

任意四边形杂交Mindlin板单元

秦 奕 张敬宇

(天津建筑设计院) (天津大学机电分校)

(陈大鹏推荐, 1991年11月14日收到)

摘 要

本文把基于虚功原理的杂交有限元模型用于板弯曲问题, 构造了一个考虑横向剪应变的任意四边形新型板单元. 本单元的突出优点是采用了一种比较合理的位移插值函数, 使之能较真实地模拟各类板的变形, 且用的自由度最少. 文中对此单元作了比较广泛的数值试验, 计算结果表明它对板厚有相当宽的适用范围, 对于各种例题均能在较粗的网格下得到满意的精度.

关键词 杂交元 Mindlin板 零能模式 特征值试验

一、前 言

平板及壳体在工程中应用颇为广泛, 因而板壳结构分析就成为工程师们和力学工作者关注的问题. 板壳元的构造有各种方法, 而采用平面单元和平板弯曲单元迭加的方法更受青睐, 因此, 研究平板问题和壳体问题都需要有优良的平板单元. 许多学者对平板单元作了研究, 构造了各种板单元. 其中, 文[1]构造的板单元性能较好, 但其位移插值函数仍有缺陷, 尤其在处理纯弯曲问题时就更明显. 本文采用4个内部自由度, 并通过引入约束条件在单元级消去了这些内部自由度, 从而, 克服了文[1]的不足, 取得了令人满意的结果.

据文[2]介绍, 用杂交法构造板单元有其明显的优势. 因此, 本文采用文[3]建立杂交有限元的列式方法构造了一种新型任意四边形 Mindlin 板弯曲单元. 其基本原理是在单元内使用虚应力原理, 在整体结构使用虚位移原理. 因为虚应力原理和虚位移原理是连续体力学的基本原理, 所以此法适合于不易找泛函或泛函不存在的问题, 适用于非保守系统, 本文构造杂交型单元的列式方法有普遍意义.

二、基于虚功原理的任意四边形Mindlin板弯曲杂交元列式

1. **等参坐标** 取单元形状为任意四边形, 单元局部坐标与整体坐标及节点编号如图1所示.

且有坐标变换式

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \quad (2.1)$$

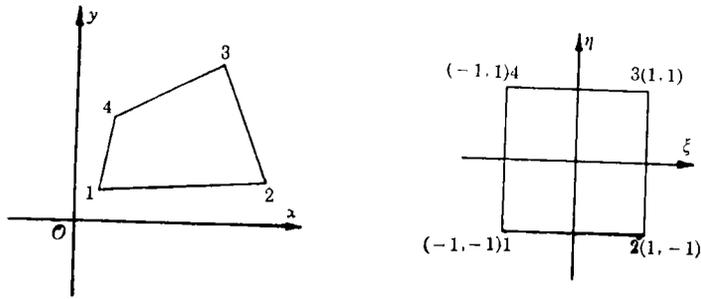


图1 等参坐标

其中,

$$N_i(\xi, \eta) = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) / 4 \quad (2.2)$$

ξ_i, η_i 为节点 i 对应的等参坐标值 (见图1)。

2. 单元内广义应力的插值函数 我们要求广义应力满足如下形式的平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + P_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

这里, P_z 为板的横向分布载荷。

设

$$\{\sigma\} = [P]\{\beta\}^e + \{\sigma^p\} \quad (2.4)$$

式中, $\{\beta\}^e$ 为单元的一个待定参数列阵,

$$\{\sigma\} = \{M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y\}^T \quad (2.5)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\{\sigma^p\} = \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{P_z}{2}xy \quad -\frac{P_z}{2}x \quad -\frac{P_z}{2}y \right\}^T \quad (2.7)$$

由(2.4)式不难给出单元边界力如下

$$\{T\} = [\theta][P]\{\beta\}^e + [\theta]\{\sigma^p\} \quad (2.8)$$

式中,

$$\{T\} = \{M_n, M_{nt}, Q_n\}^T \quad (2.9)$$

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 2\sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

α 为单元边界外法线与 x 轴夹角。

单元内应变由物理方程得

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (2.11)$$

式中,

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/B & -\mu/B & 0 & 0 & 0 \\ -\mu/B & 1/B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu)/B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/D_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/D_m \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\{\epsilon\} = \left\{ \frac{\partial\theta_y}{\partial x} - \frac{\partial\theta_x}{\partial y}, \frac{\partial\theta_y}{\partial y} - \frac{\partial\theta_x}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial x} + \theta_y, \frac{\partial W}{\partial y} - \theta_x \right\}^T \quad (2.13)$$

