

细杆空间大挠度问题的基本方程 及其在钻井工程中的应用*

蔡宗熙

(天津大学, 1992年7月13日收到)

摘 要

考虑挠度相当于横截面尺寸几倍的情况, 使用拖带坐标系导出了分析细长直杆大挠度问题的基本方程. 针对石油钻井的实际情况, 简单叙述了一种分析底部钻具组合三维静力问题的有效方法, 指出了文献[8]中的错误.

关键词 钻具组合 大挠度 解析解

一、引 言

细长直杆的空间大挠度问题来自于工程实际, 例如石油钻井等. 钻井工作通常是逐步完成的. 每钻进30~40m之后就要通过测量确定新钻出的井眼的真实位置. 然后抽出钻具组合(见图4)并重新布置以便根据设计的井眼曲线改变钻头的指向及钻进力. 力学分析中将这一段称为计算段. 直的钻杆被放置于井眼之中并变形为一空间曲线. 变形后的转角往往小于 0.01rad 然而挠度可达到横截面尺寸的几倍. 因此, 这里的杆件大挠度问题是一个挠度与横截面尺寸相比很大但横截面的转角又足够小的问题. 这样的杆的分析是一个三维的几何非线性问题. 此时, 应变表达式中包含转角平方的项可略去不计, 但是在平衡方程中, 相对于杆轴线而言, 又必须考虑由变形引起的杆上外力及外力矩方向的变化, 并且扭矩和轴向力对弯曲的影响也要考虑. 如果将这样的问题当作小挠度情况处理从而变成象材料力学中那样的线性问题, 则由于忽视耦合效应可能会使最后结果的误差很大. 特别是当杆件与井壁发生接触时, 考虑或不考虑耦合效应的结果的差别更大.

已经发表了许多关于杆的大挠度问题的研究成果^{1~6}, 由于它的复杂性, 它们都是采用有限元或其他数值方法求解. 因为计算量太大这些方法很难在钻井现场使用. 本文中采用另外的途径解决此问题. 下面将导出这一问题的足够精确的基本方程.

事实上细长杆的大挠度问题与薄板大挠度问题有某些相似之处.

本文中只限于讨论圆截面直杆(简称圆杆). 如果横截面不是圆形则须考虑横截面的翘曲.

* 赵祖武推荐.

二、利用拖带坐标的变形分析

考虑一个本文中简称为圆杆的圆截面细长直杆。为分析杆的变形采用拖带坐标 ξ^i ，并另取一空间固定的笛卡尔坐标系 x^i 作计算之用，其基矢量用 e_i 表示。两坐标的原点均取在杆初端上。变形前的杆是直的，我们将 e_3 取为顺变形前杆轴线方向的单位矢量。在参考构形中（初始状态 $t=0$ ），拖带坐标的基矢量取为 $\dot{G}_i = e_i$ 。拖带坐标与杆件一起变形并用 G_i 表示即时构形中的基矢量。因为杆细长，为了避免失稳，轴向力不能太大，因而轴向应变很小，可忽略不计。因此， ξ^3 也是杆变形后从原点量起的轴线的长度。

考虑 ξ^3 为常数的横截面。对于细长杆剪切变形可以忽略不计且杆横截面形状保持不变。因此，即时构形中的横截面可以从其初始位置通过刚体运动而得到。这一运动可分为平移和旋转两部分，后者为小量可用矢量 θ 表示。其沿 \dot{G}_3 方向的分量为扭转角 θ^3 ，原点处 θ^3 取为零。横截面中心的位移用矢量 u 表示。用 U 表示横截面上任一点的位移， $\dot{\rho} = \xi^1 \dot{G}_1 + \xi^2 \dot{G}_2$ 表示所考虑点相对于横截面中心的位置矢径，如图1所示。则有

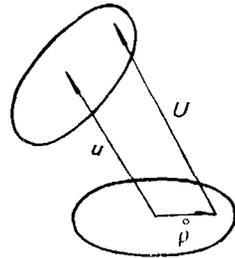


图1 变形前后的横截面

$$U = u + \theta \times \dot{\rho} \tag{2.1}$$

将上式中的右端项沿 \dot{G}_i 分解得

$$U = (\dot{u}^1 - \xi^2 \dot{\theta}^3) \dot{G}_1 + (\dot{u}^2 + \xi^1 \dot{\theta}^3) \dot{G}_2 + (\dot{u}^3 + \xi^2 \dot{\theta}^1 - \xi^1 \dot{\theta}^2) \dot{G}_3 \tag{2.2}$$

