

# 动力点圆力偶作用于弹性全空间的解及其性质\*

云天铨 顾赫宁

(广州 华南理工大学工程力学系, 1992年6月3日收到)

## 摘 要

本文给出动力点圆力偶作用于弹性全空间原点的解, 并讨论它的性质。将脉冲荷载沿以原点为心、 $a$ 为半径, 在 $z=0$ 平面上的圆周切向均匀分布, 当 $a \rightarrow 0$ 时经积分运算即得问题的解。当此动力点圆力偶的强度按 $\sin \omega t$ 变化时, 在弹性全空间中以 $z$ 轴为轴, 原点为顶点的锥面在任何时刻均为零应力面。以这些锥面为边界的回转体受按 $\sin \omega t$ 而变化的扭矩作用的动力扭转问题的解可由本文的解得出。

**关键词** 点圆力偶 扭转问题 弹性动力学

## 一、概 述

点圆力偶是圆力偶(或环力偶ring couples)当其半径 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限情形。作者曾在[1]和[2]中分别给出静力的点圆力偶和圆力偶作用于弹性全空间的解。由于圆力偶作用于弹性全空间的解很复杂, 将圆力偶在全空间中分布的积分运算会遇到椭圆积分以及奇异积分的困难, 因而用此途径来解回转体动力扭转问题很难得到有用的结果。但是, 点圆力偶作用于弹性全空间的解就很简单, 作者曾用点圆力偶沿轴线分布的办法来解回转体静力扭转问题<sup>[2]</sup>, 嵌在弹性半空间的回转轴的静力扭转问题<sup>[3]</sup>等。现在, 我们将上述应用于静力扭转问题的方法推广到动力问题。推广工作的第一步, 就是寻找动力的点圆力偶作用于弹性全空间的解, 并研究其性质, 这就是本文的目的。至于推广工作的其余步骤, 将另文讨论。

分析动力问题, 一般有两类方法。一是直接法, 直接在时间域内求解。另一是间接法, 用积分变换把问题变换后求解, 再反变换到原问题的空间。通常, 间接法的反变换较难求解, 而直接法由于波的传播时间与源、场点的距离有关, 对于多源点与多场点问题的积分域不便确定。三维全空间受集中力的动力问题的基本解已经求出, 利用它沿圆力偶的圆周分布是可直接求出动力圆力偶的解的。由于一场点到圆力偶的圆周上各点(源点)的距离不同, 而且积分涉及到椭圆积分的运算, 因此, 直接积分不易计算。但是, 点圆力偶则不同, 一场点到点圆力偶的圆周上各点的距离都相等, 而且积分不涉及椭圆积分。因此, 使用直接积分法求点圆力偶的动力解将是可行的和方便的。本文利用直接法求点圆力偶的动力解, 其中在

\* 广东省自然科学基金资助课题。

求积分的极限过程中使用拉氏变换和反变换, 详细过程在第二节中表示. 在本文的第三节中, 讨论点圆力偶动力解的性质. 其中最重要的性质是当点圆力偶的强度变化时, 以原点为顶点,  $z$ 轴为轴的锥面在任何时刻均为零应力面. 于是以此锥面为边界的动力扭转问题便可解决.

## 二、动力点圆力偶作用于弹性全空间 $z=0$ 平面的原点的解

图 1 表示强度为  $T$  的脉冲荷载沿  $z=0$  平面以原点为心,  $a$  为半径的圆周切向均匀分布. 当  $a \rightarrow 0$  时, 此力系的极限  $M_0$ .

$$M_0 = \lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} T \cdot a^2 d\theta = \lim_{a \rightarrow 0} 2\pi T a^2 \quad (2.1)$$

称为作用于弹性全空间  $z=0$  平面的原点的脉冲点圆力偶  $M_0$ .

