

发汗冷却系统的控制及其特性*

徐燕侯 杨学实

(中国科学技术大学) (北京142信箱206分箱,)

(1992年6月1日收到)

摘 要

本文给出热层三维发汗冷却控制系统的数学模型。在一般情形下,它是一个可变域上分布参数和集中参数混合的非线性控制系统。本文指出:在冷却剂渗流是一维不可压缩的(或一维定常的)条件下,热层的传热和烧蚀问题可以单独求解。针对热防护层的表面烧蚀问题,本文讨论了系统控制方案,阐明简化的条件,研究了一维发汗冷却系统点控制的特性,给出了冷却剂无相变和有相变两种情形的平衡状态解。

关键词 发汗冷却 传热 分布参数控制 可变域 非线性

一、引 言

在高温环境中,发汗冷却是保护(有烧蚀或无烧蚀)部件正常工作的有效手段,在航空航天工程中有着广泛的应用^[1]。发汗冷却控制系统通常是一个可变域上分布参数和集中参数混合的非线性控制系统,是现代工程控制论中的前沿课题之一。近年来,国内杨学实等人^[2-5]在这方面开展了一系列的研究,对一维发汗冷却问题建立了数学模型,进行了数字仿真,讨论了系统动态响应的数值特征,并在一种简化条件下给出了级数解。

本文将给出三维发汗冷却系统的数学模型,提出热层表面烧蚀控制的方案,讨论数学模型简化的条件,最后研究一维发汗冷却系统点控制的特性,给出冷却剂无相变和有相变两种情形的平衡状态解。文中的基本假设如下:(1)冷却剂通过多孔介质热层的渗流过程中不发生任何化学变化,没有质量的增减;(2)冷却剂与多孔介质热层之间能进行充分的热交换,两者具有相同的局部温度^[6];(3)多孔介质是均匀各向同性的,因此体孔隙率 ϕ (孔隙体积与总体积之比)也是面孔隙率和线孔隙率^[7];(4)冷却剂在多孔介质中的渗流遵循Darcy定律(或其他形式)^[7]

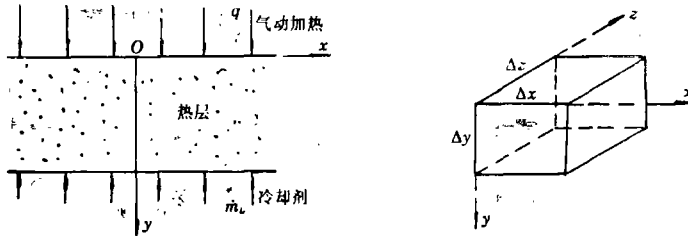
$$\mathbf{v} = -A\nabla p \quad (1.1)$$

其中 \mathbf{v} 是冷却剂的比流量矢量(称为渗流速度), p 是压力, A 是物性参数,取决于多孔介质的渗透率和冷却剂的粘性系数。在均匀各向同性多孔介质的条件下, A 是温度的函数。

* 蔡树棠推荐。国家自然科学基金资助项目。

二、热层温度分布的控制方程

设均匀各向同性多孔介质平板热层的厚度为 l ，体孔隙率为 ϕ ，其上表面暴露在高温气流中，冷却剂由下表面进入。选取笛卡尔坐标系 $Oxyz$ 如图1(a)，其中 Oxz 平面与上表面重合， y 轴沿厚度方向。我们在热层范围内任取一固定于空间的正平行六面体微元如图1(b)。这一微元体的体积为 $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ，其中冷却剂占有的体积为 $\phi \Delta V$ 。



(a) 坐标选取

(b) 微元体

图1 示意图

经过时间间隔 Δt ，微元体内热量的增加为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\rho c T \cdot \Delta V + \rho_L c_{p,L} T \cdot \phi \Delta V] \cdot \Delta t \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [(\rho c + \phi \rho_L c_{p,L}) T] \cdot \Delta V \cdot \Delta t, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 T 是温度， ρ 和 c 分别是热层介质的密度和比热， ρ_L 和 $c_{p,L}$ 分别是冷却剂的密度和比热（冷却剂为气体时， $c_{p,L}$ 为定压比热）。根据 Fourier 定律，由导热引起进入微元体的净热流量为

$$\text{div}[(\kappa + \phi \kappa_L) \text{grad} T] \cdot \Delta V \cdot \Delta t, \quad (2.2)$$