上式中 \dot{u}^i 及 $\dot{\theta}^i$ 分别为 u 及 θ 沿 \dot{G}_i 方向的分量且仅为 ξ^3 的函数。因此变形后杆内各点 ξ^i 的位置矢径为

$$R = \dot{R} + U = \xi^i \dot{G}_i + U \tag{2.3}$$

此处 \dot{R} 为点 ξ^i 在参考构形中的位置矢径。由(2.2)、(2.3)可以求出即时构形中的基矢量 $G_i = \partial R / \partial \xi^i$,

$$G_1 = \dot{G}_1 + \dot{\theta}^3 \dot{G}_2 - \dot{\theta}^2 \dot{G}_3 \tag{2.4a}$$

$$G_2 = -\dot{\theta}^3 \dot{G}_1 + \dot{G}_2 + \dot{\theta}^1 \dot{G}_3 \tag{2.4b}$$

$$G_3 = \left(\frac{d\dot{u}^1}{d\xi^3} - \xi^2 \dot{\omega} \right) \dot{G}_1 + \left(\frac{d\dot{u}^2}{d\xi^3} + \xi^1 \dot{\omega} \right) \dot{G}_2 + \left(1 + \frac{d\dot{u}^3}{d\xi^3} + \xi^2 \frac{d\dot{\theta}^1}{d\xi^3} - \xi^1 \frac{d\dot{\theta}^2}{d\xi^3} \right) \dot{G}_3 \tag{2.4c}$$

这里我们定义 $\dot{\omega}$ 为

$$\dot{\omega} = d\dot{\theta}^3 / d\xi^3 \tag{2.5}$$

由于忽略了剪切变形，变形以后的横截面仍然垂直于变形后的轴线。注意到杆的转角较小， $\partial / \partial \xi^3$ 近似等于 $\partial / \partial x^3$ ，我们有

$$\dot{\theta}^1 = -\partial \dot{u}^2 / \partial x^3 \doteq -d\dot{u}^2 / d\xi^3 \tag{2.6a}$$

$$\dot{\theta}^2 = -\partial \dot{u}^1 / \partial x^3 \doteq d\dot{u}^1 / d\xi^3 \tag{2.6b}$$

由于忽略了杆轴线上的轴向应变有

$$d\dot{u}^3 / d\xi^3 = 0 \tag{2.7}$$

这意味着杆轴线上对应着某一 ξ^3 的长度不变。这一特征在推导(2.6)式时已经用到了。

将(2.6)、(2.7)代入(2.4)式,得

$$G_1 = \dot{G}_1 + \theta^3 \dot{G}_2 - \frac{d\dot{u}^1}{d\xi^3} \dot{G}_3 \quad (2.8a)$$

$$G_2 = -\theta^3 \dot{G}_1 + \dot{G}_2 - \frac{d\dot{u}^2}{d\xi^3} \dot{G}_3 \quad (2.8b)$$

$$G_3 = \left(\frac{d\dot{u}^1}{d\xi^3} - \xi^2 \dot{\omega} \right) \dot{G}_1 + \left(\frac{d\dot{u}^2}{d\xi^3} + \xi^1 \dot{\omega} \right) \dot{G}_2 + \left(1 - \xi^1 \frac{d^2 \dot{u}^1}{(d\xi^3)^2} - \xi^2 \frac{d^2 \dot{u}^2}{(d\xi^3)^2} \right) \dot{G}_3 \quad (2.8c)$$

用 g_i 表示变形后杆轴线上的基矢量,在(2.8)中令 $\xi^1 = \xi^2 = 0$,得

$$g_1 = \dot{G}_1 + \theta^3 \dot{G}_2 - \frac{d\dot{u}^1}{d\xi^3} \dot{G}_3 \quad (2.9a)$$

$$g_2 = -\theta^3 \dot{G}_1 + \dot{G}_2 - \frac{d\dot{u}^2}{d\xi^3} \dot{G}_3 \quad (2.9b)$$

$$g_3 = \frac{d\dot{u}^1}{d\xi^3} \dot{G}_1 + \frac{d\dot{u}^2}{d\xi^3} \dot{G}_2 + \dot{G}_3 \quad (2.9c)$$

