

对Taylor-Galerkin有限元法的一点改进和它的应用*

朱 刚 谷传纲 胡庆康

(西安交通大学, 1992年5月8日收到)

摘 要

本文针对Taylor-Galerkin有限元法的两个基本假设进行讨论, 改进了原假设, 仅以一个假设作为出发点, 得到了广义的有限元离散公式. 对具体流函数—涡量方程的求解进行了改进的Taylor-Galerkin有限元分析, 提出了组合式的求解方法, 使求解过程更为合理. 算例计算表明, 该方法的效果是很好的.

关键词 假设 有限元 流函数 迭代

一、引 言

在当前计算流体力学中, 广义有限元法越来越受到人们的重视. 从1984年以来, 广义有限元法系列的Taylor-Galerkin法^[1], Streamline Diffusion法^[2]等等, 得到迅速发展和应用. 其中, Taylor-Galerkin有限元法(TGFE)受到许多学者的重视. 但是, 仔细的分析发现, TGFE中所包含的两个基本假设之间是不相容的, 这在一定程度上影响了TGFE算法的收敛性和精度. 本文从修改的基本假设出发, 得到了改进的有限元离散公式. 从所给出的算例来看, 本文方法是精确、收敛和稳定的, 计算结果是满意的, 并在收敛速度上较原方法有所改进.

二、Taylor-Galerkin有限元法的假设的分析

设方程的余量形式为:

$$e_t = 0 \quad (2.1)$$

按照一般的广义有限元法, 得到如下形式的连续内积:

$$(\hat{w}(\xi), E_t) = (\hat{w}(\xi), (w_\alpha(x), e_t)) = \int_{\xi} \hat{w}(\xi) \left(\int_{\Omega} w_\alpha(x) e_t d\Omega \right) d\xi = 0 \quad (2.2)$$

其中 $w_\alpha(x)$ 和 $\hat{w}(\xi)$ 分别表示空间和瞬时的试探函数. 又设:

* 周光垌推荐.

$$v_i = \phi_\alpha(x) v_{\alpha i} \quad (2.3)$$

$$v_{\alpha i} = \sum_m \xi_m(\xi) v_{\alpha i}^m$$

其中 $\phi_\alpha(x)$ 和 $\xi_m(\xi)$ 分别表示空间和瞬时的迹函数, $\xi = t/\Delta t$, α 为总体空间编码, m 为局部瞬时状态. 按 Galerkin 近似, $w_\alpha(x) = \phi_\alpha(x)$. 而关于瞬时状态的迹函数, Taylor-Galerkin 法中有如下两个假设:

$$v_{\alpha i} = (1-\xi)v_{\alpha i}^n + \xi v_{\alpha i}^{n+1} \quad (2.4)$$

$$v_{\gamma j} v_{\beta i} = (1-\xi)v_{\gamma j}^n v_{\beta i}^n + \xi v_{\gamma j}^{n+1} v_{\beta i}^{n+1} \quad (2.5)$$

这两个假设同时出现虽然使以后的有限元离散形式比较简单, 但两假设之间存在一定的不相容性. 为了改进这一点, 我们舍弃原第二个假设, 而仅以第一个假设(2.4)作为基本出发点, 把(2.5)式中的 $v_{\gamma j}$ 和 $v_{\beta i}$ 均用(2.4)式的表达形式代入, 得到:

$$v_{\gamma j} v_{\beta i} = [v_{\gamma j}^{n+1} \xi + (1-\xi)v_{\gamma j}^n] \cdot [v_{\beta i}^{n+1} \xi + (1-\xi)v_{\beta i}^n] \quad (2.5)'$$

将(2.5)'展开, 得到:

$$v_{\gamma j} v_{\beta i} = \xi^2 v_{\gamma j}^{n+1} v_{\beta i}^{n+1} + (1-\xi)^2 v_{\gamma j}^n v_{\beta i}^n + \xi(1-\xi)(v_{\gamma j}^n v_{\beta i}^{n+1} + v_{\gamma j}^{n+1} v_{\beta i}^n) \quad (2.5)''$$

从(2.5)''式可以看出, (2.5)''较之(2.5), 不仅系数不同, 且多了两个交叉项. (2.5)''显然与(2.4)是相容的, 这是因为(2.5)'不再作为独立的基本假设之一而存在, 而仅仅作作为由(2.4)导出的一个表达形式. 这样, (2.5)''作为(2.5)的改进式, 较之原式更加合理.

