\alpha,abc}\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}B_{abcd}=&D_{abcd}+C_{abc,d}(D_{abc\alpha}u_{\alpha,d})+C_{ab,c,d}(D_{\alpha\beta ab}u_{\alpha,c}u_{\beta,d})/2!\\&+C_{a,b,c,d}(D_{\alpha\beta\gamma a}u_{\alpha,b}u_{\beta,c}u_{\gamma,d})/3!+D_{\alpha\beta\gamma\theta}u_{\alpha,a}u_{\beta,b}u_{\gamma,c}u_{\theta,d}\\&+C_{ab,cd}(D_{ab\alpha}u_{\alpha,cd})+C_{a,b,cd}(D_{\alpha\beta a}u_{\alpha,b}u_{\beta,cd})\end{aligned}$$

$$+C_{a,b,cd}(D_{\alpha\beta\gamma}u_{\alpha,a}u_{\beta,b}u_{\gamma,cd})/2!+C_{a,bcd}(D_{\alpha\alpha}u_{\alpha,bcd})$$
$$+C_{a,bcd}(D_{\alpha\beta}u_{\alpha,a}u_{\beta,bcd})+C_{ab,cd}(D_{\alpha\beta}u_{\alpha,ab}u_{\beta,cd})/2!$$
$$+D_{\alpha}u_{\alpha,abcd} \tag{4.6}$$

以上各式中$D_{\alpha}=0$，$D_{\alpha\beta}=0(\alpha\neq\beta)$，$u_{\alpha}$的各阶导数由式(3.5)，(3.9)，(3.10)确定。

利用已知条件，B对活坐标的偏导数可简化如下：

$$B_i=D_i=0;\quad B_{ij}=D_{ij}=0;\quad B_{ijk}=D_{ijk} \tag{4.7, 4.8, 4.9}$$

$$B_{ijkl}=D_{ijkl}-C_{ij,kl}(D_{\alpha ij}D_{\alpha kl})/(2!D_{\alpha\alpha}) \tag{4.10}$$

$$B_{ijklm}=D_{ijklm}-C_{ij,klm}(D_{\alpha ij}D_{\alpha klm})/D_{\alpha\alpha}+C_{i,jk,lm}(D_{\alpha\beta i}D_{\alpha jk}D_{\beta lm})/(2!D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}) \tag{4.11}$$

$$B_{ijklmn}=D_{ijklmn}-[C_{ijkl,mn}(D_{\alpha ijkl}D_{\alpha mn})+C_{ijk,lmn}(D_{\alpha ijk}D_{\alpha lmn})/2!]/D_{\alpha\alpha}$$
$$+[C_{ij,kl,mn}(D_{\alpha\beta ij}D_{\alpha kl}D_{\beta mn})/2!+C_{i,jkl,mn}(D_{\alpha\beta i}D_{\alpha jkl}D_{\beta mn})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta})$$
$$-[C_{ij,kl,mn}(D_{\alpha\beta\gamma}D_{\alpha ij}D_{\beta kl}D_{\gamma mn})/3!$$
$$+C_{i,j,kl,mn}(D_{\alpha\beta i}D_{\alpha\gamma j}D_{\beta kl}D_{\gamma mn})/2!]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma}) \tag{4.12}$$

B对活坐标和参数变量的偏导数导出如下：

$$B_{ip}=D_{ip} \tag{4.13}$$

$$B_{ijp}=D_{ijp}-D_{\alpha ij}D_{\alpha p}/D_{\alpha\alpha} \tag{4.14}$$

$$B_{ipq}=D_{ipq}-C_{p,q}(D_{\alpha ip}D_{\alpha q})/D_{\alpha\alpha}+D_{\alpha\beta i}D_{\alpha p}D_{\beta q}/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}) \tag{4.15}$$

$$B_{ijkp}=D_{ijkp}-[D_{\alpha ijk}D_{\alpha p}+C_{ij,k}(D_{\alpha ij}D_{\alpha kp})]/D_{\alpha\alpha}$$
$$+C_{i,jk}(D_{\alpha\beta i}D_{\alpha jk}D_{\beta p})/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}) \tag{4.16}$$