利用(2.8)式可以求得度量张量的协变分量

$$G_{11} = G_{22} = 1, \quad G_{12} = G_{21} = 0 \quad (2.10a)$$

$$G_{13} = G_{31} = -\xi^2 \dot{\omega} \quad (2.10b)$$

$$G_{23} = G_{32} = \xi^1 \dot{\omega} \quad (2.10c)$$

$$G_{33} = 1 - 2\xi^1 \frac{d^2 \dot{u}^1}{(d\xi^3)^2} - 2\xi^2 \frac{d^2 \dot{u}^2}{(d\xi^3)^2} \quad (2.10d)$$

此处略去了转角的二次项。从(2.10)看出,轴线上因为 $\xi^1 = \xi^2 = 0$,故度量张量 g_{ij} 为单位张量。因此轴线上的矢量和张量不必区分是协变还是逆变的。由(2.10)式可求得第一类克里斯托夫符号

$$\Gamma_{13,2} = \Gamma_{31,2} = -\Gamma_{23,1} = -\Gamma_{32,1} = \dot{\omega} \quad (2.11a)$$

$$\Gamma_{33,1} + \xi^2 d\dot{\omega}/d\xi^3 = -\Gamma_{13,3} = -\Gamma_{31,3} = d^2 \dot{u}^1 / (d\xi^3)^2 \quad (2.11b)$$

$$\Gamma_{33,2} - \xi^1 d\dot{\omega}/d\xi^3 = -\Gamma_{23,3} = -\Gamma_{32,3} = d^2 \dot{u}^2 / (d\xi^3)^2 \quad (2.11c)$$

$$\Gamma_{33,3} = -\xi^1 d^3 \dot{u}^1 / (d\xi^3)^3 - \xi^2 d^3 \dot{u}^2 / (d\xi^3)^3 \quad (2.11d)$$

其余的 $\Gamma_{ij,k} = 0$ 。 (2.11e)

用小写的 $\gamma_{ij,k}$ 表示杆轴线上的第一类克里斯托夫符号,在(2.11)式中令 $\xi^1 = \xi^2 = 0$,得

$$\gamma_{13,2} = \gamma_{31,2} = -\gamma_{23,1} = -\gamma_{32,1} = \dot{\omega} \quad (2.12a)$$

$$\gamma_{33,1} = -\gamma_{13,3} = -\gamma_{31,3} = d^2 \dot{u}^1 / (d\xi^3)^2 \quad (2.12b)$$

$$\gamma_{33,2} = -\gamma_{23,3} = -\gamma_{32,3} = d^2 \dot{u}^2 / (d\xi^3)^2 \quad (2.12c)$$

其余的 $\gamma_{ij,k} = 0$ (2.12d)

第二类克里斯托夫符号为

$$\gamma^k_{ij} = g^{kl} \gamma_{ij,l} \quad (2.13)$$

上式中 g^{kl} 为度量张量的逆变分量。由于度量张量在轴线上为单位张量,(2.13)式表明 γ^k_{ij} 与 $\gamma_{ij,k}$ 的值相同。

用 χ 表示杆轴线的曲率矢量。由微分几何有

$$\chi = d\mathbf{g}_3/d\xi^3 = \nu^k_3 \mathbf{g}_k \quad (2.14)$$

用 \mathbf{M} 表示横截面上的合力偶, 则其在杆轴线法平面内的分量就是弯矩矢量 $\mathbf{M} - M^3 \mathbf{g}_3$ 。忽略剪切对挠曲线的影响并注意到圆杆弯矩矢量与曲率矢量垂直, 有

$$\mathbf{M} \times \mathbf{g}_3 = EI \chi \quad (2.15)$$

上式中 EI 为杆的弯曲刚度。就圆杆而言相对于 \mathbf{g}_1 及 \mathbf{g}_2 的 EI 值是相同的。将(2.12b), (2.12c)及(2.14)代入(2.15)式, 得

$$M^1 = -EI d^2 \hat{u}^2 / (d\xi^3)^2, \quad M^2 = EI d^2 \hat{u}^1 / (d\xi^3)^2 \quad (2.16)$$