其中 κ 是热层介质的导热系数， κ_L 是冷却剂的导热系数。同时，由冷却剂携带而进入微元体的净热流量为

$$-\text{div}(m_L c_{p,L} T) \cdot \Delta V \cdot \Delta t \quad (2.3)$$

其中 $m_L = \rho_L v$ 为冷却剂的质量通量矢量。

如果计及热层由温升而引起的膨胀，此时孔隙率也是温度的函数，即 $\phi = \phi(T)$ 。为了简化，假定热层介质只有沿厚度方向的线膨胀，且下表面的位置固定不变。设热层介质的线膨胀系数（由单位温升引起的单位长度的伸长率）为 B ，则热层介质上任意一点沿负 y 方向的膨胀速率为

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = \int_y^l B \frac{\partial T}{\partial t} dy \quad (2.4)$$

于是由热层介质膨胀而进入微元体的净热流量为

$$\frac{\partial}{\partial y} [(\rho c + \phi \rho_L c_{p,L}) T \frac{\partial e}{\partial t}] \cdot \Delta V \cdot \Delta t \quad (2.5)$$

根据能量平衡原理，该微元体内热量的增加等于通过各界面进入的净热量。于是由式(2.1)，(2.2)，(2.3)和(2.4)得出热层温度分布的控制方程为

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial t}[(\rho c + \phi \rho_L c_{pL})T] \\ & = \text{div}[(\kappa + \phi \kappa_L) \text{grad}T] - \text{div}(\dot{m}_L c_{pL} T) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\rho c + \phi \rho_L c_{pL}) T \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

不难看出,上述方程右边的第一项是由导热引起的扩散项,第二项是由冷却剂流动引起的对流项,第三项是由热层介质膨胀引起的输运项。在热层表面出现烧蚀或计及受热膨胀时,由于上表面将随时间变动,因此方程(2.6)的空间定义域是具有动边界的可变域。

三、初始条件和边界条件

1. 初终条件 设初始时刻 $t=0$,热层的初始温度分布为 $f(x,y,z)$,则有

$$T(x,y,z;0) = f(x,y,z) \quad (3.1)$$

2. 下表面条件 下表面为固定边界,若等温,记其温度为 T_l ,则给出第一类边界条件为

$$T(x,l,z;t) = T_l \quad (3.2)$$

若计及冷却剂从控制贮箱到达壁面时的吸热,则给出第三类边界条件为

$$-(\kappa + \phi \kappa_L) \frac{\partial T}{\partial y} = \dot{m}_L c_{pL} (T - T_o) \quad (3.3)$$

其中 T_o 是控制贮箱内冷却剂的温度。不难看出, $c_{pL} T$ 和 $c_{pL} c T$ 分别是冷却剂在内壁面处和在控制同箱内的焓值。

3. 上表面条件 上表面在出现烧蚀或计及热层膨胀时是活动边界。设热层的烧蚀温度为 T_a ,则活动边界上首先要满足等温条件

$$T = T_a \quad (3.4)$$

其次,设上表面的气动加热通量为 $q = q(x,y,z;t)$,热层的熔化热为 L ,沿厚度方向的烧蚀速率为 $\frac{\partial r}{\partial t} = f(x,z;t)$,加热面的位置为 $y = S(x,z,t)$,则满足

$$\rho L \frac{\partial r}{\partial t} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2} - (\kappa + \phi \kappa_L) \frac{\partial T}{\partial n} = q \quad (3.5)$$