三、改进T-G有限元法与原方法的区别

为了与原 TGF E 方法的形式进行比较, 作为例子, 我们考察对流扩散方程的离散. 以下称从(2.4)、(2.5)''出发的方法为改进的 TGF E.

对流扩散方程的余量形式为:

$$e_i = \partial v_i / \partial t + v_j v_{i,j} - \nu u_{i,jj} - f_i = 0$$

由广义有限元法:

$$(\dot{w}(\xi), E_i) = (\dot{w}(\xi), (w_\alpha(x), e_i)) = 0$$

采用改进的 TGF E 法, 对空间区域分部积分得:

$$\int_\xi \dot{w}(\xi) [A_{\alpha\beta} v_{\beta i} + B_{\alpha\beta\gamma j} v_{\gamma j} v_{\beta i} + K_{\alpha\beta} v_{\beta i} - F_{\alpha i} - G_{\alpha i}] d\xi = 0 \quad (3.1)$$

其中:

$$A_{\alpha\beta} = \int_\Omega \phi_\alpha \phi_\beta d\Omega, \quad B_{\alpha\beta\gamma j} = \int_\Omega \phi_\alpha \phi_\beta \phi_\gamma d\Omega$$

$$K_{\alpha\beta} = \int_\Omega \nu \phi_{\alpha,j} \phi_{\beta,j} d\Omega, \quad F_{\alpha i} = \int_\Omega \phi_\alpha \phi_\beta d\Omega f_{\beta i}, \quad G_{\alpha i} = \int_\Gamma \nu \phi_\alpha^* \phi_\beta^* d\Gamma g_{\beta i}$$

其中 ϕ_α^* 依赖于 Γ , 而非 x, y . 它表示沿边界的 Neumann 边界条件的插值函数.

对(3.1)式再积分, 并记:

$$\eta = \int_\xi \dot{w}(\xi) \xi d\xi / \int_\xi \dot{w}(\xi) d\xi, \quad \zeta = \int_\xi \dot{w}(\xi) \xi^2 d\xi / \int_\xi \dot{w}(\xi) d\xi$$

取 $v_{\beta i} = (v_{\beta i}^{n+1} - v_{\beta i}^n) / \Delta t$

得 $B_{\alpha\beta\gamma j} \zeta v_{\gamma j}^{n+1} v_{\beta i}^{n+1} + [A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta\gamma j} \Delta t (\eta - \zeta) v_{\gamma j}^n] v_{\beta i}^{n+1}$

$$\begin{aligned}
& + \Delta t B_{\alpha\beta\gamma j} (\eta - \xi) v_{\gamma j}^{n+1} v_{\beta i}^n = \Delta t (F_{\alpha i} + G_{\alpha i}) + A_{\alpha\beta} v_{\beta i}^n \\
& - K_{\alpha\beta} v_{\beta i} (1 - \eta) \Delta t
\end{aligned} \quad (3.2)$$

若用TGFE, 则得到的相应离散式为:

$$\begin{aligned}
& A_{\alpha\beta} v_{\beta i}^{n+1} + \eta \Delta t (B_{\alpha\beta\gamma j} v_{\alpha j}^{n+1} v_{\beta i}^{n+1} + K_{\alpha\beta} v_{\beta i}^{n+1}) - A_{\alpha\beta} v_{\beta i}^n \\
& + (1 - \eta) \Delta t (B_{\alpha\beta\gamma j} v_{\gamma j}^n v_{\beta i}^n + K_{\alpha\beta} v_{\beta i}^n) - \Delta t (F_{\alpha i} + G_{\alpha i}) = 0
\end{aligned} \quad (3.3)$$

由(3.2)、(3.3)两式可以看出, 对于对流-扩散方程, 改进的TGFE方法较之原方法在离散化形式中多了两项, 且系数也有变化. 可以说, (3.2)式比(3.3)式更准确地反映了时间前后之间的关系.