\mathbf{M} 沿杆轴线方向的分量就是扭矩 M^3

$$M^3 = GJ d\theta^3 / d\xi^3 = GJ \omega \quad (2.17)$$

上式中 GJ 为杆的扭转刚度, ω 为单位杆长上扭转角的改变。由于转角较小, ω 可以用 θ 在 $\hat{\mathbf{G}}_3$ 方向的分量的导数 $\hat{\omega}$ 来代替。

$$M^3 = GJ d\theta^3 / d\xi^3 = GJ \hat{\omega} \quad (2.18)$$

三、基本方程

考虑如图2所示变形后的杆微元 $d\xi^3$ 。微元两端的位置矢径分别用 \mathbf{r} 及 $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ 表示。作用于两端的合力及合力矩分别用 \mathbf{F} , $\mathbf{F} + (d\mathbf{F}/d\xi^3)d\xi^3$ 及 \mathbf{M} , $\mathbf{M} + (d\mathbf{M}/d\xi^3)d\xi^3$ 表示。分布的体积外力及表面外力分别用 \mathbf{q}_B 及 \mathbf{q}_S 表示。单位杆长的外力矩用 \mathbf{m} 表示。用 \mathbf{p} 表示单位杆长上的外力

$$\mathbf{p} = \iint_A \mathbf{q}_B dA + \int_S \mathbf{q}_S dS \quad (3.1)$$

上式中 A 和 S 分别为横截面的面积和边界。采用这些符号可写出微元的平衡方程为

$$d\mathbf{F}/d\xi^3 + \mathbf{p} = 0 \quad (3.2a)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\xi^3} + \frac{d\mathbf{r}}{d\xi^3} \times \mathbf{F} + \mathbf{m} = 0 \quad (3.2b)$$

这里的 $d\mathbf{r}/d\xi^3$ 就是 \mathbf{g}_3 。这些方程的分量形式为

$$F^i|_3 + p^i = 0 \quad (3.3a)$$

$$M^i|_3 + g^{ik} F^j e_{jks} + m^i = 0 \quad (3.3b)$$

如前所述上式中的逆变度量张量 g^{ik} 为单位张量。 e_{jks} 是置换张量。 $F^i|_3$ 及 $M^i|_3$ 分别为 F^i , M^i 关于 ξ^3 的协变导数。

将(2.12), (2.16)及(2.18)代入(3.3b)并注意到对圆杆有 $J = 2I$, 得

$$M^3 = T = GJ \hat{\omega} = - \int m^3 d\xi^3 \quad (3.4a)$$

$$F^1 = -EI \frac{d^3 \hat{u}^1}{(d\xi^3)^3} + \mu T \frac{d^2 \hat{u}^2}{(d\xi^3)^2} - m^1 \quad (3.4b)$$

$$F^2 = -EI \frac{d^3 \hat{u}^2}{(d\xi^3)^3} - \mu T \frac{d^2 \hat{u}^1}{(d\xi^3)^2} + m^2 \quad (3.4c)$$

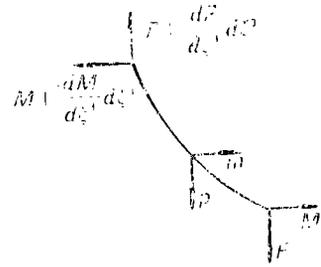


图2 微分单元

上式中 μ 为泊松比, T 为外扭矩. 展开(2.3a), 得

$$dF^1/d\xi^3 + \gamma_{13}^1 F^3 + p^1 = 0 \tag{3.5a}$$

$$dF^2/d\xi^3 + \gamma_{13}^2 F^3 + p^2 = 0 \tag{3.5b}$$

$$dF^3/d\xi^3 + \gamma_{13}^3 F^3 + p^3 = 0 \tag{3.5c}$$

利用(2.12)式, (3.5c)可表达为

$$F^3 = - \int \left[p^3 - F^1 \frac{d^2 \hat{u}^1}{(d\xi^3)^2} - F^2 \frac{d^2 \hat{u}^2}{(d\xi^3)^2} \right] d\xi^3 \tag{3.6}$$