$$B_{ijpq}=D_{ijpq}-[C_{p,q}(D_{\alpha ijp}D_{\alpha q})+D_{\alpha ij}D_{\alpha pq}+C_{p,q}(D_{\alpha ip}D_{\alpha jq})]/D_{\alpha\alpha}$$
$$+[D_{\alpha\beta ij}D_{\alpha p}D_{\beta q}+C_{p,q}(D_{\alpha\beta p}D_{\alpha ij}D_{\beta q}+D_{\alpha\beta i}D_{\alpha jp}D_{\beta q}$$
$$+D_{\alpha\beta j}D_{\alpha ip}D_{\beta q})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta})$$
$$-[D_{\alpha\beta\gamma}D_{\alpha ij}D_{\beta p}D_{\gamma q}+C_{p,q}(D_{\alpha\beta i}D_{\alpha\gamma j}D_{\beta p}D_{\gamma q})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma}) \tag{4.17}$$

$$B_{ipqs}=D_{ipqs}-[C_{p,qs}(D_{\alpha ip}D_{\alpha qs})+C_{pq,s}(D_{\alpha ipq}D_{\alpha s})]/D_{\alpha\alpha}$$
$$+[C_{p,q,s}(D_{\alpha\beta ip}D_{\alpha q}D_{\beta s})/2!+C_{pq,s}(D_{\alpha\beta i}D_{\alpha pq}D_{\beta s})$$
$$+C_{p,q,s}(D_{\alpha\beta p}D_{\alpha iq}D_{\beta s})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta})-[D_{\alpha\beta\gamma i}D_{\alpha p}D_{\beta q}D_{\gamma s}$$
$$+C_{p,q,s}(D_{\alpha\beta\gamma}D_{\alpha ip}D_{\beta q}D_{\gamma s})/2!+C_{p,q,s}(D_{\alpha\beta i}D_{\alpha\gamma p}D_{\beta q}D_{\gamma s})]/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma})$$
$$+C_{p,q,s}(D_{\alpha\beta\gamma}D_{\alpha\theta i}D_{\beta p}D_{\gamma q}D_{\theta s})/(2!D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma}D_{\theta\theta}) \tag{4.18}$$

为了便于应用，利用定义(3.2)，将(4.2)改写成

$$B=B_iu_i+\frac{1}{2!}B_{ij}u_iu_j+\frac{1}{3!}B_{ijk}u_iu_ju_k+\frac{1}{4!}B_{ijkl}u_iu_ju_ku_l$$
$$+\Lambda(\lambda_p)+\Lambda_i(\lambda_p)u_i+\frac{1}{2!}\Lambda_{ij}(\lambda_p)u_iu_j+\frac{1}{3!}\Lambda_{ijk}(\lambda_p)u_iu_ju_k$$
$$+\frac{1}{4!}\Lambda_{ijkl}(\lambda_p)u_iu_ju_ku_l+\mathrm{h.o.t.} \tag{4.19}$$

式中：

$$\Lambda(\lambda_p)=B_p\lambda_p+\frac{1}{2!}B_{pq}\lambda_p\lambda_q+\frac{1}{3!}B_{pqs}\lambda_p\lambda_q\lambda_s+\frac{1}{4!}B_{pqst}\lambda_p\lambda_q\lambda_s\lambda_t+\mathrm{h.o.t.} \tag{4.20}$$

$$\Lambda_i(\lambda_p)=B_{ip}\lambda_p+\frac{1}{2!}B_{ipq}\lambda_p\lambda_q+\frac{1}{3!}B_{ipqs}\lambda_p\lambda_q\lambda_s+\frac{1}{4!}B_{ipqst}\lambda_p\lambda_q\lambda_s\lambda_t+\mathrm{h.o.t.} \tag{4.21}$$

$$A_{ij}(\lambda_p)=B_{ijp}\lambda_p+\frac{1}{2!}B_{ijpq}\lambda_p\lambda_q+\frac{1}{3!}B_{ijpqs}\lambda_p\lambda_q\lambda_s+\text{h.o.t.} \tag{4.22}$$

$$A_{ijk}(\lambda_p)=B_{ijkp}\lambda_p+\frac{1}{2!}B_{ijkpq}\lambda_p\lambda_q+\text{h.o.t.} \tag{4.23}$$