四、旋涡输运方程的改进TGFE法的离散

考虑旋涡输运方程:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \nu \nabla^2 w$$

设: $\psi^{(e)} = [N] \{\psi\}^{(e)}$, $w^{(e)} = [N] \{w\}^{(e)}$

代入以上方程并对空间区域分部积分得:

$$\{w\}^{(e)} [K_{\dot{w}}]^{(e)} + [K_{wn}]^{(e)} \{\psi\}^{(e)} \{w\}^{(e)} + [K_w]^{(e)} \{w\}^{(e)} = 0 \quad (4.1)$$

在这里, 我们假设Neumann边界条件为齐次. 其中:

$$K_{\dot{w}ij} = \int_{\Omega^{(e)}} N_i N_j d\Omega^{(e)}$$

$$K_{wnijk} = \int_{\Omega^{(e)}} N_i \left(\frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial x} - \frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) d\Omega^{(e)}$$

$$K_{wij} = \nu \int_{\Omega^{(e)}} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega^{(e)}$$

将: $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t}$, $\psi = (1 - \xi)\psi^n + \xi\psi^{n+1}$, $w = (1 - \xi)w^n + \xi w^{n+1}$

(其中 ψ^{n+1} , w^{n+1} 为第 $n+1$ 时间步的值)

代入(4.1)式并考虑到 ψ_{n+1} 与 ψ_n 已知, 得到:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right\}^{(e)} [K_{\dot{w}}]^{(e)} + [\bar{K}_{wn}]^{n+1} \cdot \xi^2 \{w^{n+1}\}^{(e)} \\
& + [\bar{K}_{wn}]^{n+1} (\xi - \xi^2) \{w^n\}^{(e)} + [\bar{K}_{wn}]^n (\xi - \xi^2) \{w^{n+1}\}^{(e)} \\
& + [\bar{K}_{wn}]^n (1 - \xi)^2 \{w^n\}^{(e)} + [K_w]^{(e)} \{ (1 - \xi)w^n + \xi w^{n+1} \}^{(e)} = 0
\end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 $\bar{K}_{wni}^{n+1} = \int_{\Omega^{(e)}} N_i \left(\frac{\partial \psi_{n+1}^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} - \frac{\partial \psi_{n+1}^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega^{(e)}$

$$\bar{K}_{wni}^n = \int_{\Omega^{(e)}} N_i \left(\frac{\partial \psi_n^{(e)}}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} - \frac{\partial \psi_n^{(e)}}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega^{(e)}$$

利用(2.2)式, 将(2.4)式和(2.5)'式代入(4.2)式并分部积分得到:

$$\left[-\frac{1}{\Delta t} [K_{\dot{w}}] + [\bar{K}_{wn}]^{n+1} \xi + [\bar{K}_{wn}]^n (\eta - \xi) + [K_w] \cdot \eta \right] \cdot \{w^{n+1}\}$$

$$= \left[\frac{1}{\Delta t} [K_w] - [K_{wn}]^{n+1}(\eta - \xi) - [K_{wn}]^n(1 - 2\eta + \xi) + (1 - \eta)[K_w] \right] \{w^n\} \quad (4.3)$$

其中 η , ξ 与前面的定义相同。

五、流函数—涡量方程组的改进TGFE解法、步骤及算例

流函数—涡量法一般是采用两方程迭代求解。我们在这里对流函数方程仍然采用：

$$\nabla^2 \psi^{n+1} = -\psi^n \quad (5.1)$$

则由此方程可解出 ψ^{n+1} 。再用上一节的方法求出 w^{n+1} ，如此反复迭代。

实际上，由于在第二步改进的TGFE算法时需要用到 ψ^n ，那么就必须在第一次迭代时给出 ψ 的初值。为避免这一点，我们在第一次迭代时采用一般的迭代算法，即对旋涡扩散方程用：