单位脉冲荷载于时刻  $t_1=0$  沿  $j$  方向作用于  $x_1$  点, 引起  $t$  时刻  $x$  点沿  $i$  方向的位移  $u_{ij}(x, t; x_1, 0)$  已由脉冲荷载  $\delta_{ij} \delta(x-x_1) \delta(t-t_1)$  的基本解<sup>[4]</sup>

求得为:

$$u_{ij}(x, t; x_1, 0) = \frac{1}{4\pi m} \left\{ \frac{1}{R^3} \left[ \frac{3x_i x_j}{R^2} - \delta_{ij} \right] \left[ H\left(t - \frac{R}{c_1}\right) - H\left(t - \frac{R}{c_2}\right) \right] + \frac{x_i x_j}{R^3} \left[ \frac{\delta(t, R/c_1)}{c_1^2} - \frac{\delta(t, R/c_2)}{c_2^2} \right] + \frac{\delta_{ij} \delta(t, R/c_2)}{R c_2^2} \right\} \quad (2.2)$$

式中:  $R = |x - x_1|$ ,  $m$  为密度,  $x_i = R R_{,i}$ ,  $x_j = R R_{,j}$ , 纵波速度  $c_1$ , 横波速度  $c_2$ , 有

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2G}{m} = \frac{2G(1-\nu)}{m(1-2\nu)}, \quad c_2^2 = \frac{G}{m}$$

$\lambda$ ,  $G$  为 Lamé 系数,  $\nu$  为 Poisson 比.  $H =$  Heviside 函数,  $\delta =$  Dirac 函数.  $\delta_{ij}$  为 Kronecker 符号.

考虑图 2 所示的一对力所形成的力偶  $2a^2 \cdot T d\theta$  引起全空间内任意点  $N(\rho, 0, z)$  的位移  $dV$ , 由 (2.1) 式有:

$$dV = \frac{T}{4\pi m} \left\{ \frac{3t}{R_1^3} \frac{(\rho - a \cos\theta) a \sin^2\theta}{R_1^3} (H_1 - H_2) + \frac{(\rho - a \cos\theta) a \sin^2\theta}{R_1^3} \cdot \left( \frac{\delta_1}{c_1^2} - \frac{\delta_2}{c_2^2} \right) + \frac{t \cos\theta}{R_1^3} \left( \frac{3a^2 \sin^2\theta}{R_1^2} - 1 \right) (H_1 - H_2) + \frac{a^2 \sin^2\theta \cos\theta}{R_1^3} \left( \frac{\delta_1}{c_1^2} - \frac{\delta_2}{c_2^2} \right) + \frac{\delta_2 \cos\theta}{R_1 c_2^2} + \frac{3t}{R_2^3} \frac{(\rho + a \cos\theta) a \sin^2\theta}{R_2^3} \cdot (H_1' - H_2') + \frac{(\rho + a \cos\theta) a \sin^2\theta}{R_2^3} \left( \frac{\delta_1'}{c_1^2} - \frac{\delta_2'}{c_2^2} \right) \right\}$$

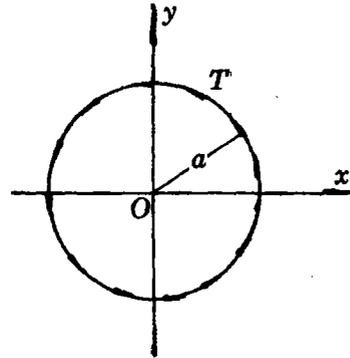


图 1

$$-\frac{t\cos\theta}{R_2^3} \left( \frac{3a^2\sin^2\theta}{R_2^2} - 1 \right) (H_1' - H_2') - \frac{a^2\sin^2\theta\cos\theta}{R_2^3} \left( \frac{\delta_1'}{e_1^2} - \frac{\delta_2'}{e_2^2} \right) - \frac{\delta_2'\cos\theta}{R_2e_2^2} \} d\theta$$

式中  $R_1^2 = \rho^2 + a^2 - 2a\rho\cos\theta + z^2$ ,  $R_2^2 = \rho^2 + a^2 + 2a\rho\cos\theta + z^2$   
 $H_1 = H(t, R_1/e_1)$ ,  $H_2 = H(t, R_1/e_2)$   
 $H_1' = H(t, R_2/e_1)$ ,  $H_2' = H(t, R_2/e_2)$   
 $\delta_1 = \delta(t, R_1/e_1)$ ,  $\delta_2 = \delta(t, R_1/e_2)$   
 $\delta_1' = \delta(t, R_2/e_1)$ ,  $\delta_2' = \delta(t, R_2/e_2)$

于是在脉冲点圆力偶作用下  $N$  点的位移

$$V = \int_0^\pi \lim_{a \rightarrow 0} dv = \frac{M_0\rho}{8\pi^2m} \int_0^\pi 2\sin^2\theta \left[ \frac{3t(H_1 - H_2)}{r_0^5} + \frac{1}{r_0^3} \left( \frac{\delta_{10}}{e_1^2} - \frac{\delta_{20}}{e_2^2} \right) \right] d\theta + \frac{M_0}{8\pi^2m} \int_0^\pi \cos\theta \cdot I d\theta \quad (2.3)$$

