应用数学和力学，第15卷第 2 期（1994 年 2 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Lipschitz局部严格伪压缩映象的迭代逼近*

邓 磊 丁协平

（重庆师范专科学校） （四川师范大学）

（1992年10月8日收到）

摘 要

设K是一致光滑Banach空间X的非空子集，$T:K\to X$是Lipschitz局部严格伪压缩映象。本文给出一个迭代序列强收敛到T的唯一不动点，并给出一个涉及Lipschitz局部强增殖映象T的非线性方程$Tx=f$的解的迭代逼近。

关键词 局部严格伪压缩 局部强增殖 一致光滑Banach空间

一、引 言

最近，在L_p或l_p($p\geqslant 2$)中，Chidume[1]证明了Mann迭代过程强收敛到Lipschitz严格伪压缩映象的不动点。这之后，Weng[7]和作者[2]分别推广了Chidume的结果。

在本文中，我们进一步推广［2］和［7］的结果到一致光滑Banach空间（$s>1$）上Lipschitz局部严格伪压缩映象。

二、预 备 知 识

设X为Banach空间，如果对任意$x\in D(T)$，存在$t_x>1$使对一切$y\in D(T)$和$r>0$不等式

$$\|x-y\|\leqslant\|(1+r)(x-y)-rt_x(Tx-Ty)\| \tag{2.1}$$

成立，则称映象T为局部严格伪压缩的[7]。

设X是Banach空间，X^*是它的对偶空间。$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示广义的对偶对。映象$J$映$X$到$2^{X^*}$：

$$Jx=\{f^*\in X^*:\langle x,f^*\rangle=\|f^*\|\|x\|,\ \|f^*\|=\|x\|\}$$

称为X上的正规对偶映象。

设X是Banach空间，如果对任意$x\in D(T)$，存在一个正数k_x使得对一切$y\in D(T)$有$j\in J(x-y)$使

$$\langle Tx-Ty,j\rangle\geqslant k_x\|x-y\|^2 \tag{2.2}$$

则称映象T为局部强增殖的[7]。

* 国家自然科学基金资助项目。

引理 1[7] 设K是Banach空间X的一个子集，$U:K\to X$，则U是局部严格伪压缩映象当且仅当$T=I-U$是局部强增殖映象. 而且$k_x=(t_x-1)/t_x$，其中t_x和k_x是分别出现在(2.1)和(2.2)中的常数.

设X是Banach空间，如果光滑模$\rho_X(\tau)$：

$$\rho_X(\tau)=\sup\{(\|x+y\|+\|x-y\|)/2-1:\|x\|=1,\ \|y\|\leqslant\tau\}$$

满足当$\tau\to 0$时有$\rho_X(\tau)/\tau\to 0$，则称X为一致光滑的.

众所周知，X是一致光滑的当且仅当J是单值的且关于X的任何有界子集一致连续[8]，X是一致光滑（凸）当且仅当X^*是一致凸（光滑）[5，定理1. e. 2；8]. Hilbert空间，L_p，l_p和$W_m^p(1<p<\infty)$都是一致光滑的[5,p.63；8]，且

$$\rho_X(\tau)<\begin{cases}\tau^p/p, & 1<p<2\\ (p-1)\tau^2/2, & p\geqslant 2\end{cases}\qquad (X=L_p,\ l_p\text{ 或 }W_m^p) \tag{2.3}$$

在以后的讨论中，X表示一致光滑Banach空间，j表示单值对偶映象.

对正数t，我们定义

$$\beta(t)=\sup\{(\|x+ty\|^2-\|x\|^2)/t-2\mathrm{Re}\langle y,J(x)\rangle:\|x\|\leqslant 1,\ \|y\|\leqslant 1\}$$

显然$\beta:(0,\infty)\to[0,\infty)$是不减、连续的，并且对$c\geqslant 1$有$\beta(ct)\leqslant c\beta(t)$.

引理2[6] 设$\beta(t)$定义如上，则$\lim\limits_{t\to 0^+}\beta(t)=0$，且对一切$x,y\in X$有

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\mathrm{Re}\langle y,J(x)\rangle+\max\{\|x\|,\ 1\}\|y\|\beta(\|y\|) \tag{2.4}$$

引理3[7] 设β_n是非负序列，满足

$$\beta_{n+1}\leqslant(1-\delta_n)\beta_n+\sigma_n \tag{2.5}$$

其中，$\delta_n\in[0,1]$，$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i=\infty$和$\sigma_n=o(\delta_n)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$.