其中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示对表面法向的导数,这里规定表面法向指向其运动的方向,下标“ n ”表示矢量在法向的投影。在无表面烧蚀及略去热层膨胀不计的情形下,上式变为

$$-(\kappa + \phi \kappa_L) \frac{\partial T}{\partial y} = q \quad (3.6)$$

对于高超声速的边界层传热^[8],有

$$q = q_0 \left(1 - \frac{T_w}{T_r} \right) \quad (3.7)$$

其中 T_w 为加热面的壁温, T_r 为气流的滞止温度, q_0 是由气流边界层特性决定的常数。由于冷却剂进入气流将改变边界层的特性,因此需要对气动加热通量进行修正。在工程应用中,通常引入阻塞系数 $\psi = \psi(\dot{m}_L)$ 的概念,将边界条件(3.5)改写成

$$\rho L \frac{\partial r}{\partial t} / \sqrt{1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2} - (\kappa + \phi\kappa_L) \frac{\partial T}{\partial n} = \psi q \quad (3.8)$$

4. 内连接条件 如果采用液体为冷却剂, 则在一定的压力和温度下, 冷却剂将发生相变. 设冷却剂的气化温度为 T_L , 气化热为 h_L , 则在气化面上必须满足内连接条件

$$\left. \begin{aligned} T|_+ = T|_- = T_L, \\ -(\kappa + \phi\kappa_L) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_+ = -(\kappa + \phi\kappa_g) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_- + m_L h_L \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

其中 κ_g 是冷却剂气化后的导热系数, 下标“+”和“-”分别表示冷却剂通过气化面时在其前后两侧取值, 气化面的法向指向冷却剂渗流的方向.

四、系统的控制方案

对于高温气流环境中的热防护层而言, 由于热来自表面, 因此热层的最高温度(危险温度)出现在加热面上. 热层表面是否出现烧蚀, 决定于这一危险温度是否达到热层的烧蚀温度. 根据飞行器不同的用途以及工程技术上的可行性, 采用发汗冷却控制热层表面烧蚀的方案有二: (1)对于需要长期工作的部件, 例如透平叶片, 输送高温流体的管道以及电磁砲的导轨等, 在工程技术上希望热层表面不出现烧蚀. 为此, 我们选取热层气动加热面的温度为目标温度, 设计发汗冷却系统将这一目标温度控制在热层介质的烧蚀温度以下. 在确定了该目标温度以后, 系统的空间定义域为固定域, 系统最后将趋向于平衡状态; (2)对于短期工作的部件, 例如再入飞行器的表面和电磁砲的弹头等, 在工程技术上要求将热层的表面烧蚀量控制在允许的范围内. 为此, 我们设计发汗冷却系统来控制热层气动加热面的烧蚀量, 通常是控制热层的表面烧蚀速率. 在确定了热层表面的烧蚀速率以后, 例如等烧蚀速率, 则系统的空间定义域是边界等速率收缩的可变域. 在工程控制论中, 这两种控制方案均称为点控制, 同属于边界控制^[9].

从热层温度分布的控制方程(2.6)可以看出: 除去非线性的性质之外, 还由于对流项中包含着冷却剂的渗流速度($\dot{m}_L = \rho_L v$), 使得热层的烧蚀和传热问题与冷却剂的渗流问题耦合在一起, 由此增加了问题求解的复杂性. 下面来讨论问题的一些简化.

首先, 由于热防护层的厚度远小于其他两个方向的尺度, 可以假设冷却剂的渗流只沿 y 方向, 又由于冷却剂的渗流速度很小, 可以假设它是不可压缩的. 根据基本假设(1.1), 不可压缩冷却剂渗流的连续方程为

$$\frac{\partial \dot{m}_L}{\partial y} = 0 \quad (4.1)$$

这里将冷却剂沿实际渗流方向(负 y 方向)的速度记作 $v (> 0)$, $\dot{m}_L = \rho_L v$ 称为发汗量. 于是对流项化为

$$-\text{div}(\dot{m}_L g_{rL} T) = \dot{m}_L \frac{\partial}{\partial y} (g_{rL} T) \quad (4.2)$$

必须指出: 在上述两个假设下有式(4.1), 此时热层温度分布的控制方程(2.6)不再和冷却剂的渗流问题耦合在一起, 可以单独求解.