式中的第二项积分中的  $I$  为

$$I = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{t(H_1' - H_2')}{R_2^3} - \frac{t(H_1 - H_2)}{R_1^3} + \frac{\delta_2}{R_1e_2^2} - \frac{\delta_2'}{R_2e_2^2} \right] / a$$

应用罗比达法则求极限, 得

$$I = -6t\rho\cos\theta(H_1 - H_2)r_0^{-5} + 2\rho\cos\theta \cdot r_0^{-3} \cdot \delta_{20}/e_2^2 + I_1 \quad (2.4)$$

式中  $r_0 = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$ ,  $\delta_{20} = \delta(t - r_0/e_2)$ ,  $\delta_{10} = \delta(t - r_0/e_1)$

$$I_1 = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{t}{R_2^3} \frac{\partial}{\partial a} (H_1' - H_2') - \frac{t}{R_1^3} \frac{\partial}{\partial a} (H_1 - H_2) + \frac{1}{R_1e_2^2} \frac{\partial}{\partial a} (\delta_2) - \frac{1}{R_2e_2^2} \frac{\partial}{\partial a} (\delta_2') \right]$$

直接计算  $\partial(H_1' - H_2')/\partial a$  等项并不方便. 于是先求  $I_1$  的拉氏变换  $\mathcal{L}I_1$ , 后再求其反变换  $\mathcal{L}^{-1}$  即得  $I_1$ . 其中交换  $\mathcal{L}$  和求极限  $\lim$ 、求导  $\partial/\partial a$  的次序, 即

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L} \left[ \frac{t}{R_2^3} \frac{\partial}{\partial a} (H_1' - H_2') - \frac{t}{R_1^3} \frac{\partial}{\partial a} (H_1 - H_2) + \frac{1}{R_1e_2^2} \frac{\partial}{\partial a} (\delta_2) - \frac{1}{R_2e_2^2} \frac{\partial}{\partial a} (\delta_2') \right] \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ 2r_0^{-3}\rho\cos\theta \left[ \frac{\exp[-sr_0/e_2]}{e_2^2} - \frac{\exp[-sr_0/e_1]}{e_1^2} \right] + 2r_0^{-2}e_2^{-3}\rho\cos\theta \cdot s \exp[-sr_0/e_2] \right\} \\ &= 2\rho\cos\theta \left[ r_0^{-3} \left( \frac{\delta_{20}}{e_2^2} - \frac{\delta_{10}}{e_1^2} \right) + r_0^{-2} \delta_{20} e_2^{-3} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

将(2.4), (2.5)式代入(2.3)式, 得:

$$V = \frac{M_0\rho}{8\pi Gr_0^3} [\delta_{20} + r_0 \delta_{20} e_2^{-1}] \quad (2.6)$$

式中  $(\dot{\phantom{x}}) = \partial(\phantom{x})/\partial t$ ,  $t$  为时间.

另外位移分量  $U=0$ ,  $W=0$ . 应力分量  $\sigma_\rho = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{\rho z} = 0$ .

$$\begin{aligned}
 \tau_{\theta\rho} &= G \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{V}{\rho} \right) \\
 &= -\frac{3M_0\rho^2}{8\pi r_0^3} \left[ \delta_{20} + \frac{r_0}{c_2} \dot{\delta}_{20} + \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{c_2} \right)^2 \ddot{\delta}_{20} \right] \\
 \tau_{\theta z} &= G \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \\
 &= -\frac{3M_0\rho z}{8\pi r_0^3} \left[ \delta_{20} + \frac{r_0}{c_2} \dot{\delta}_{20} + \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{c_2} \right)^2 \ddot{\delta}_{20} \right]
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

其中计算 $\partial(\delta_{20})/\partial\rho$ 等项,应用拉氏变换和反变换的手段.例如

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \rho} (\delta_{20}) &= \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial \rho} (\delta_{20}) = \mathcal{L}^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \mathcal{L} (\delta_{20}) \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \exp[-(r_0/c_2)s] = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{\rho}{r_0 c_2} \cdot s \exp[-(r_0/c_2)s] \right\} \\
 &= -\frac{\rho}{c_2 r_0} \dot{\delta}_{20}
 \end{aligned}$$

(2.6)式和(2.7)式就是脉冲点圆力偶 $M_0$ 在时刻 $t=0$ 作用在弹性全空间 $z=0$ 平面的原点引起在时刻 $t$ ,距离为 $r_0$ 的点的位移和应力分量.

