

各向异性材料中共线刚性线 夹杂的纵向剪切问题*

蒋持平

(北京航空航天大学飞行器设计及应用力学系, 1993年4月5日收到)

摘 要

本文研究各向异性材料中共线刚性线夹杂, (有时称作“硬裂纹”或“反裂纹”问题)的纵向剪切问题。利用复变函数方法, 提出了一般问题的公式和某些实际重要问题的封闭形式解, 考察了刚性线端点附近的应力分布。从本文解答的特殊情形, 可以直接导出各向同性材料相应问题的公式和结果, 包括某些已有的结果^[7]。

关键词 纵向剪切 刚性线夹杂 断裂 应力集中 各向异性

一、引 言

象在裂纹尖端一样, 在材料内部尖锐的夹杂端, 发生严重的应力集中现象。从固体中非均匀相的观点来看, 刚性线夹杂和裂纹是二维问题中片状嵌入物的两个极端: 当嵌入物杨氏横量 $E \rightarrow \infty$ 时, 为刚性线夹杂, 而 $E \rightarrow 0$ 时则为裂纹。这是两个最危险的极端情形, 它将引起严重的应力集中, 从而可能引起断裂。因此刚性线夹杂问题(有时被称作“硬裂纹”或“反裂纹”问题)对于结构的完整性分析也是非常重要的。随着各种各样的复合材料不断取代传统材料, 这个问题越来越受到重视。

一般地说, 对裂纹问题的研究已经较为充分。在最近的工作中, 我们纠正了两条共线半无限裂纹问题的一类经典应力强度因子公式^[1]。这类公式是十分重要的, 因为它们是比较长的双边裂纹试件的很好的计算模型。国内外通用的几本应力强度因子手册都收集了这类公式, 我国新版的应力强度因子手册已根据我们的工作作了订正。

关于刚性线夹杂的平面问题, 已经有了许多研究。Li和Ting^[2]、Hao和Wu^[3]、Markenscoff和Dundurs^[4]、蒋和柳^[5,6]的工作是最近研究的例子。但是对于刚性线夹杂的纵向剪切或者说反平面问题, 看来研究还不充分。据我们所知, 仅Wang, Zhang和Chou^[7]研究了各向同性材料中的一条刚性线问题。

本文试图为各向异性材料中的共线刚性线夹杂的纵向剪切问题提供一个方便工程应用的分析方法, 并且提供某些重要实际问题的封闭形式解。从本文解答的特殊情形, 可以直接导出各向同性材料中相应问题的公式和结果。

* 樊大钧推荐。

二、基本公式

如所熟知, 纵向剪切问题的平衡方程为

$$C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2C_{45} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

其中 w 是唯一不为零的反平面位移, C_{44} , C_{45} 和 C_{55} 是弹性常数. 为了解决问题, 我们定义一个广义复变量 z_3 :

$$z_3 = x + s_3 y \quad (2.2)$$

$$s_3 = \alpha_3 + i\beta_3, \quad \alpha_3 = -\frac{C_{45}}{C_{44}}, \quad \beta_3 = \frac{1}{C_{44}} (C_{44}C_{55} - C_{45}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

利用它, 位移 w 和反平面剪应力 τ_{xz} 和 τ_{yz} 能够由一个复变函数 $\varphi(z_3)$ 表达^[8]:

$$w = -\frac{i}{C_{44}\beta_3} [\varphi(z_3) - \overline{\varphi(z_3)}] \quad (2.4)$$

$$\tau_{xz} = -[s_3 \Phi(z_3) + \overline{s_3} \overline{\Phi(z_3)}] \quad (2.5)$$

$$\tau_{yz} = \Phi(z_3) + \overline{\Phi(z_3)} \quad (2.6)$$

其中 $\Phi(z_3) = \varphi'(z_3)$ (2.7)

对于无穷远应力有限的无穷域, 我们有

$$\Phi(z_3) = \Gamma + \Phi_0(z_3) \quad (2.8)$$

其中 $\Phi_0(z_3)$ 在无穷远为零, Γ 刻画无穷远反平面剪应力 τ_{xz}^∞ 和 τ_{yz}^∞ :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \tau_{yz}^\infty + \frac{(\tau_{xz}^\infty + \alpha_3 \tau_{yz}^\infty) i}{2\beta_3} \quad (2.9)$$