其次, 由于热层多孔介质的孔隙率 $\phi \ll 1$, 可以略去包括 ϕ 的高阶小量, 并以式(4.2)代入, 于是控制方程(2.6)化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho c T) &= \text{div}[(\kappa + \phi \kappa_L) \text{grad} T] \\ &+ m_L \frac{\partial}{\partial y}(c_{pL} T) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho c T \frac{\partial c}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

五、一维系统点控制的特性

我们用一维发汗冷却系统来阐明点控制系统的特性。不计热层的膨胀, 设其初始温度分布均匀, $T(y, 0) = T_c$, 加热面的限定温度为 T_b , 满足 $T_b < T_a$ 。假设各物性参数均为常数, 且冷却剂是不可压缩的, 不发生相变($T_b < T_L$)。我们以 l 为特征长度, $T_b - T_c$ 为特征温度, 以某个 m_{L0} 为特征发汗量, 取 $\frac{\rho_L l}{m_{L0}}$ 为特征时间, 作无量纲变换如下:

$$\xi = \frac{y}{l}, \quad \tau = \frac{m_{L0}}{\rho_L l} t, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_b - T_c} \quad (5.1)$$

由控制方程(4.3), 初始条件(3.1)边界条件(3.3)和(3.6), 以及点控制条件, 则得

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{控制方程: } \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \nu \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] \end{array} \right. \quad (5.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{初始条件, 当 } \tau = 0 \text{ 时, } \theta = 0 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{点控制条件: 当 } \xi = 0 \text{ 时, } \theta = 1 \end{array} \right. \quad (5.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{上边界条件: 当 } \xi = 0 \text{ 时, } \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -\lambda H_q \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{下边界条件: 当 } \xi = 1 \text{ 时, } \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -\lambda \theta \end{array} \right. \quad (5.6)$$

其中 $\lambda = \frac{m_{L0} c_{pL} l}{\kappa + \phi \kappa_L}$, $\nu = \frac{\rho_L c_{pL}}{\rho c} \frac{1}{\lambda_0}$, $\lambda_0 = \frac{m_{L0} c_{pL} l}{\kappa + \phi \kappa_L}$, $H_q = \frac{\psi q_0 (1 - T_b/T_r)}{m_{L0} c_{pL} (T_b - T_c)}$

不难看出, 上述无量纲量的物理意义如下: λ 代表了对流项与扩散项之比, ν 是无量纲的导温系数, H_q 是无量纲的气动加热通量。边界条件(5.4)是系统的点控制条件, 用以控制发汗量 m_L 。因此, 发汗量 m_L 是目标温度 T_b 和时间 t 的函数, 即 $m_L = m_L(T_b, t)$, 于是有 $\lambda = \lambda(T_b, t)$, 所以无量纲的控制方程(5.2)是二阶线性变系数的抛物型方程, 其解的存在唯一性和稳定性已经证明^[10]。

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统趋向平衡状态。此时 $m_L = m_L(T_b) = \text{常数}$, $\lambda = \lambda(T_b) = \text{常数}$ 。控制方程(5.2)退化为二阶线性常系数的常微分方程

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \lambda \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \quad (5.7)$$

立即可以解出热层的无量纲温升分布为

$$\theta = \exp[-\lambda \xi] \quad (5.8)$$

定出发汗量为

$$m_L = \frac{\psi q_0 (1 - T_b/T_r)}{c_{pL} (T_b - T_c)} \quad (5.9)$$

由此看出：(1)热层的无量纲温升分布呈指数衰减，其无量纲的温渗深度 $\delta_r = \frac{1}{\lambda}$ (与发汗量成正比)；(2)发汗量与表面的气动加热通量成正比，而与冷却剂的定压比热成反比。因此冷却剂的定压比热越大，其冷却效果越好；(3)发汗量与加热面的控制温度 T_b 几乎成反比关系， T_b 越小要求发汗量越大。由公式(5.8)和(5.9)给出的函数关系分别示于图2和图3。