根据 $\delta$ 函数的性质,对任意连续函数 $F(t)$ ,有

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-\tau) \delta(\tau) d\tau \tag{2.8}$$

我们可得点圆力偶的强度按 $F(t)$ 变化时,弹性全空间任一点的位移和应力分量.例如,突加的强度为 $M_0 H(t)$ 的点圆力偶作用下的位移和应力分量为:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{M_0 \rho}{8\pi G r_0^3} \left[ H_{20} + \frac{r_0}{c_2} \delta_{20} \right] \\
 \tau_{\theta\rho} &= -\frac{3M_0 \rho^2}{8\pi r_0^3} \left[ H_{20} + \frac{r_0}{c_2} \dot{\delta}_{20} + \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{c_2} \right)^2 \ddot{\delta}_{20} \right] \\
 \tau_{\theta z} &= -\frac{3M_0 \rho z}{8\pi r_0^3} \left[ H_{20} + \frac{r_0}{c_2} \dot{\delta}_{20} + \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{c_2} \right)^2 \ddot{\delta}_{20} \right]
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

式中 $H_{20} = H(t - r_0/c_2)$ . 当 $t > r_0/c_2$ 时,  $H_{20} = 1$ ,  $\delta_{20} = 0$ ,  $\dot{\delta}_{20} = 0$ . (2.9)式变成静力问题的解.

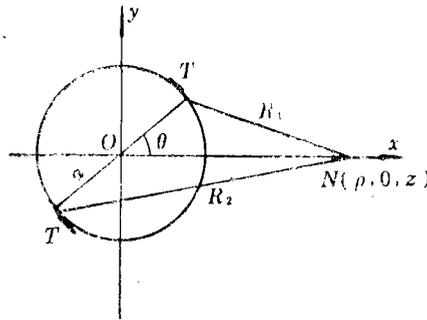


图 2

### 三、动力点圆力偶作用于弹性全空间的解的性质

动力点圆力偶 $M_0$ 的强度按 $\sin\omega t$  (或 $\cos\omega t$ )变化的情形最具实际意义。因为它和扭矩按正、余弦变化的回转体扭转问题有密切联系。下面,我们来看强度为 $M_0\sin\omega t$ 的动力点圆力偶作用下解的性质。

根据(2.8)式,将(2.6)式代入,得强度为 $M_0\sin\omega t$ 作用于原点的解为:

$$\begin{aligned} V &= \frac{M_0\rho}{8\pi Gr_0^3} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega(t-\tau) \left[ \delta_{20}(\tau) + \frac{r_0}{c_2} \dot{\delta}_{20}(\tau) \right] d\tau \\ &= \frac{M_0\rho}{8\pi Gr_0^3} \left\{ \left[ \sin\omega \left( t - \frac{r_0}{c_2} \right) + \frac{r_0}{c_2} \omega \cdot \cos\omega \left( t - \frac{r_0}{c_2} \right) \right] H_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_0}{c_2} \sin\omega \left( t - \frac{r_0}{c_2} \right) \cdot \Delta\delta_{20} \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

式中 $\omega$ 为频率,

$$\Delta\delta_{20} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \delta \left( t - \frac{r_0}{c_2} + \varepsilon \right) - \delta \left( t - \frac{r_0}{c_2} - \varepsilon \right) \right\}$$

上式推导过程中,将

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{r_0/c_2 - \varepsilon} + \int_{r_0/c_2 - \varepsilon}^{r_0/c_2 + \varepsilon} + \int_{r_0/c_2 + \varepsilon}^{\infty}$$