将(2.12)、(3.4b), (3.4c)代入(3.5a)及(3.5b)式并略去 $\hat{\omega}$ 的平方项得

$$EI \frac{d^4 \hat{u}^1}{(d\xi^3)^4} - (1+2\mu)T \frac{d^3 \hat{u}^2}{(d\xi^3)^3} - F^3 \frac{d^2 \hat{u}^1}{(d\xi^3)^2} + \frac{dm^1}{d\xi^3} + \hat{\omega}m^1 + \mu m^3 \frac{d^2 \hat{u}^2}{(d\xi^3)^2} - p^1 = 0 \tag{3.7a}$$

$$EI \frac{d^4 \hat{u}^2}{(d\xi^3)^4} + (1+2\mu)T \frac{d^3 \hat{u}^1}{(d\xi^3)^3} - F^3 \frac{d^2 \hat{u}^2}{(d\xi^3)^2} - \frac{dm^2}{d\xi^3} + \hat{\omega}m^2 - \mu m^3 \frac{d^2 \hat{u}^1}{(d\xi^3)^2} - p^2 = 0 \tag{3.7b}$$

方程(3.7)即为圆杆在大挠度条件下的基本方程. 其中第二、三项分别表示扭矩及轴向力对弯曲的影响. (3.6)及(3.7)中的 p^i 及 m^i 为作用于单位杆长上外载荷沿 \mathbf{g}_i 方向的分量. 通常 \mathbf{g}_i 与 \hat{u}^1 及 \hat{u}^2 有关, 因而 p^i, m^i 及 F^3 是 \hat{u}^1 及 \hat{u}^2 的函数, 即使在外载荷明确给定的情况下, 它们也须与位移一起确定.

以下讨论基本方程在钻井工程中的应用.

考虑外载荷由杆的自重和钻井泥浆的浮力组成, 因此 \mathbf{p} 的方向总是铅垂向下的. 杆与井壁间的接触反力按接触问题考虑, 这里没有将它包括在内. 为明确起见, 笛卡尔坐标系中的 \mathbf{e}_1 取为通过 \mathbf{e}_3 的铅垂面内的单位矢量, \mathbf{e}_3 通常是倾斜的并指向上方. 矢量 \mathbf{e}_2 则由 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$ 确定, 因此它位于某一水平面内, 如图3所示. 用 α 表示 \mathbf{e}_3 与铅垂线的夹角, 则有

$$\mathbf{p} = p \sin \alpha \mathbf{e}_1 - p \cos \alpha \mathbf{e}_3 \tag{3.8}$$

此处 \mathbf{e}_1 的指向朝下. 注意到 $\mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{G}}_i$, 利用(2.9)式可以得到

$$p^1 = p \sin \alpha + p \cos \alpha d\hat{u}^1/d\xi^3 \tag{3.9a}$$

$$p^2 = -\theta^3 p \sin \alpha + p \cos \alpha d\hat{u}^2/d\xi^3 \tag{3.9b}$$

$$p^3 = -p \cos \alpha + p \sin \alpha d\hat{u}^1/d\xi^3 \tag{3.9c}$$

钻头上($\xi^3=0$)的轴向压力通常称为钻压, 在具体问题中是给定的并记作 W . 将(3.9c)代入(3.6), 得

$$F^3 = -W + \int_0^{\xi^3} \left\{ p \cos \alpha - p \sin \alpha \frac{d\hat{u}^1}{d\xi^3} - EI \left[\frac{d^2 \hat{u}^1}{(d\xi^3)^2} \frac{d^3 \hat{u}^1}{(d\xi^3)^3} + \frac{d^2 \hat{u}^2}{(d\xi^3)^2} \frac{d^3 \hat{u}^2}{(d\xi^3)^3} \right] \right\} d\xi^3 \tag{3.10}$$

将(3.9a)、(3.9b)代入(3.7)式并记住 $\mathbf{m}=0$, 得

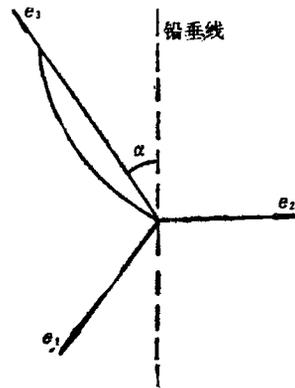


图3 参考坐标系

$$EI \frac{d^4 \dot{u}^1}{(d\xi^3)^4} - (1+2\mu)T \frac{d^3 \dot{u}^2}{(d\xi^3)^3} - F^3 \frac{d^2 \dot{u}^1}{(d\xi^3)^2} - p \cos \alpha \frac{d \dot{u}^1}{d\xi^3} = p \sin \alpha \quad (3.11a)$$

$$EI \frac{d^4 \dot{u}^2}{(d\xi^3)^4} + (1+2\mu)T \frac{d^3 \dot{u}^1}{(d\xi^3)^3} - F^3 \frac{d^2 \dot{u}^2}{(d\xi^3)^2} - p \cos \alpha \frac{d \dot{u}^2}{d\xi^3} = -\theta^3 p \sin \alpha \quad (3.11b)$$