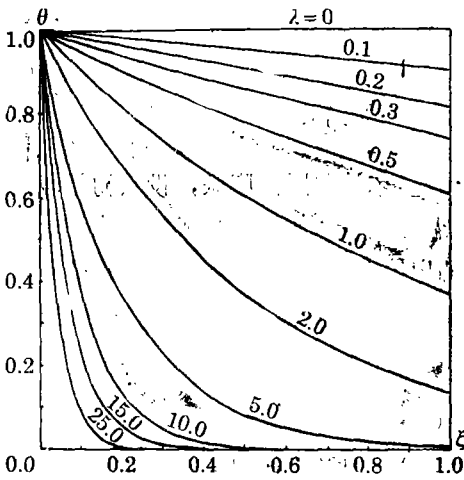


图2 冷却剂无相变时热层的无量纲温升分布(公式(5.8))

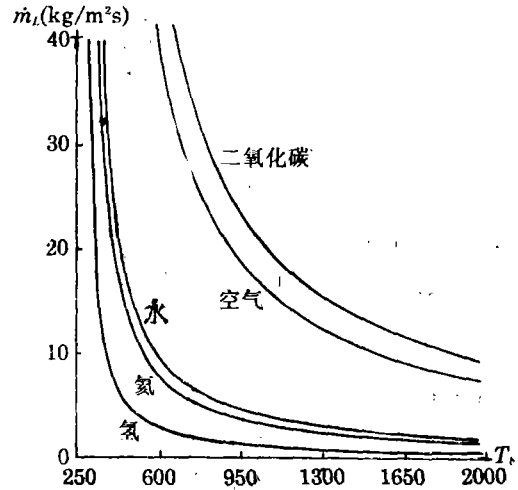


图3 不同冷却剂无相变时发汗量 m_L 随控制温度 T_b 的变化(公式(5.9), $q=3000\text{kcal/m}^2\text{s}$)

现在来讨论系统平衡状态的稳定性。当表面的气动加热受到扰动时，设其扰动增量为 Δq 。若保持加热面的控制温度 T_b 不变时，则发汗量出现的增量为

$$\Delta m_L = \frac{\psi \Delta q}{c_{pL}(T_b - T_c)} \tag{5.10}$$

由于 $\Delta m_L \propto \Delta q$ ，所以系统是稳定的，且控制温度 T_b 和冷却剂的定压比热 c_{pL} 越大，则系统越稳定。若保持发汗量不变时，则加热面温度对控制温度 T_b 出现的偏离为

$$\Delta T = \frac{\psi \Delta q}{m_L c_{pL}} \tag{5.11}$$

由于 $\Delta T \propto \Delta q$ ，所以系统也是稳定的，且冷却剂的发汗量 m_L 和定压比热 c_{pL} 越大，则系统越稳定。

如果冷却剂为液体，且控制温度 T_b 大于冷却剂的气化温度 T_L ，则冷却剂在渗流过程中将发生相变。记冷却剂气化面的位置为 ξ_L ，此时控制方程(5.2)中的系数 λ 在气化前取 λ_L

$$= \frac{m_L c_{pL} l}{\kappa + \phi \kappa_L}, \text{ 在气化后取 } \lambda_1 = \frac{m_L c_{pL} l}{\kappa + \phi \kappa_L}, \text{ 其中 } c_{pL} \text{ 和 } c_{pL} \text{ 分别是冷却剂气化前后的比热，两个}$$

区域解的接条件的无量纲形式为

$$\left. \begin{aligned} \theta|_+ = \theta|_- = \theta_L \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_+ = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_- + \lambda_1 H_1 \end{aligned} \right\} \tag{5.12}$$

其中 $\theta_L = \frac{T_L - T_c}{T_b - T_c}, H_1 = \frac{h_L}{c_{pL}(T_b - T_c)}$ 。