引进普通复变量 z :

$$z = x + iy \quad (2.10)$$

我们发现在实轴上有

$$z_3 = z = x \quad (2.11)$$

这样我们可以将仅在实轴上有边界条件的广义复变量 z_3 的问题化为普通复变量 z 的边值问题. 为分析的方便, 我们引进一个新的解析函数^[9,10] $\Omega(z)$:

$$\Omega(z) = \overline{\Phi(z)} = \overline{\Phi(\bar{z})} \quad (2.12)$$

那么对于应力有界的无穷域,

$$\Omega(z) = \overline{\Gamma} + \Omega_0(z) \quad (2.13)$$

其中 $\Omega_0(z)$ 是在 $\Omega(z)$ 所定义的区域内的全纯函数, 并且在无穷远为零.

三、问题的描述

我们的问题如下:

在各向异性的无限平面中, 一组共线刚性线 $L_j (j=1, 2, \dots, n)$ 沿实轴排列, L 是以 a_j 和 b_j 为端点的直线段 L_j 的整体. τ_{xz}^∞ 和 τ_{yz}^∞ 是无穷远反平面剪应力. 如图1所示.

那么, 问题的边界条件为

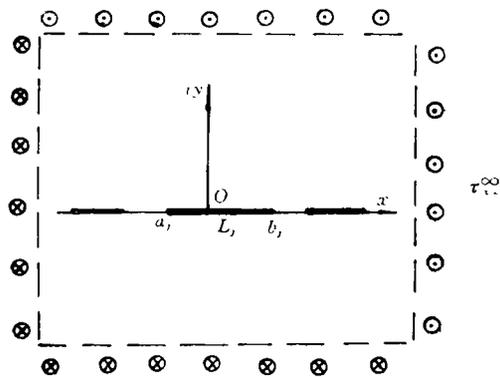


图 1

$$w^+(t) = w^-(t) = \begin{cases} w_1 & \text{在 } L_1 \text{ 上} \\ \dots\dots & \\ w_n & \text{在 } L_n \text{ 上} \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 t 表示实轴上的点, w_j 是刚性线 L_j 的纵向位移, 上标 + 和 - 分别表示从上半平面和下半平面趋于实轴的函数值。

将 (3.1) 的两式对 x 求导后相加和相减得到:

$$w'^+ + w'^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.2)$$

$$w'^+ - w'^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (3.3)$$

其中 $w' = \partial w / \partial x$ (3.4)

此外, 为了唯一地确定问题的解, 还必须考虑刚性线的平衡条件, 假设刚性线上无外载作用, 我们有

$$\int_{a_j}^{b_j} \tau_{yz}^+ dx - \int_{a_j}^{b_j} \tau_{yz}^- dx = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (3.5)$$

四、一般问题解答

上述问题可以化为一个 Riemann-Hilbert 问题求解。

将 (2.4) 代入 (3.3), 并且注意到 (2.11) 和 (2.12), 我们有

$$\Phi^+(t) - \Omega^-(t) = \Phi^-(t) - \Omega^+(t) \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (4.1)$$

它可以整理为

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (4.2)$$

注意到 (2.8) 和 (2.13), 根据 Liouville 定理, 在全平面我们有

$$\Phi(z) + \Omega(z) = \Gamma + \bar{\Gamma} = \tau_{yz} \quad (4.3)$$

代 (2.4) 到 (3.2), 我们得到

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0 \quad \text{在 } L \text{ 上} \quad (4.4)$$

根据文献 [10], 方程 (4.4) 的通解为

$$\Phi(z) - \Omega(z) = P(z) X_0(z) \quad (4.5)$$

其中
$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-\frac{1}{2}} (z - b_j)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

在沿 L 割开的平面上, 我们取 $X_0(z)$ 一个单值枝, 使得:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z^n X_0(z) = 1 \quad (4.7)$$