其中,

$$B = Eh^3/12, \quad D_m = Eh/2(1+\mu)m$$

m 为将横向剪应力视为沿厚度均匀分布时的折减系数,按能量相当可取 $m=1.2$, h 为板厚。

3. 单元位移的插值函数

(1) 三种单元位移模式的多项式形式 就有限元协调模型而言,选用合适的位移模式是至关重要的,在杂交应力模型中,边界位移(有时还有域内位移)的假设也同样重要。选用的位移模式应保证收敛,且收敛速度要快,并应尽可能使计算简单。

对任意四边形单元,最简单并可能采用的位移模式是

$$\left. \begin{aligned} W &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ \theta_x &= \beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\eta + \beta_4\xi\eta \\ \theta_y &= \gamma_1 + \gamma_2\xi + \gamma_3\eta + \gamma_4\xi\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

这正是文[1]采用的位移模式。每个角节点取三个位移分量 W_i, θ_{xi} 和 θ_{yi} ,正好可确定(2.14)式的全部待定参数,我们称它为“Ⅰ号单元”。这种模式能反映刚体位移和板的常应变,且在相邻单元的交界处满足位移连续关系。计算表明,此种单元在网格逐渐细分时,收敛速度比较慢,此现象在薄板时更明显。“Ⅰ号单元”收敛速度慢的原因,主要在于 W, θ_x 和 θ_y 都取双线性插值函数,致使薄板挠度的形成主要靠单元间绕边界的相对转动来实现,而法线转角在单元边界上又是连续的,这就必然会伴随过大的横向剪切变形,使单元显得传递弯曲变形过于刚硬。当然,板越薄,变形中横向剪切所占比重越小,夸大了的横向剪切变形的影响也就越大。另外,由薄板Kirchhoff假设知: $\theta_x = \partial W / \partial y, \theta_y = -\partial W / \partial x$,所以, θ_x, θ_y 中的一次项应相应于 W 中的二次项。因此,把 W, θ_x 和 θ_y 取为同阶形式是不适宜的。

根据以上分析,改进“Ⅰ号单元”的途径是在 W 的插值函数中增加 ξ, η 的高次项。

可设

$$\left. \begin{aligned} W &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 \\ \theta_x &= \beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\eta + \beta_4\xi\eta \\ \theta_y &= \gamma_1 + \gamma_2\xi + \gamma_3\eta + \gamma_4\xi\eta \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

每个角节点取三个自由度 W_i, θ_{xi} 和 θ_{yi} ,每个边中节点取一个自由度 W_i ,即可唯一确定(2.15)式的全部待定参数,我们称它为“Ⅱ号单元”。显然,其相邻单元交界上挠度的连续性可以保证。

“Ⅱ号单元”与“Ⅰ号单元”比,边中节点的引入对于同样的网格划分,所需计算机的存贮量和计算时间都将增加。因此,“Ⅱ号单元”也存在不足,改进的办法是不采用边中节点。著名的Wilson不协调元采用静凝聚方法消除内部自由度,其实施过程涉及矩阵求逆,不能给

出显式；另一种方法是引入各种约束条件，从而消去内部自由度。如文[4]引入15个约束条件，消去了15个内部自由度，文[5]、[6]针对三角形单元，利用单元每边剪力 Q_i 等于常数，引入3个约束条件，消去了3个内部自由度，其实施过程简单明了。本文借鉴这种思路，将其运用到所构造的单元。 Q_i 由下式确定

$$Q_i = D_m (\partial W / \partial t - \theta_n) \quad (2.16)$$

式中， D_m 同(2.12)式， t, n 分别为单元边界的切向和法向坐标， W, θ_n 分别为边界挠度和中面法线绕 n 轴的转角。任意四边形单元的四条边可提供4个约束条件，从而在单元级消去了4个内部自由度，使计算时间没有因内部自由度的引入而增加过多。这样，每条边的挠度 W 可由角节点位移参数（包括 θ_x, θ_y ）确定，相邻单元的位移协调也能保证。我们称它为“Ⅲ号单元”。

综合以上三种单元，“Ⅲ号单元”具备了“Ⅱ号单元”的优点，而其计算时间与“Ⅰ号单元”相近，亦即，它吸取了“Ⅰ号单元”和“Ⅱ号单元”的优点。所以，再配合适当的域内应力插值，完全可以构造一种性能优良的单元。