(3.10) 及 (3.11) 即为分析钻具组合 (见图4) 大挠度问题的基本方程。通常, EI , μ , T , p 均为 ξ^3 的已知函数或常数, 而 θ^3 则可由方程 (2.5) 通过积分而得到。

因为钻杆与扶正器的横截面均为中心带孔的圆, 钻具组合绕自身轴线的转动不影响基本方程。

文献 [8] 采用固定的空间坐标系, 推导出了组相当复杂的含有几十项的基本方程, 然后通过忽略其中的大多数项进行简化。简化后的结果与前节的方程 (3.11) 形式相同, 但其第二项的系数是 $-T$ 而不是 $(1+2\mu)T$ 。这将在杆分析的最后结果中产生严重的误差。不难看出, 方程 (3.11) 中第二项代表因扭矩而引起的 \dot{u}^1 与 \dot{u}^2 间的耦合作用。由于在计算段内 (3.11b) 中的 θ^3 及载荷项 $-\theta^3 p \sin \alpha$ 均较小, 耦合项 $(1+2\mu)T d^3 \dot{u}^1 / (d\xi^3)^3$ 变成为主要项。因此第二项系数的错误将使 \dot{u}^2 , $d\dot{u}^2/d\xi^3$ 及 F^2 有很大的误差。在钻头上 (原点), $\theta^3=0$, 根据文献 [8] 中方程算出的 F^2 可能出现正负号的错误。而且钻头上的 $d\dot{u}^2/d\xi^3$ 及 F^2 又是影响将要钻成的井眼轨迹的两个非常重要的因素。

在文献 [8] 中, 其类似于 (3.11) 的方程的第三项的系数 F^3 取为变形前杆的轴向力因而与 \dot{u}^1 及 \dot{u}^2 无关。由于平衡方程是建立在变形以后的微元上的, 这样处理显然是不合理的。特别是当钻压 W 较小且图 3 中的 α 接近于 90° (大斜度井和水平井的情况) 时其误差将会很大。

(3.11) 式由关于 \dot{u}^1 及 \dot{u}^2 的两个耦联的非线性常微分方程组成。可用复变函数方法解决耦联问题。令

$$A = EI, \quad B = j(1+2\mu)T, \quad C = -p \cos \alpha \quad (3.12a)$$

$$D = (1 - j\theta^3) p \sin \alpha \quad (3.12b)$$

$$Z = \dot{u}^1 + j\dot{u}^2 \quad (3.12c)$$

上式中 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位。将 (3.12) 代入 (3.11) 得

$$A \frac{d^4 Z}{(d\xi^3)^4} + B \frac{d^3 Z}{(d\xi^3)^3} - F^3 \frac{d^2 Z}{(d\xi^3)^2} + C \frac{dZ}{d\xi^3} = D \quad (3.13)$$

上式中的 F^3 是 \dot{u}^1 及 \dot{u}^2 的函数因而也是 Z 的函数。(3.13) 为一复非线性常微分方程, 可使用直接迭代方法求解。对第 $k+1$ 个迭代步, 由 Z 的第 k 次近似值计算 F^3 的第 k 次近似值并且将它代入 (3.13), 得到一个线性的常微分方程, 然后根据边界及接触条件解此方程以求得 Z 的第 $k+1$ 次近似值。重复上述过程直至达到所要求的精度为止。