$P(z)$ 是一个 n 次多项式:

$$P(z) = C_n z^n + C_{n-1} z^{n-1} + \dots + C_0 \quad (4.8)$$

这样从 (4.3) 和 (4.5), 我们得到问题的通解:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\tau_{yz}^{\infty} + \frac{1}{2}P(z)X_0(z) \quad (4.9)$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}\tau_{yz}^{\infty} - \frac{1}{2}P(z)X_0(z) \quad (4.10)$$

最后我们讨论如何确定 $P(z)$ 中 $n+1$ 个积分常数.从(2.8)和(2.13),对于充分大的 $|z|$,我们有

$$\Phi(z) - \Omega(z) = \Gamma - \bar{\Gamma} + O(1/z) \quad (4.11)$$

与(4.5)在无穷远邻域展开式比较,立即得出

$$C_n = \Gamma - \bar{\Gamma} = -\frac{(\tau_{xz}^{\infty} + \alpha_3 \tau_{yz}^{\infty})i}{\beta_3} \quad (4.12)$$

余下的常数由刚性线的平衡条件决定,代(2.6)到(3.5),我们得到

$$\int_{a_j}^{b_j} [\Phi^+(t) + \Omega^-(t)] dt - \int_{a_j}^{b_j} [\Phi^-(t) + \Omega^+(t)] dt = 0$$

在 L_j 上 $(j=1, \dots, n)$ (4.13)

它也能化成一个闭围道积分

$$\oint_{A_j} [\Phi(z) - \Omega(z)] dz = 0 \quad (j=1, \dots, n) \quad (4.14)$$

其中 A_j 是包围各刚性线 L_j 的闭围道.由它可获得 C_{n-1}, \dots, C_0 的共 n 个线代数方程,从而唯一地确定这些常数.

五、几个封闭形式解

下面我们讨论由(4.9)和(4.10)给出的通解对某些有实际重要性的问题的应用.

例 1

如图2(a)所示,一条从 $-a$ 到 a 的刚性线,无穷远受均匀的反平面剪应力.

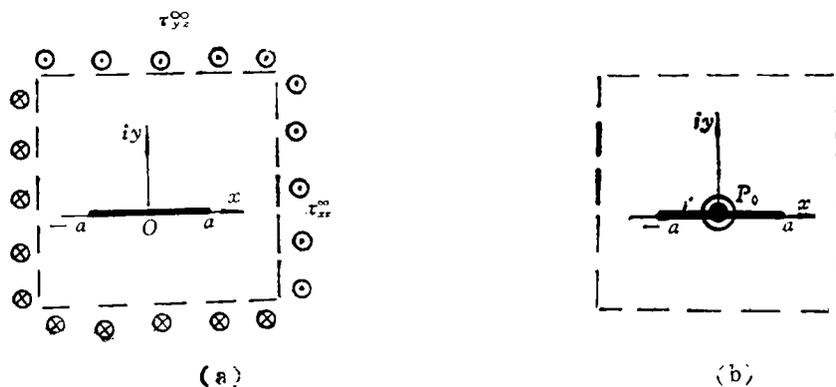


图 2

在这种情形,通解(4.9)成为

$$\Phi(z) = \frac{\tau_{yz}^{\infty}}{2} + \left[\frac{(\tau_{xz}^{\infty} + \alpha_3 \tau_{yz}^{\infty})i}{2\beta_3} z + \frac{C_0}{2} \right] \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (5.1)$$

(4.14)成为

$$\oint_A (C_1 z + C_0) \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}} = 0 \quad (5.2)$$

利用残数定理, 我们立即获得

$$C_0 = 0 \quad (5.3)$$

回到广义复变量 z_3 , 我们获得本问题的封闭形式解

$$\Phi(z_3) = \frac{\tau_{yz}^\infty}{2} + \frac{(\tau_{xz}^\infty + \alpha_3 \tau_{yz}^\infty) i}{2\beta_3} \cdot \frac{z_3}{\sqrt{z_3^2 - a^2}} \quad (5.4)$$

例 2

如图2(b)所示, 一个反平面剪力 P_0 作用于长 $2a$ 的刚性线上, 平面的其余部分无外载。

在这种情形, 通解(4.9)成为

$$\Phi(z) = \frac{C_0}{2\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (5.5)$$