(2) 三种位移模式的插值函数 在单元内部假设位移为

$$\{u\} = [N] \{q\}^e \quad (2.17)$$

式中，

$$\{u\} = \{W \ \theta_x \ \theta_y\}^T \quad (2.18)$$

$$\{q\}^e = \{W_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ W_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ W_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ W_4 \ \theta_{x4} \ \theta_{y4}\}^T \quad (2.19)$$

$[N]$ 是单元位移插值函数矩阵。三种位移模式的插值函数矩阵分述如下

$$[N_I] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

式中， $N_i (i=1,2,3,4)$ 同(2.2)式。

$$[N_{II}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \\ 0 & N_{11} & 0 & 0 & N_{21} & 0 & 0 & N_{31} & 0 & 0 & N_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{11} & 0 & 0 & N_{21} & 0 & 0 & N_{31} & 0 & 0 & N_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

式中， $N_{i1} (i=1,2,3,4)$ 与(2.2)式的 $N_i (i=1,2,3,4)$ 对应；

$$N_i = (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) \xi_i^2 \eta_i^2 / 4 \\ + (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) (1 - \xi_i^2) \eta_i^2 / 2 \\ + (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta_i^2) \xi_i^2 / 2 \quad (2.22)$$

$\xi_i, \eta_i (i=1,2,3,4,5,6,7,8)$ 为节点 i 对应的等参坐标值。

$$[N_{III}] = \begin{bmatrix} N_1 & K_1 & M_1 & N_2 & K_2 & M_2 & N_3 & K_3 & M_3 & N_4 & K_4 & M_4 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

式中， $N_i (i=1,2,3,4)$ 同(2.2)式；

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= [(a_1 l_1 - a_4 l_4) + a_4 l_4 \xi - a_1 l_1 \eta - a_1 l_1 \xi^2 + a_4 l_4 \eta^2 + a_1 l_1 \xi^2 \eta - a_4 l_4 \xi \eta^2] / 8 \\ K_2 &= [(a_2 l_2 - a_1 l_1) + a_2 l_2 \xi + a_1 l_1 \eta + a_1 l_1 \xi^2 - a_2 l_2 \eta^2 - a_1 l_1 \xi^2 \eta - a_2 l_2 \xi \eta^2] / 8 \\ K_3 &= [(a_3 l_3 - a_2 l_2) - a_2 l_2 \xi + a_3 l_3 \eta - a_3 l_3 \xi^2 + a_2 l_2 \eta^2 - a_3 l_3 \xi^2 \eta + a_2 l_2 \xi \eta^2] / 8 \\ K_4 &= [(a_4 l_4 - a_3 l_3) - a_4 l_4 \xi - a_3 l_3 \eta + a_3 l_3 \xi^2 - a_4 l_4 \eta^2 + a_3 l_3 \xi^2 \eta + a_4 l_4 \xi \eta^2] / 8 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

只要将(2.24)式中的 l_i 换成 m_i ，即是 $M_i (i=1,2,3,4)$ 的表达式。参看图1，令“1—2”边、

“2—3”边、“3—4”边、“4—1”边分别为第一、二、三、四条边,则(2.24)式中的 a_i , l_i 和 m_i 分别为第 i 条边边长的一半和外法线方向余弦。