由于 (3.13) 为变系数的常微分方程, 较难求解。我们将杆件划分成许多小的区间, 并且 (3.13) 中的系数 A, B, C 在每一区间上取为常数, F^3 可近似地用其平均值代替, 于是在每一小区间内 (3.13) 成为常系数的常微分方程。在一个典型的小区间内, 它的解析解为

$$Z = Z_p + \sum_{n=0}^4 \gamma_n \exp[\beta_n \xi^3] \quad (3.14)$$

上式中 Z_p 为方程 (3.13) 的一个特解, 并且 β_n ($n=1 \sim 4$) 为方程 (3.13) 的特征方程的特征根。

(3.14)中的 $\gamma_n (n=1 \sim 4)$ 为由边界及连接条件所确定的待定系数。

值得注意的是,杆位于井眼之中并且部分地与井壁接触,因此引起了非线性问题。所以,即使不考虑因为 F^3 取决于 \dot{u}^1 及 \dot{u}^2 而产生的非线性,整个问题也必须迭代求解。如果我们将两种迭代合并于一个过程,则用(3.10)来计算 F^3 并不增加任何困难和计算量。

以上简单介绍的计算方法将在另一篇文章中仔细讨论。

四、验证基本方程的一个例子

石油钻井中的底部钻具组合由钻杆、钻头及一个或多个扶正器组成,如图4所示。每一部分钻杆或扶正器均为等截面的空心圆杆。分析这一结构时我们最关心的是钻头附近的受力及变形情况,因为它们直接影响将要钻成的井眼轨迹。因此,力学分析只在靠近钻头的30~40m杆段,即引言中所说的计算段中进行,而整个钻杆却经常有数公里之长。

基于本文所提出基本方程,考虑与井壁的接触问题,编制了分析底部钻具组合弯曲问题的计算机软件。由接触引起的杆与井壁的相互作用按弹性接触问题处理。结合本软件及其他有关程序,借助于这样的分析在国内某大油田的11口斜井的现场进行钻进。根据测量可证实它们与预计的井眼轨迹符合得足够好。每50m井眼长度上的水平及铅垂位置的最大误差分别在 ± 0.4 及 ± 0.1 m左右。

这一例子表明本文所给出的基本方程对分析底部钻具组合空间大挠度问题来说是适用的。

致谢 撰写此文时,赵祖武教授给予了悉心的指导并提供了许多宝贵的建议,作者对此表示衷心的感谢!

参 考 文 献

- [1] Naghdi, P. M. and M. B. Rubin, On the significance of normal cross-sectional extension in beam theory with application to contact problems, *Int. J. Solids Structures*, 25(3) (1989).
- [2] Saje, M., A variational principle for finite planar deformation of straight slender elastic beams, *Int. J. Solids Structures*, 26(8) (1990).
- [3] Iwakuma, T., Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation, *Comput. Struct.*, 34(2) (1990).
- [4] Cardona, A., Beam finite element, nonlinear theory with finite rotations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26(11) (1988).
- [5] Argyris, J. H., P. C. Dunne and D. W. Scharpf, On large displacement small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 14 (1978).

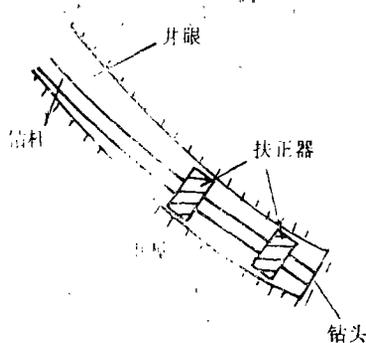


图4 底部钻具组合

- [6] Bathe, K. J. and S. Bolourch, Large displacement analysis of three-dimensional beam structures, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 14 (1979).
- [7] Bathe, K. J. and S. Mijailovich, Finite element analysis of frictional contact problems, *J. Theoretical and Applied Mechanics*, 17 (1988).
- [8] Walker, B. H. and M. B. Friedman, Three-dimensional force and deflection analysis of a variable cross section drill-string, *J. Pressure Vessel Technology*, 99(2) (1977).

Fundamental Equations of Large Spatial Deflection Problems of Rods and Its Application to Drilling Engineering

Cai Zong-xi

(Tianjin University, Tianjin)

Abstract

The fundamental equations for analysis of a straight slender rod which deforms at large deflections of order of several times of the dimension of the cross section of the rod are derived by using convected coordinate system. In accordance with the practice of oil drilling, an effective method of three dimensional static analysis of bottom-hole assemblies is simply described. Errors in reference [8] are pointed out.

Key words bottom-hole assemblies, large displacement, analytic solution