因为 P_0 作用在刚性线上, 刚性线的平衡条件(3.5)变为

$$\int_{-a}^a \tau_{yz}^+ dx - \int_{-a}^a \tau_{yz}^- dx = -P_0 \quad (5.6)$$

(4.14)变为

$$\oint_A [\Phi(z) - \Omega(z)] dz = -P_0 \quad (5.7)$$

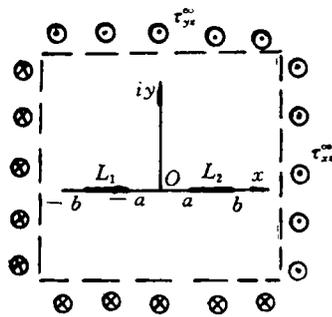
利用残数定理, 我们立即得出

$$C_0 = -\frac{P_0}{2\pi} i \quad (5.8)$$

回到广义复变量 z_3 , 我们获得问题的最终解答:

$$\Phi(z_3) = -\frac{P_0 i}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{z_3^2 - a^2}} \quad (5.9)$$

例 3



(c)
图 2

两条等长刚性线, 无穷远为均匀反平面剪应力状态。如图2(c)所示。

在这种情形, 通解(4.9)成为

$$\Phi(z) = \frac{\tau_{yz}^\infty}{2} + \frac{C_2 z^2 + C_1 z + C_0}{2\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} \quad (5.10)$$

其中 C_2 参见(4.12)。注意到在 L_2 上, 我们有

$$X_0^+(t) = -X_0^-(t) = -\frac{i}{\sqrt{(t^2 - a^2)(b^2 - t^2)}} \quad (5.11)$$

从(4.14), 我们能获得两个方程

$$\oint_A \frac{C_2 z^2 + C_1 z + C_0}{\sqrt{(z^2 - a^2)(z^2 - b^2)}} dz = 0 \quad (5.12)$$

其中 A 是包围两条刚性线的闭围道。

$$\int_a^b \frac{C_2 x^2 + C_1 x + C_0}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} dx = 0 \quad (5.13)$$

由(5.12)和(5.13)给出

$$C_1 = 0 \quad (5.14)$$

$$C_0 = -b^2 \frac{E(k)}{K(k)} C_2, \quad k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} \quad (5.15)$$

其中 $K(k)$ 和 $E(k)$ 分别是第一类和第二类完全椭圆积分。

回到广义复变量 z_3 ，我们得到问题的解答

$$\Phi(z_3) = \frac{\tau_{yz}^\infty}{2} + \frac{(\tau_{xz}^\infty + \alpha_3 \tau_{yz}^\infty) i}{2\beta_3} \left[z_3^2 - b^2 \frac{E(k)}{K(k)} \right] \frac{1}{\sqrt{(z_3^2 - a^2)(z_3^2 - b^2)}} \quad (5.16)$$

六、刚性线端点附近的应力分布

在本文的最后部分，我们试图对刚性线端点附近的应力分布提供一个较为精细的描述，这对于建立断裂准则来说，是十分必要的。

如图3所示，在刚性线端点 a 引入极坐标 r 和 θ ，那么我们有

$$x = a + r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (6.1)$$

假定 r 远小于裂纹半长 a ，则有

$$z_3 = u, \quad (z_3^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = [2ra(\cos \theta + s_3 \sin \theta)]^{\frac{1}{2}} \quad r \ll a \quad (6.2)$$

以图2(a)中的问题为例，我们立即获得

$$\tau_{xz} = -2 \operatorname{Re} [s_3 \Phi(z_3)] = \frac{\tau_{xz}^\infty + \alpha_3 \tau_{yz}^\infty}{\beta_3} \sqrt{\frac{a}{2r}} \operatorname{Im} \left[\frac{s_3}{(\cos \theta + s_3 \sin \theta)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad r \ll a \quad (6.3)$$

$$\tau_{yz} = 2 \operatorname{Re} [\Phi(z_3)] = -\frac{\tau_{xz}^\infty + \alpha_3 \tau_{yz}^\infty}{\beta_3} \sqrt{\frac{a}{2r}} \operatorname{Im} \left[\frac{1}{(\cos \theta + s_3 \sin \theta)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad r \ll a \quad (6.4)$$