(3) 三种位移模式的边界位移插值函数 设单元边界位移为

$$\{\bar{u}\} = [L]\{q\}^e \quad (2.25)$$

式中,

$$\{\bar{u}\} = \{\theta_{ib} \quad \theta_{nb} \quad W_b\}^T \quad (2.26)$$

$[L]$ 是边界位移插值函数矩阵。

下面以“Ⅰ号单元”的“1—2”边为例,给出插值函数矩阵 $[L]$ 。

令

$$\{u_b\} = [N_{Ib}]\{q\}^e \quad (2.27)$$

式中,

$$\{u_b\} = \{W_b \quad \theta_{ab} \quad \theta_{yb}\}^T \quad (2.28)$$

$[N_{Ib}]$ 由 $\eta = -1$ 代入(2.20)式得。再令

$$\{\bar{u}\} = [L_1]\{u_b\} \quad (2.29)$$

参看图2,不难得出

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

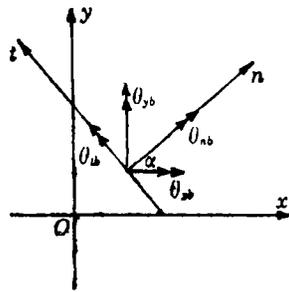


图2 边界位移几何关系

由(2.25)、(2.27)和(2.29)式得

$$[L] = [L_1][N_{Ib}] \quad (2.31)$$

类似地可导出另三条边边界位移的相应公式。“Ⅱ号单元”和“Ⅲ号单元”的边界位移可仿照“Ⅰ号单元”分别由 $[N_{II}]$ 和 $[N_{III}]$ 推得。

4. 对于单元使用虚应力原理 在单元内部使用虚应力原理,为此把单元看作一个边界位移全部暂时给定的弹性力学问题,这时,我们有变分形式的虚功方程

$$\int_{V_e} \delta\{\sigma\}^T \{\epsilon\} dV = \int_{S_e} \delta\{T\}^T \{\bar{u}\} dS \quad (2.32)$$

式中, V_e 为典型单元的区域, S_e 为单元的全部边界, $\{\sigma\}$ 为单元内的应力分量列阵, $\{\epsilon\}$ 为单元内的应变分量列阵, $\{T\}$ 是由内部应力场推得的单元边界力列阵, $\{\bar{u}\}$ 为单元边界 S_e 上的位移分量列阵。将式(2.4)、(2.8)、(2.11)和(2.25)代入(2.32),并应用一次虚应力原理,最后得

$$\{\beta\}^e = [A_1]^{-1}([G_a]\{q\}^e - [A_2]) \quad (2.33)$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} [A_1] &= \int_{V_e} [P]^T [C] [P] dV \\ [A_2] &= \int_{V_e} [P]^T [C] \{\sigma^t\} dV \\ [G_a] &= \int_{S_e} [P]^T [\theta]^T [L] dS \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

这就是说,我们选择内部参数 $\{\beta\}^e$,使其满足单元虚应力原理,从而建立起 $\{\beta\}^e$ 与单元节点位移的关系。

5. 对整体结构使用虚位移原理 我们采用如下形式的虚功方程

$$\sum_e \int_{V_e} \{\sigma\}^T \delta \{e\} dV = \sum_e \int_{V_e} P_z \delta W dV + \sum_e \int_{S_e^g} \{\bar{T}\}^T \delta \{\bar{u}\} dS \quad (2.35)$$

式中, \sum_e 表示对所有单元求和, P_z 为板的横向分布载荷, W 为单元内部的挠度, S_e^g 为给定力的边界, $\{\bar{T}\}$ 为给定的边界力。

令

$$\{\bar{T}\} = \{M_n \quad M_{nt} \quad \bar{Q}_n\}^T \quad (2.36)$$

将式(2.4)、(2.11)、(2.17)、(2.25)和(2.36)代入(2.35), 并应用一次虚位移原理, 最后得

$$\left(\sum_e [K] \right) \{q\} = \sum_e \{Q\} \quad (2.37)$$

其中, $\{q\}$ 为整体结构节点位移列阵,

$$\begin{aligned} [K] &= [G_a]^T [A_1]^{-1} [G_a] \\ \{Q\} &= \int_{S_e^g} [L]^T \{\bar{T}\} dS - \int_{S_e} [L]^T [\theta] \{\sigma\}^T dS + [G_a]^T [A_1]^{-1} [A_2] \end{aligned} \quad (2.38)$$

分别为单元刚阵和单元节点载荷列阵。

由(2.37)式可见, 杂交元模型的求解仍然归结为“刚度位移法”, 因而, 它能与一般的协调元连接。

三、数值算例及结果分析

为考察本文所构造单元的合理性, 计算了若干算例, 特别是纯弯曲板、悬臂板、三角形板等一些有挑战性的算例, 其结果及分析如下:

例1 四边简支方板和四边固支方板

板边长为 a , 厚度为 h , 简支方板承受均布力 q , 固支方板在板中心承受集中力 P , 由对称性, 取整块板的 $1/4$, 网格为 4×4 , 计算了 7 种不同厚跨比时板中心挠度, 结果见表 1。板中心的挠度分别由下式表示

$$W = \alpha q a^4 / D, \quad W = \alpha_1 P a^2 / D$$

表 1 简支方板和固支方板中心挠度系数 ($\times 10^{-6}$)