$$A_{ijkl}(\lambda_p)=B_{ijklp}\lambda_p+\text{h.o.t.} \tag{4.24}$$

以上A_i，A_{ij}，A_{ijk}，A_{ijkl}，…为参数变量λ_p的综合量，可称为综合参数变量．不管参数变量个数L是多少，综合参数变量个数是固定的，即M个A_i，$M(M+1)/2!$个$A_{ij}=A_{ji}$，$M(M+1)(M+2)/3!$个$A_{ijk}=A_{ikj}=A_{jki}=A_{jik}=A_{kij}=_{kji}$．由参数变量可唯一确定综合参数变量，但一般不能由综合参数变量唯一确定参数变量．B_i，B_{ij}，B_{ijk}，B_{ijkl}等与参数变量无关，反映结构的固有特性．

利用等式$B_i=B_{ij}=0$，略去关于活坐标的常数项$A(\lambda_p)$，得到关于活坐标和综合参数变量的势函数，简称活化势函数

$$B(u_i,\ \lambda_p)=A_i(\lambda_p)u_i+\frac{1}{2!}A_{ij}(\lambda_p)u_iu_j+\frac{1}{3!}[B_{ijk}+A_{ijk}(\lambda_p)]u_iu_ju_k$$
$$+\frac{1}{4!}[B_{ijkl}+A_{ijkl}(\lambda_p)]u_iu_ju_ku_l+\text{h.o.t.} \tag{4.25}$$

2. 确定突变类型

活化势函数可用于确定突变类型．单重临界点($M=1$)有如下几种突变类型[5,6]：$\Delta_3\neq0$时，折叠突变；$\Delta_3=0$，$\Delta_4\neq0$时，尖点突变；$\Delta_3=\Delta_4=0$，$\Delta_5\neq0$时，燕尾突变；$\Delta_3=\Delta_4=\Delta_5=0$，$\Delta_6\neq0$时，蝴蝶突变．其中，

$$\Delta_3=B_{111}=D_{111} \tag{4.26}$$

$$\Delta_4=B_{1111}=D_{1111}-3D_{\alpha11}D_{\alpha11}/D_{\alpha\alpha} \tag{4.27}$$

$$\Delta_5=B_{11111}=D_{11111}-10D_{\alpha11}D_{\alpha111}/D_{\alpha\alpha}+15D_{\alpha\beta1}D_{\alpha11}D_{\beta11}/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}) \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned}\Delta_6=B_{111111}=&D_{111111}-(15D_{\alpha1111}D_{\alpha11}+10D_{\alpha111}D_{\alpha111})/D_{\alpha\alpha}\\&+(45D_{\alpha\beta11}D_{\alpha11}D_{\beta11}+60D_{\alpha\beta1}D_{\alpha111}D_{\beta11})/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta})\\&-(15D_{\alpha\beta\gamma}D_{\alpha11}D_{\beta11}D_{\gamma11}+90D_{\alpha\beta1}D_{\alpha\gamma1}D_{\beta11}D_{\gamma11})/(D_{\alpha\alpha}D_{\beta\beta}D_{\gamma\gamma})\end{aligned} \tag{4.29}$$

多重临界点($M\geqslant2$)要复杂得多，如何根据活化势函数确定突变类型，需另行研究．

五、活化平衡方程

由活化势函数(4.25)的驻值条件$\partial B/\partial u_i=0$导出临界点$C$附近关于活坐标和综合参数变量的代数平衡方程，简称为活化平衡方程

$$F_i(u_j,\ \lambda_p)=A_i(\lambda_p)+A_{ij}(\lambda_p)u_j+\frac{1}{2!}[B_{ijk}+A_{ijk}(\lambda_p)]u_ju_k$$
$$+\frac{1}{3!}[B_{ijkl}+A_{ijkl}(\lambda_p)]u_ju_ku_l+\text{h.o.t.}=0 \tag{5.1}$$