三、主要结果

定理1 设K是X的非空子集，$T:K\to X$是具有Lipschitz常数L的Lipschitz局部严格伪压缩映象，满足T的值域有界和T的不动点集$F(T)$非空. 设$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$和$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$是两个实数序列，满足

(i) $0\leqslant\alpha_n\leqslant 1$，$n\geqslant 0$；

(ii) $0\leqslant\beta_n\leqslant k_q/[2L(1+L)]$，$n\geqslant 0$；

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，

其中，$q\in F(T)$，$k_q=(t_q-1)/t_q$和$t_q>1$是出现在不等式(2.1)中的常数. 任取$x_0\in K$，如果序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq K$满足

$$\left.\begin{aligned}&x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_nTy_n\\ &y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_nTx_n,\qquad n\geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛于q，且$F(T)$是单点集.

证明 设$q\in F(T)$. 因T是局部严格伪压缩映象，由引理1知，$U=I-T$是局部严格强增殖的. 故存在一个正数k_q使得对一切$x\in K$有

$$\mathrm{Re}\langle (I-T)x-(I-T)q,\ j(x-q)\rangle \geqslant k_q\|x-q\|^2 \tag{3.2}$$

因此，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\langle Ty_n-Tq,\ j(x_n-q)\rangle\\
&=\langle Ty_n-Tx_n,\ j(x_n-q)\rangle+\langle x_n-q, j(x_n-q)\rangle\\
&\quad-\langle (I-T)x_n-(I-T)q,\ j(x_n-q)\rangle\\
&\leqslant L\|y_n-x_n\|\|x_n-q\|+\|x_n-q\|^2-k_q\|x_n-q\|^2\\
&=L\beta_n\|Tx_n-x_n\|\|x_n-q\|+(1-k_q)\|x_n-q\|^2\\
&=L\beta_n\|(Tx_n-Tq)+(q-x_n)\|\|x_n-q\|+(1-k_q)\|x_n-q\|^2\\
&\leqslant(1-k_q+L\beta_n+L^2\beta_n)\|x_n-q\|^2\\
&\leqslant(1-k_q/2)\|x_n-q\|^2
\end{aligned}\tag{3.3}$$

现令$d=\max\{1,d_1\}$，$d_1=\sup\{\|Tx-q\|:x\in K\}$和

$$\theta_n=\|x_n-q\|^2$$

从$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$易知，存在整数$N\geqslant1$使得当$n\geqslant N$时，有

$$[1-(k_q/2)\alpha_n]^2+d^2\alpha_n\beta(\alpha_n)\leqslant1$$

令$B=\max\{\theta_i:1\leqslant i\leqslant N,1\}$。我们首先指出对一切$n\geqslant1$有$\theta_n\leqslant B^2$且

$$\theta_{n+1}\leqslant[1-(k_q/2)\alpha_n]^2\theta_n+B^2d^2\alpha_n\beta(\alpha_n) \tag{3.4}$$

事实上，由(2.4)、(3.1)和(3.3)，我们有

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1}&=\|x_{n+1}-q\|^2=\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Ty_n-Tq)\|^2\\
&\leqslant(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n(1-\alpha_n)\mathrm{Re}\langle Ty_n-Tq, j(x_n-q)\rangle\\
&\quad+\max\{\|x_n-q\|,1\}\alpha_n\|Ty_n-q\|\beta(\alpha_n\|Ty_n-q\|)\\
&\leqslant(1-\alpha_n)^2\theta_n+2\alpha_n(1-\alpha_n)(1-k_q/2)\theta_n+\max\{\theta_n,1\}d^2\alpha_n\beta(\alpha_n)\\
&\leqslant[1-(k_q/2)\alpha_n]^2\theta_n+\max\{\theta_n,1\}d^2\alpha_n\beta(\alpha_n)
\end{aligned}\tag{3.5}$$

如果$n\leqslant N$，由B的定义有$\theta_n\leqslant B^2$。对于$n>N$，我们应用归纳法。假设$\theta_n\leqslant B^2$，则

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1}&\leqslant[1-(k_q/2)\alpha_n]^2\theta_n+B^2d^2\alpha_n\beta(\alpha_n)\\
&\leqslant\{[1-(k_q/2)\alpha_n]^2+d^2\alpha_n\beta(\alpha_n)\}B^2\leqslant B^2
\end{aligned}$$

所以，对一切$n\geqslant1$有$\theta_n\leqslant B^2$，且从上面的不等式(3.5)，我们获得(3.4)。

对不等式(3.4)应用引理3，我们有$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛于q。现在假设存在$q^*\in F(T)$使$q^*\neq q$，对q^*重复上面的论证过程，我们得到$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于q^*和q，矛盾。因此，$F(T)=\{q\}$。

注 1 定理1推广了[2]的定理1到一致光滑Banach空间上的LiPschitz局部严格伪压缩映象。如果$\beta_n=0$，$\forall n\geqslant0$，则T的Lipschitz连续性可以省略。因此，定理1是[7]的定理1的有意义的改进。我们留下一个问题：T的Lipschitz连续性能否从定理1中取消？