并对  $\int \sin\omega(t-\tau)\dot{\delta}_{20}(\tau)d\tau$

应用分部积分公式和积分中值定理,便得(3.1)式。其中含 $\Delta\delta_{20}$ 的末项为 $(\infty-\infty)$ 型,不管它是否有限或无限,它只代表当 $t=r_0/c_2$ 时刻的响应。当 $t \neq r_0/c_2$ 时,它即消失。因此,对于求非瞬态周期性扭转问题而言, $\Delta\delta_{20}$ 项只起瞬时脉冲作用,不及含持久性的 $H_2$ 项重要。为简便计,下面,我们略去瞬态的脉冲项。重写(3.1)式

$$V = \frac{M_0\rho}{8\pi Gr_0^3} \left[ \sin\omega \left( t - \frac{r_0}{c_2} \right) + \frac{r_0}{c_2} \omega \cdot \cos\omega \left( t - \frac{r_0}{c_2} \right) \right] H_2 \quad (3.1)'$$

于是

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta\rho} &= G \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{V}{\rho} \right) = - \frac{3M_0\rho^2}{8\pi r_0^5} \phi \\ \tau_{\theta z} &= G \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) = - \frac{3M_0\rho z}{8\pi r_0^5} \phi \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式中

$$\begin{aligned} \phi &= \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{r_0}{c_2} \right)^2 \omega^2 \right] \sin\omega \left( t - \frac{r_0}{c_2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_0}{c_2} \omega \cos\omega \cdot \left( t - \frac{r_0}{c_2} \right) \right\} H_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.1)', (3.2)式是强度为 $M_0\sin\omega t$ 的动力点圆力偶作用于弹性空间原点时任意点 $(\rho, z)$ 的位移和应力分量公式。

此解有如下的重要性质:

1. 对任何时刻 $t$ , 均有

$$\tau_{\theta\rho}/\tau_{\theta z} = \rho/z \quad (3.4)$$

(3.4)式表明:在弹性全空间中以原点为顶点、 $z$ 轴为轴、锥角为任意 $\alpha$ 角( $\text{tg}\alpha = \rho/z$ )的锥面在任何时刻 $t$ 均为零应力面(图3)。这一性质和静力的作用于原点的点圆力偶的解的性质<sup>[1]</sup>一样。在[1]中曾证明以这些零应力锥面为边界的回转体扭转问题,可用(静力)点圆力偶

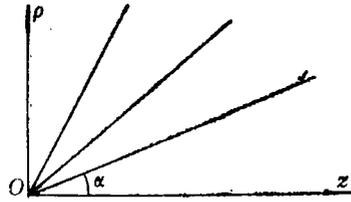


图 3

作用于原点的解来解决。现在,我们同样可以证明,以这些零应力锥面为边界的回转体受按 $\sin\omega t$ 变化的动力扭转问题的解可用(3.1)',(3.2)式来表示。我们来看性质2:

2. 解(3.1)',(3.2)式满足柱坐标系的运动微分方程<sup>[5]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} &= m\dot{U} - F_\rho \\ \frac{\partial\tau_{\theta\rho}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho} &= m\dot{V} - F_\theta \\ \frac{\partial\tau_{z\rho}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\tau_{z\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{z\rho}}{\rho} &= m\dot{W} - F_z \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

在不计体积力 $F$ 的条件下,解(3.1)',(3.2)式自动满足(3.5)的第1,3式。不难验证,也满足第2式。

由(3.3)式,得

$$\frac{\partial\phi}{\partial\rho} = \rho \cdot \psi, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = z \cdot \psi$$

$$\psi = \frac{1}{3} \left( \frac{\omega}{c_2} \right)^2 \left[ \sin\omega \left( t - \frac{r_0}{c_2} \right) + \frac{r_0}{c_2} \omega \cos\omega \left( t - \frac{r_0}{c_2} \right) \right] H_2$$

代入(3.5)的第2式,有

$$\frac{\partial\tau_{\theta\rho}}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta\rho}}{\rho} = -\frac{3M_0\rho}{8\pi r_0^3} \psi = m\dot{V} \quad \square$$

由于(3.1)',(3.2)满足锥体内的运动微分方程以及锥体边界为零应力面的扭转问题的边界条件,所以它就是锥体扭转问题的解。

在此,要指出的是: $M_0$ 是作用于弹性全空间的力偶,并非锥角为 $\alpha$ 的锥体扭转问题的扭矩 $M_T$ 。但 $M_0$ 和 $M_T$ 的联系可由锥体的平衡条件定出。例如,截取 $z=z$ 的横截面,由平衡条件,得出 $z$ 截面处的扭矩 $M_T(z)$

$$M_T(z) = 2\pi \int_0^\rho r^2 \tau_{\theta z}(r, z) dr \quad (3.6)$$

将(3.2)式代入,就能求出 $M_0$ 和 $M_T(z)$ 的关系。只是(3.6)式的积分很难求出精确的解。我们用另一种方法求扭矩 $M_T$ ,即不是沿 $z=z$ 的横截面积分,而是沿 $r_0 = \text{定值}$ 的球面积分(图4)。此时, $r_0$ 为常数,积分十分简单,可得出精确的解。