在平衡状态的情形下，热层的无量纲温升分布为

$$\theta = \begin{cases} (1 - H_1) + H_1 \exp[-\lambda_1 \xi] & (\xi \in [0, \xi_L]) \\ \theta_L \exp[-\lambda_2 (\xi - \xi_L)] & (\xi \in [\xi_L, 1]) \end{cases} \tag{5.13}$$

其中气化面的无量纲坐标为

$$\xi_L = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left[1 + \frac{g_{pL}(T_b - T_L)}{h_L + g_L(T_L - T_c)} \right] \quad (5.14)$$

发汗量为

$$\dot{m}_L = \frac{\psi q_0 (1 - T_b/T_r)}{g_{pL}(T_b - T_L) + g_L(T_L - T_c) + h_L} \quad (5.15)$$

此时热层的无量纲温升分布仍呈指数衰减，但是在冷却剂气化前后的指数曲线是不同的，且由于冷却剂的相变吸热，大大提高了冷却效率。在气化面上，无量纲温升分布曲线是连续的，但是并不相切，存在着弱间断。由公式(5.13)至(5.15)给出的函数关系分别示于图4至图6。

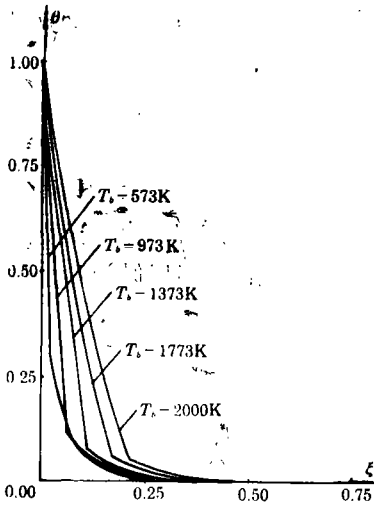


图4 水发汗有相变时，热层的无量纲温升分布(公式(5.13))

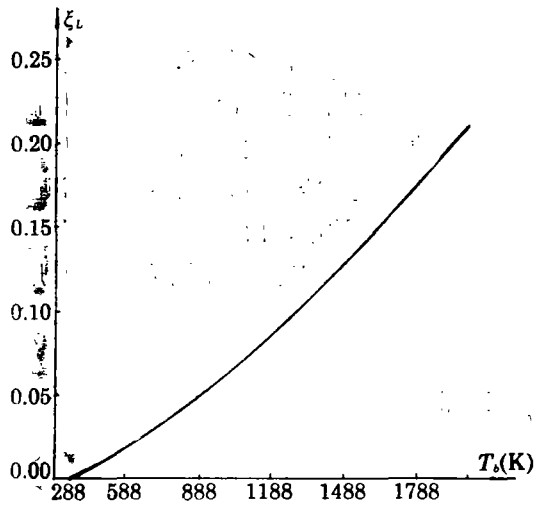


图5 水发汗有相变时气化面位置 ξ_L 随控制温度 T_b 的变化(公式(5.11))

$q=3000\text{kcal/m}^2\text{s}$, $\kappa=1.4\text{w/mK}$, $l=0.015\text{m}$

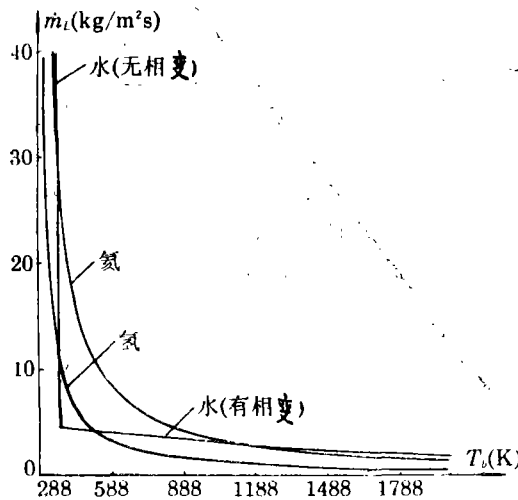


图6 水发汗无相变及有相变时发汗量 \dot{m}_L 随控制温度 T_b 的变化(公式(5.9)和公式(5.15))