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} + \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y} \frac{\partial w_n}{\partial x} - \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial x} \frac{\partial w_n}{\partial y} = \nu \nabla^2 w_{n+1}$$

而对于其它各次迭代，采用改进的TGFE法。具体的计算步骤如下：

(1) 给定初值 w_n^0 ($n=1, \dots, N$)， N 为节点总数。

(2) 对以下方程：

$$\nabla^2 \psi^1 = -w^0$$

离散化后解方程组得 ψ^1 。

(3) 对以下方程：

$$\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} = \nu \nabla^2 w_1$$

离散化后解方程组得 w_1 。此步具体离散化公式见文献[4]。

(4) 设已知第 n 步的涡量值 w_n 和流函数值 ψ_n ，用以下方程：

$$\nabla^2 \psi^{n+1} = -w^n$$

离散化后解出 ψ^{n+1} 。

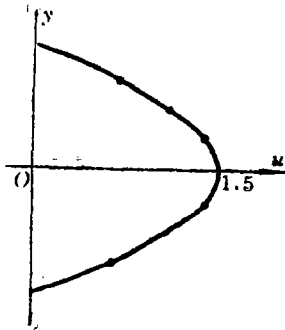
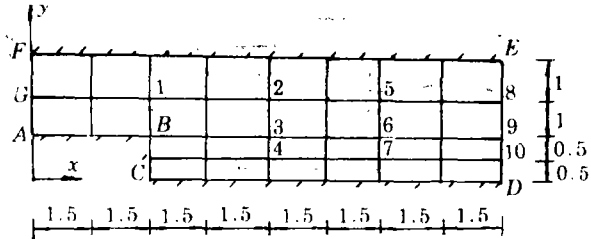
(2.5) 用(4.3)式解出 w^{n+1} 。

如此重复(2.4)、(2.5)两步骤直到达到“统计定常状态”^[5]，此时所获得的解被认为是稳态解。

利用以上方法，我们计算了以下两个算例。为比较起见，每个算例我们都用原方法及改进的方法同时计算，并比较计算时间、计算精度及收敛速度。

5.1 二维通道中的充分发展层流

对两平板间层流采用文献[6]的各向异性张力四边形单元计算，整个流动区域划分为48个单元，对称分布。计算所得结果(改进的TGFE)表示在图1上，用以表示在 $x=1.0$ 截面上计算的速度值与解析解的比较。实线代表解析解，圆点代表计算值。用TGFE及用改进TGFE的计算值在达到稳态解后完全一致，但迭代次数改进法仅为原方法的一半，说明改进法收敛速度较快。计算时间上，改进法约比原方法少用三分之一的CPU时间。

图1 $x=1.0$ 截面速度分布图2 $x-y$ 平面上的几何图形

5.2 后台阶绕流

图2所示为 $x-y$ 平面上的几何图形及网格剖分。流函数边界条件如下：

在 AF, ED 上： $\partial\psi/\partial x=0$

在 EF 上： $\psi=\partial\psi/\partial x=\partial\psi/\partial y=0$

在 G 点上： $\psi=0.5, \partial\psi/\partial y=1$

在 $ABCD$ 上：

$$\psi=1, \partial\psi/\partial x=\partial\psi/\partial y=0$$

涡量边界条件：

在 G 点上： $w=0.577, \partial w/\partial x=\partial w/\partial y=0$

在 ED 上： $\partial w/\partial x=0$

壁面上 w 值按下式计算：

$$w_n(x_0, y_0) = \frac{2}{\xi^2} [\psi_{n+1}(x_0, y_0) - \psi_{n+1}(x_1, y_1)]$$