临界点$C(u_j=0,\ \lambda_p=0)$处，所有综合参数变量为零，$A_i(0)=0$，$A_{ij}(0)=0$，$A_{ijk}(0)=0$，$A_{ijkl}(0)=0$，所以活化平衡方程(5.1)满足初始条件

$$F_i(0,\ 0)=0,\ \partial F_i(0,\ 0)/\partial u_j=0 \tag{5.2}$$

将活化平衡方程作为分岔方程，可应用分岔理论或其他方法求解，求得活坐标多分支解．将活坐标和参数变量代入逆坐标渐近式，可确定逆坐标．

根据活化平衡方程的系数 B_{ijk}，B_{ijkl}，…和综合参数变量 Λ_i，Λ_{ij}，Λ_{ijk}，Λ_{ijkl}，…可判别临界点或分岔点类型．限于篇幅，本文不进行具体讨论．

六、结　语

（1）本文针对多参数变量和多状态变量的离散型有势系统的非线性稳定问题，提出了活化方法．该法可应用于分析由里兹法、伽辽金法、最小二乘法、基于虚位移原理的有限元法等导出的代数平衡方程组所描述的非线性稳定问题．

（2）活化方法是弹性稳定理论中 Liapunov-Schmidt 方法的改进和提高，主要体现在以下几方面：

(a)定义了混合坐标(3.2)，简化公式推导；

(b)根据求导次序的可交换性，引入了组合项求和符号，使导数公式更简洁，使得推导逆坐标u_α和活化势函数B的高阶导数成为可能；

(c)引入了综合参数变量，它们是参数变量的泰勒级数和(4.20)～(4.24)．用综合参数变量描述，处理参数变量更简洁、更确切、更统一：参数变量是荷载参数还是缺陷参数，这无关紧要；不需归并同类参数，也不需在参数空间中选定某一方向；不需根据参数变量个数是多于或小于等于状态变量个数而采取不同的处理方法．

(d)在势函数和代数平衡方程组中消去逆坐标，分别得到活化势函数和活化平衡方程．

（3）活化方法的求解步骤大致如下：

(a)如同 Liapunov-Schmidt 方法，将状态变量分为活坐标和逆坐标；

(b)计算u_α和B的导数，再计算综合参数变量值；

(c)求解活化平衡方程，求得活坐标多分支解；

(d)将活坐标多分支解和参数变量代入逆坐标渐近式，求得逆坐标多分支解．

（4）应用活化方法分析具体问题时，按活化方法求解步骤，将具体数据代入相应公式或表达式，就可求得各阶渐近解．因此，这种方法比通常逐个问题逐个摄动的摄动方法更加一般化、规范化．

（5）导出的活化势函数(4.25)可变换成某种标准势函数，应用突变理论确定突变类型．$M=1$时，可根据判别式(4.26)～(4.29)很方便地确定突变类型；$M=2$时，尚需进一步研究．

（6）导出的活化平衡方程(5.1)可作为分岔方程，应用分岔理论求解，确定临界点或分岔点类型．

（7）本文的研究将促进弹性稳定理论与突变理论和分岔理论的结合．

参 考 文 献

[1] Thompson, J. M. T. and G. W. Hunt, *A General Theory of Elastic Stability*, Wiley (1973).

[2] Thompson, J. M. T., *Elastic Instability Phenomena*, Wiley (1984).

[3] Poston, T. and I. Stewart, *Catastrophe Theory and Its Applications*, Pitman (1978).

[4] Chow, S. N. and J. K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer-Verlag (1982).

[5] 邓长根，加权残值法和突变理论的结合，《第四届全国加权残值法会议论文集》(1992).

[6] 邓长根，突变理论在结构稳定分析中的应用，结构工程学报，2(3-4)(1991).

The Activation Method for Discretized Conservative Nonlinear Stability Problems with Multiple Parameter and State Variables

Deng Chang-gen

(Tongji University, Shanghai)

Abstract

For nonlinear stability problems of discretized conservative systems with multiple parameter variables and multiple state variables, the activation method is put forward, by which activated potential functions and activated equilibrium equations are derived. The activation method is the improvement and enhancement of Liapunov-Schmidt method in elastic stability theory. It is more generalized and more normalized than conventional perturbation methods. The activated potential functions may be transformed into normalized catastrophe potential functions. The activated equilibrium equations may be treated as bifurcation equations. The researches in this paper will motivated the combination of elastic stability theory with catastrophe theory and bifurcation theory.

Key words multiple parameter variables, multiple state variables, discretized, conservative, nonlinear stability, activation method, asymptotic analyses