方法 h/a	α						α_1				
	I号单元	II号单元	文[1]	文[8]	文[7] 八节点 等参元	薄板解	I号单元	II号单元	文[1]	文[7] 八节点 等参元	薄板解
0.0001	4072	4063	4044	4062		4062	5880	5535	5410		5600
0.001	4072	4063	4044	4062		4062	5878	5534	5410		5600
0.01	4073	4064	4046	4065	4064	4062	5878	5535	5430	5560	5600
0.1	4288	4279	4222	4242	4238	4062	7575	7277	6860	7300	5600
0.2	4790	4782	4755	4777	4764	4062	11500	11230	11070	12320	5600
0.3	5692	5683	5642	5670	5641	4062	18430	18180	18000	20580	5600
0.4	6953	6944	6886	6920	6868	4062	28100	27860	27670	32100	5600

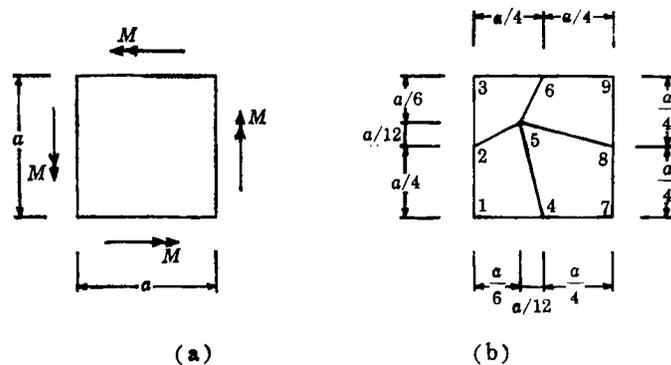


图3 纯弯板

表中，文[7]的八节点等参元和文[1]的单元考虑了横向剪切影响，文[8]是基于Reissner理论，简化得到的考虑横向剪切影响的矩形板弯曲解。计算结果表明，本文单元对薄厚板均能得到较好的解答，且“Ⅲ号单元”比“Ⅰ号单元”性能好。

例2 用纯弯算例考查本文对位移模式改进的效果。

四角支方板边长为 a ，厚跨比为 $h/a=0.01$ ，四边承受同样大小弯矩 M （图3(a)）。由对称性，取整块板的1/4（右上角部分），网格划分见图3(b)，计算了各点挠度并与文[9]的理论解进行了比较，结果见表2。结果表明，“Ⅰ号单元”处理纯弯板时误差远比“Ⅲ号单元”大。此例证实本文对位移模式的改进是合理的。可以预见，文[1]单元处理纯弯问题将类似本文“Ⅰ号单元”。

表2 纯弯板挠度

节点 方法	1	2	3	4	5	6	7	8
Ⅰ号单元	48.547	42.355	27.033	43.199	36.069	18.155	23.652	19.133
Ⅲ号单元	49.999	43.749	24.999	43.750	36.111	18.749	25.000	18.750
薄板解[9]	50	43.75	25	43.75	36.11	18.75	25	18.75

例3 悬臂板

正方形悬臂板边长为 a ，厚度为 h ，承受均布载荷 q 。由对称性，取整块板的1/2，网格剖分见图4，分别计算了7种不同厚跨比下自由边挠度和固支边中点弯矩，结果见表3。自由边挠度和固支边中点弯矩分别由下式表示

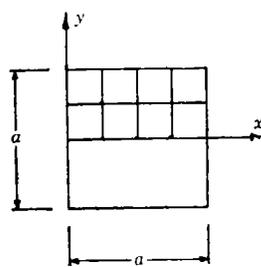


图4 悬臂板

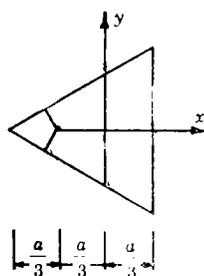


图5 三角形板

表3 悬臂板自由边挠度系数 α 和固支边弯矩系数 β ($\times 10^{-4}$)

h/a	α									β	
	Ⅱ号单元			文[1]			级数解			Ⅱ号单元	级数解
	0	0.25a	0.5a	0	0.25a	0.5a	0	0.25a	0.5a	0	0
0.0001	1293	1288	1276	1288	1282	1266	1310	1306	1293	-5304	-5356
0.001	1293	1288	1276	1288	1282	1266	1310	1306	1293	-5308	-5356
0.01	1294	1289	1276	1288	1282	1266	1310	1306	1293	-5337	-5356
0.1	1301	1295	1282	1306	1299	1282	1310	1306	1293	-5341	-5356
0.2	1347	1341	1328	1349	1342	1325	1310	1306	1293	-5342	-5356
0.3	1407	1400	1386				1310	1306	1293	-5255	-5356
0.4	1491	1483	1470	1503	1495	1477	1310	1306	1293	-5178	-5356

$$W = \alpha q a^4 / D, \quad M = \beta q a^2$$

表中, 级数解为张福范^[10]给出的, 文[1]计算了自由边挠度, 但未计算固支边弯矩。结果表明, 本文单元能较好地解决这类具有边界效应的问题。

例4 用本文单元处理斜边界问题

承受均布荷载 q 的周边简支等边三角形板, 厚跨比为 $h/a=0.04$, 网格剖分见图5。分别计算了板中心(坐标原点处)的挠度和弯矩, 并与文[9]的理论解进行了比较, 结果见表4。