图4表示以原点为心, $r_0$ 为半径的球面截取锥角为 $\alpha$ 的受扭锥体。此球面上的应力 $\tau_{\theta n}$ ,由平衡可知:

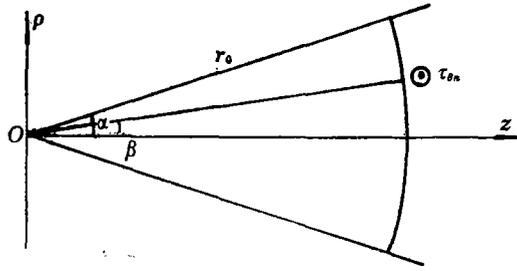


图 4

$$\tau_{\theta n} = \tau_{\theta\rho} \cdot \sin\beta + \tau_{\theta z} \cdot \cos\beta \tag{3.7}$$

式中 $\beta$ 为微元所在点的锥角, 即 $\text{tg}\beta = \rho/z$ . 将(3.4)式代入(3.7)式, 得:

$$\tau_{\theta n} = \tau_{\theta z} / \cos\beta \tag{3.8}$$

列出球截面应力对 $z$ 轴的力矩方程, 得

$$M_T(r_0) = 2\pi \int_0^\rho r^2 \tau_{\theta n} dr / \cos\beta = 2\pi \int_0^\alpha (r_0 \sin\beta)^2 \tau_{\theta n} \cdot r_0 d\beta \tag{3.9}$$

将(3.2), (3.3), (3.8)式代(3.9)式, 并注意此时 $r_0$ 为常数,  $\phi$ 也为常数, 及 $r = r_0 \sin\beta, z = r_0 \cdot \cos\beta$ , 得

$$M_T(r_0) = \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos\alpha (\sin^2\alpha + 2) \right] M_0 \phi \tag{3.10}$$

**结论** 当动力点圆力偶的强度 $M_0$ 按 $\sin\omega t$ 变化时, 它在全空间中的解(3.1)', (3.2)式代表锥角为 $\alpha$ , 受按 $\sin\omega t$ 变化的, (3.10)式 $r_0 \rightarrow 0$ 的扭矩 $M_T(0)$ 作用的锥形体的扭转问题的解。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 云天铨, “点圆力偶”作用于弹性全空间的解及其应用, 华中工学院学报, 2(7) (1962), 86—101.
- [ 2 ] 云天铨, 回转体扭转问题的一个积分方程解法, 华中工学院学报, (3) (1979), 97—104. (MR # 81m:73028)
- [ 3 ] 云天铨, 嵌入弹性半空间的弹性迴转轴的扭转, 应用数学和力学, 11(6) (1990), 489—498.
- [ 4 ] Eringen, A. C. and E. S. Suhubi, *Elastodynamics*, Academic Press, New York (1975).
- [ 5 ] 谢贻权、林钟祥、丁皓江编, 《弹性力学》, 浙江大学出版社 (1988), 47.

## The Solution of Dynamic Point-Ring-Couple in an Elastic Space and Its Properties

Yun Tian-quan    Gu He-ning

*(Department of Engineering Mechanics, South China University of  
Technology, Guangzhou)*

### Abstract

The solution of dynamic Point-Ring-Couple at the origin, on  $z=0$  plane, in an elastic space is presented and its properties are discussed. Let shocking loads be uniformly distributed, along the direction of circumference, at a circle, on  $z=0$  plane, with radius  $a$  and centered at the origin. Then, the solution of our problem is obtained via integral calculation for  $a \rightarrow 0$ . When the intensity of this dynamic Point-Ring-Couple is varied with  $\sin \omega t$ , the cones in the elastic space with apex at the origin and the  $z$ -axis be its symmetric axis, become zero stressed surfaces at any time instance. The solution of dynamic torsion problem of revolution solids with these cones as boundary under the application of torque varied with  $\sin \omega t$  is found.

**Key words** point-ring-couple, torsion problem, elastodynamics