其中 Re 和 Im 分别表示取实部和虚部。

从(6.3)和(6.4)，我们可以得出两点结论：

(1) 在各向异性介质中，邻近刚性线端的反平面剪应力奇异性的阶为 $r^{-\frac{1}{2}}$ 。

(2) 邻近刚性线端的反平面剪应力既与刚性线形状和加载条件相关，也与材料性质相关。

最后，我们指出，从本文解答的特殊情形，可以直接导出各向同性材料中的相应公式和结果。例如，取

$$C_{44} = C_{55} = G, \quad C_{45} = 0 \quad (6.5)$$

则有

$$\alpha_3 = 0, \quad \beta_3 = 1, \quad s_3 = i \quad (6.6)$$

(6.3)和(6.4)成为

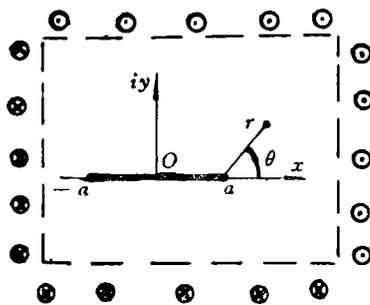


图 3

$$\tau_{zz} = \sqrt{\frac{a}{2r}} \tau_{zz}^{\infty} \cos \frac{\theta}{2} \quad (6.7)$$

$$\tau_{yz} = \sqrt{\frac{a}{2r}} \tau_{zz}^{\infty} \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.8)$$

这个结果与文献[7]中的一致。

参 考 文 献

- [1] Jiang Chi-ping, Zou Zhen-zhu, Wang Duo and Liu You-wen, A discussion about a class of stress intensity factors and its verification, *Int. J. Fracture*, **49** (1991), 141—157.
- [2] Li, Q.Q. and T. C. T. Ting, Line inclusions in anisotropic elastic solids, *J. Appl. Mech.*, **56** (1989), 556—563.
- [3] Hao, T. H. and Y. C. Wu, Elastic plane problem of collinear periodical rigid lines, *Engng. Fracture Mech.*, **33** (1989), 979—981.
- [4] Markenscoff, X. and J. Dundurs, Weight functions for rigid line inclusions, *Proc. 7th Int. Conf. on Fracture*, Houston, TX, **1** (1989), 37—39.
- [5] Jiang Chi-ping and Liu Chun-tu, Stress distribution around a rigid line in dissimilar media, *Engng. Fracture Mech.*, **42** (1992), 27—32.
- [6] Jiang Chi-ping, The plane problem of collinear rigid lines under arbitrary loads, *Engng. Fracture Mech.*, **39** (1991), 299—308.
- [7] Wang, Z. Y., H. T. Zhang and Y. T. Chou, Stress singularity at the tip of a rigid line inhomogeneity under antiplane shear loading, *J. Appl. Mech.*, **53** (1986), 450—461.
- [8] Sih, G. C. and H. Liebowitz, Mathematical theories of brittle fracture, *Fracture*, Vol. II Ed. by H. Liebowitz, Academic Press, New York (1968).
- [9] 樊大钧, 《数学弹性力学》, 新时代出版社 (1983).
- [10] Мусхелишвили Н. И., 《数学弹性理论的几个基本问题》, 赵惠元译, 科学出版社 (1958).

Longitudinal Shear Problems of Collinear Rigid Line Inclusions in Anisotropic Materials

Jiang Chi-ping

*(Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing)*

Abstract

Longitudinal shear problems of collinear rigid line inclusions (sometimes called hard crack or inverse crack problems) in anisotropic materials are dealt with. By using the complex variable method, we presents the formulation of the general problem and the closed form solutions to some problems of practical importance. The stress distribution in the immediate vicinity of the rigid line end is examined. The corresponding formulation and solutions for isotropic materials can be arrived at from the special cases of those in the present paper, some of which are in agreement with the existing results^[1].

Key words longitudinal shear, rigid line inclusion, fracture, stress concentration, anisotropy