板中心的挠度和弯矩由下式表示

$$W = \alpha q a^4 / D, \quad M_x = M_y = \beta q a^2$$

结果表明, 本文单元能较好地适应带有斜边界的问题。

表4 三角形板中心挠度系数 α 和弯矩系数 β

方 法	α	β	
		$\beta(M_x)$	$\beta(M_y)$
Ⅱ号单元	0.0009849	0.02551	0.02507
薄板解[9]	0.001029	0.02407	0.02407

四、讨 论

1. 特征值检查 计算结果表明, 本文单元的单刚是半正定的, 并且零特征值为3个, 这说明单元的零能模式已被消除。一般而言, 单元已无零能模式, 多个单元组合在一起后就一定没有零能模式。因此, 本文单元所采用的应力和位移的插值函数是比较合理的。

2. 收敛性 本文观察四边固支方板在不同网格划分下的数值收敛情况, 板的厚跨比为 $h/a=0.1$, 在板中心承受集中力 P 。分别计算了四种不同网格下板中心挠度, 结果见表5。结果表明, 本文构造的单元能以较快的速度收敛, 且“Ⅱ号单元”比“Ⅰ号单元”性能好。由此也证明, 本文对文[1]的位移模式的改进是成功的。

表5 不同网格划分下的挠度系数 a ($\times 10^{-6}$)

网 格 方 法	1×1	2×2	3×3	4×4
I号单元	6913	7703	7587	7575
II号单元	6913	6803	7109	7277
八节点等参元[7]				7300

五、结 束 语

计算结果表明,本文“II号单元”构思合理,克服了已有板单元的一些不足之处,同时,它对板的厚度具有相当宽的适用范围,且性能相当好,是一种值得推荐的平板弯曲单元。

参 考 文 献

- [1] 丁浩江、周卫宇、孙丽波,一种新型的平板弯曲单元,力学学报,18(5)(1986).
- [2] Robert, D. Cook,《有限元分析的概念和应用》,大连工学院数力系译(1978).
- [3] 张敬宇、杨海元,建立杂交有限元模型的一种简明格式,天津大学学报,(增2)(1984).
- [4] Crisfield, M. A., A four-node thin-plate bending element using shear constraints—A modified version of Lyon's element, *Comput. Methods, Appl. Mech. Eng.*, 38(1983).
- [5] 杨海元、张敬宇,《一种薄厚板均适用的平板弯曲九自由度全协调三角形有限元》,天津大学科研处(1979).
- [6] Tessler, Alexander, A prior identification of shear locking and stiffening in triangular Mindlin element, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 53(1985).
- [7] 谢贻权、何福保,《弹性和塑性力学中的有限单元法》,机械工业出版社(1982).
- [8] Salerno, V. L. and M. A. Goldberg, Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates, *J. A. M.*, 27(1)(1960).
- [9] S. 铁摩辛柯等,《板壳理论》,科学出版社(1977).
- [10] 张福范,均布荷载下悬臂矩形板的弯曲,应用数学和力学,1(3)(1980).

A New Hybrid Quadrilateral Finite Element for Mindlin Plate

Chin Yi

(Tianjin Architectural Design Institute, Tianjin)

Zhang Jing-yu

(Institute of Machinery and Electricity, Tianjin University, Tianjin)

Abstract

In this paper a new quadrilateral plate element concerning the effect of transverse shear strain has been presented. It is derived from the hybrid finite element model based on the principles of virtual work. The outstanding advantage

of this element is to use more rational trial functions of the displacements. For this reason, every variety of plate deformation can be simulated really while the least degrees of freedom is employed. A wide range of numerical tests was conducted and the results illustrate that this element has a very wide application scope to the thickness of plates and satisfactory accuracy can be obtained by coarse mesh for all kinds of examples.

Key words hybrid finite element, Mindlin plate, zero-energy mode, eigenvalue test