以下，我们证明一个与定理1密切相关的结果。

定理2 设$T:X\to X$是具有Lipschitz常数L的Lipschitz局部强增殖映象，且方程$Tx=f$的解集$\mathrm{sol}(T)$非空。由$Sx=f-Tx+x$定义$S:X\to X$，且设S的值域有界。设$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$和$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$是两个实数序列，满足

(i) $0\leqslant\alpha_n\leqslant1$，$n\geqslant0$；

(ii) $0\leqslant\beta_n\leqslant k_q/[2(L^2-k_q)]$，$n\geqslant0$；

(iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，

其中$q\in \mathrm{sol}(T)$和$k_q\in(0,1)$是出现在不等式(2.2)中的常数。任 取$x_0\in X$，如果序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1}&=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n S y_n \\ y_n&=(1-\beta_n)x_n+\beta_n S x_n, \qquad n\geqslant 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

则$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛于q，且$\mathrm{sol}(T)$是单点集。

证明 设$q\in\mathrm{sol}(T)$。因T是局部严格增殖映象，则存在正数k_q使得对一切$x\in X$，有

$$\mathrm{Re}\langle Tx-Tq,j(x-q)\rangle\geqslant k_q\|x-q\|^2 \tag{3.7}$$

因此，

$$\begin{aligned}\langle y_n-q,j(x_n-q)\rangle&=\langle-\beta_n T x_n+x_n+\beta_n f-q,j(x_n-q)\rangle\\ &=-\beta_n\langle Tx_n-Tq,j(x_n-q)\rangle+\langle x_n-q,j(x_n-q)\rangle\\ &\leqslant-k_q\beta_n\|x_n-q\|^2+\|x_n-q\|^2\\ &=(1-k_q\beta_n)\|x_n-q\|^2 \end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\langle Sy_n-Sq,j(x_n-q)\rangle&=\langle-Ty_n+Tq+y_n-q,j(x_n-q)\rangle\\ &=\langle Tx_n-Ty_n,j(x_n-q)\rangle-\langle Tx_n-Tq,j(x_n-q)\rangle+\langle y_n-q,j(x_n-q)\rangle\\ &\leqslant L\|x_n-y_n\|\|x_n-q\|-k_q\|x_n-q\|^2+(1-k_q\beta_n)\|x_n-q\|^2\\ &\leqslant L\beta_n\|Tx_n-Tq\|\|x_n-q\|+(1-k_q-k_q\beta_n)\|x_n-q\|^2\\ &\leqslant(1-k_q-k_q\beta_n+L^2\beta_n)\|x_n-q\|^2\\ &\leqslant(1-k_q/2)\|x_n-q\|^2 \end{aligned}\tag{3.9}$$

证明的其余部分类似于定理1中的证明。

注2 定理2推广了[2]的定理2。

参 考 文 献

[1] Chidume, C. E., Iterative approximation of fixed points of Lipschitzian strictly pseudocontractive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **99**(2) (1987), 283—288.

[2] Deng, L. and X. P. Ding, Iterative approximation of Lipschitz strictly pseudo-contractive mappings in uniformly smooth Banach spaces.(submitted)

[3] Ishikawa, S., Fixed points by a new iteration method, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **44** (1974), 147—150.

[4] Kato, T., Nonlinear semigroups and evolution equations, *J. Math. Soc. Japan*, **19** (1967), 508—520.

[5] Lindenstrauss, J. and L. Tsafriri, *Classical Banach Spaces*, **I**, Springer-Verlag, New York/Berlin (1979).

[6] Reich, S., An iterative procedure for constructing zeros of accretive sets in Banach spaces, *J. Nonlinear Anal.*, (2) (1978), 85—92.

[7] Weng, X., Fixed point iteration for local strictly pseudo-contractive mapping, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **113** (1991), 727—731.

[8] Xu, Z. B. and G. F. Roach, Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **157** (1991), 189—210.

Iterative Process for Lipschitz Local Strictly Pseudocontractive Mappings

Deng Lei

(*Chongqing Teachers College, Yongchuan, Chongqing*)

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

Suppose that K is a non-empty subset of a uniformly smooth Banach space X. Let $T: K \to X$ be a Lipschitz local strictly pseudocontractive mapping. In this paper, the iterative sequence which converges strongly to the unique fixed point of T is given. A related result deals with the problem that the Ishikawa iteration process converges strongly to a solution of the equation $Tx=f$ when T is Lipschitzian and local strongly accretive in X.

Key words local strictly pseudocontractive, local strongly accretive, uniformly smooth Banach space