$q=3000\text{kcal/m}^2\text{s}$

在冷却剂出现相变的情形下, 我们亦可以得出其平衡状态是稳定的结论。当表面气动加热出现扰动量 Δq 时, 若保持加热面的控制温度 T_b 不变, 则发汗量出现的增量为

$$\Delta m_L = \frac{\psi \Delta q}{c_{pL}(T_b - T_L) + c_{L}(T_L - T_c) + h_L} \quad (5.16)$$

若保持发汗量 m_L 不变, 则加热面温度对控制温度 T_b 出现的偏离 ΔT 与冷却剂不发生相变的情形同, 即由公式(5.11)给出。

六、结 论

(1) 在一般情形下, 三维发汗冷却控制系统是一个可变域上分布参数和集中参数混合的非线性控制系统, 热层的传热和烧蚀必须与冷却剂的渗流联立求解。只有在冷却剂是不可压缩的而且渗流是一维的条件下, 热层的传热和烧蚀才能独立求解,

(2) 一维无烧蚀发汗冷却系统的点控制是稳定的。在常物性参数以及冷却剂渗流是一维不可压缩的条件下, 本文给出冷却剂无相变和有相变两种情形的平衡状态解。结果表明: 冷却剂的比热越大, 冷却效果越好; 冷却剂出现相变将大大地提高其冷却效果, 见图3和图6,

(3) 在热防护中, 由于热来自表面, 热层的危险温度出现在加热面上。在用点控制以避免表面烧蚀的发汗冷却控制系统中, 采用由平衡状态确定的发汗量足以保证整个过程中热层不出现烧蚀。

致谢 感谢研究生朱红同志为本文绘制了所有的图。

参 考 文 献

- [1] Kelley, J. B. and M. R. L'Ecuier, *Transpiration Cooling—Its Theory and Application*, N66—30856.
- [2] 杨学实, 热防护发汗冷却控制, 自动化学报, 11(2)(1985), 345.
- [3] 杨学实, 王侠超, 发汗控制动态响应数值分析, 自动化学报, 14(3)(1988), 133.
- [4] 杨学实, 水发汗温度场控制, 自动化学报, 17(4)(1991), 385.
- [5] 高伟, 杨学实, 发汗控制方程的数学求解, 计算物理, 8(2)(1991), 165.
- [6] 埃克特和德雷克, 《传热与传质分析》(航青译, 金如山校), 科学出版社, 北京(1986年).
- [7] 贝尔, 《多孔介质流体动力学》(李竞生、陈崇希译), 中国建筑工业出版社, 北京(1983年).
- [8] 卞荫贵、钟家康, 《高温边界层传热》, 科学出版社, 北京(1986年).
- [9] 钱学森、宋健, 《工程控制论》(增订版), 科学出版社, 北京(1980年).
- [10] 弗里德曼, 《抛物型偏微分方程》(夏宗伟译, 姜尚礼校), 科学出版社, 北京(1984年).

Control of Transpiration Cooling System and Its Characteristics

Xu Yan-hou

*(Department of Modern Mechanics, University of Science and
Technology of China, Hefei)*

Yang Xue-shi

(206 P. O. Box 142, Beijing)

Abstract

This paper gives the mathematical model of three-dimensional transpiration cooling control system in heat shield. Generally it's nonlinear control system on variable-domain mixed up with both distributed and concentrated parameters. This paper points out that the thermal and ablative problems of the shield can be solved solely with the coolant flow only under one-dimensional incompressible or steady condition. In regard to the surface ablating problem of the thermal shield, the control schemes of the system, including its simplified condition and the characteristics of one-dimensional point control is suggested here. Solutions of the equilibrium state are given with or without phase change as far as the coolant is concerned.

Key words transpiration cooling, heat transfer, distributed parameters control, variable-domain, nonlinear