其中 ξ 为垂直于壁面的坐标， (x_0, y_0) 为壁面点， (x_1, y_1) 为沿 ξ 方向离壁面一小段距离点。按以上边界条件计算，可求得 $\psi, u, w, \partial w/\partial y$ 的分布。现将用改进的TGFE法计算的 ψ 和 w 在 $Re=150$ 时的计算结果表示在图3和图4上：

为了与原TGFE法计算结果作一比较，在相同的初始条件、单元划分和边界条件的情况下，分别采用TGFE和改进的TGFE，将达到稳态解时各特征点的流函数值对应地列于表1（特征点标号见图2）。

在本算例计算中，两种方法得到表1的稳态解所用的CPU时间大致相等，改进的TGFE稍少；在同样初值条件下，原方法需迭代32次收敛，而改进的TGFE仅用24次迭代即达稳态，说明改进后收敛速度较快。

从上述所做的算例中可以看出，计算结果是令人满意的，这表明本文方法是精确、收敛和稳定的，并较之原方法有所改进。

六、结 论

- (1) 改进的TGFE法对原方法作了一些改进，经过算例检验效果良好。
- (2) 将改进的TGFE法与一般流函数—涡量迭代法有机地组合可以避免给出流函数的初值，从而使方法更加灵活。
- (3) 关于改进的TGFE法在其它类型方程计算中的应用及效果尚待进一步研究。

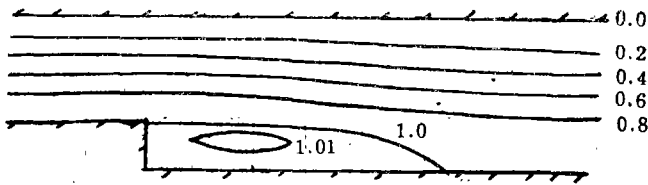


图3 流线分布图

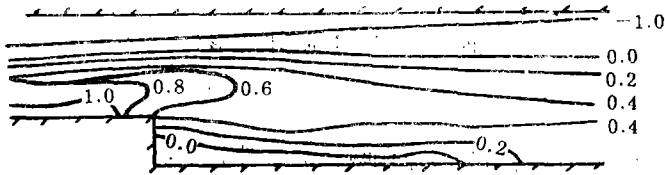
图4 等 ψ 线分布图

表 1 流函数值的比较

节点号	TGFE	修正TGFE
1	0.7221	0.7224
2	0.5670	0.5659
3	1.0271	1.0266
4	1.0744	1.0739
5	0.4740	0.4739
6	0.9292	0.9287
7	1.0112	1.0108

参 考 文 献

- [1] Donca, J., S. Giuliani and H. Laval, Time-accurate solution of advection-diffusion problems by finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45 (1984).
- [2] Hughes, T. J. R. and M. Mallet, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: IV, *Mechanical Engineering*, 58 (1986).
- [3] Baker, A. J., Finite element solution algorithm for incompressible fluid dynamics, *Finite Element in Fluids*, Vol. 2, Ed. by R. H. Gallagher, et al., John Wiley & Sons, New York (1975).
- [4] 章本照, 《流体力学中的有限元方法》, 机械工业出版社 (1986).
- [5] 朱刚、陈农、景思睿、胡庆康, 各向异性张力有限单元的构造及应用, 西安交通大学学报 (待发表).

A Modification of Taylor-Galerkin Finite Element Method and Its Application

Zhu Gang Gu Chuan-gang Hu Qing-kang

(Xi'an Jiaotong University, Xi'an)

Abstract

Two basic Hypotheses of Taylor-Galerkin finite element method are studied in this paper. One of them which is unreasonable is redefined. The only hypothesis becomes the standpoint of generalized finite element. We use this idea to analyze stream function-potential equations with the modified Taylor-Galerkin finite element method, and give the two-step solving method, which makes the solving process more reasonable than ever before. Several computational examples reveal that the results of this new method is satisfied.

Key words: hypothesis, finite element method, stream function, iteration