

带相变的连续浇铸铸坯温度场分析*

赵兴华 陈小弟

(上海工业大学, 上海市应用数学和力学研究所, 1993年1月10日收到)

摘 要

本文通过适当变换, 将考虑铸坯相变潜热影响的三维稳态非线性温度场问题, 化成等效的二维瞬态非线性问题来求解, 并用等效比热代替相变影响, 给出了有限元计算公式, 并对相变区作了精确仔细的处理。

关键词 连铸 相变 温度场

一、引 言

连铸过程铸坯温度场分析是生产上十分重要的问题。拉拔速度和铸坯液芯长度的控制直接关系到生产效率和操作的安全性。对铸坯温度场的分析还可以进一步了解和控制铸坯的质量, 防止热裂纹、缺陷的生长, 控制结晶方向和晶粒的大小等, 具有巨大实用价值。

由于铸坯中存在液相和固相, 凝固时将释放相变潜热, 各种物理、几何参数都随温度而变化, 边界上又有对流、辐射和强制水冷, 铸件本身还在运动, 因此这是一个十分复杂的二相非线性热传递问题。目前, 只有十分简单的一维、二维问题才有解析解。其中相变处理是个关键。

随着计算机的发展, 对这类问题采用有限差分法和有限元等数值求解技术, 取得了显著的成效。Rolph 和 Bathe^[1], Salcuden^[2], Loyd^[3] 等人用温度回升法处理了相变的影响。Comini, Pham^{[4][5]} 则用等效比热来处理相变影响, 也取得了较好的效果。近来 Voller, Yiding^{[6][7]} 则改用热焓法来处理这一问题。但是他们对相变和非线性的处理还比较粗糙, 相变潜热将释放(或吸收)相当的热量, 对结果影响很大。有些分析计算量较大, 有待改进。

针对连铸这一特定问题, 本文通过合理简化和引进变换, 将考虑铸坯相变潜热影响的三维稳态非线性温度场问题, 化成等效二维瞬态非线性问题来求解, 计算量大大下降。用等效比热代替相变的影响, 对相变区作了较精细的处理, 使其更合理。给出了有限元非线性迭代求解公式。最后给出了两种工况下铸坯各截面相变区的分布和温度场结果。

二、铸坯温度场分析

1. 模型和基本控制方程

连铸模型如图 1 所示。在上部入口处为液态, 钢水经过结晶器冷却后表皮形成一层固态

* 国家自然科学基金资助课题。

薄壳。其后，受四周喷水冷却作用，沿 z 向铸坯逐渐降温，且结壳越来越厚，直至变成固态。最后一段为空冷区。拉坯速度为 V_0 。

对此温度场分析可作如下假设：

- (1) 忽略钢水内摩擦等能量耗散；
- (2) 认为铸坯液态固态时都是连续均匀的；
- (3) 连铸过程为一稳态连续过程；
- (4) 与轴向传质传热和横向 (x, y) 向热传导相比，可忽略拉坯方向的热传导；
- (5) 忽略钢水横向流动。

对于包含相变影响，流体固体的统一热传递方程为^[8]

$$\rho C \frac{dT}{dt} + \rho_i l_i \frac{d\zeta_i}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2.1)$$

在此， T 为温度， k 为热传导系数， ρ 为质量密度， C 为比热， l 为单位质量的相变潜热， ζ_i 为第 i 相的组元。方程(2.1)反映了能量平衡，对于稳态问题则变为

$$\rho C \mathbf{V} \cdot \nabla T + \rho_i l_i \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta_i = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (2.2)$$

\mathbf{V} 为速度。由于 $V_z = V_0$ ，且 $V_z \gg V_x, V_y$ ，则

$$\mathbf{V} \cdot \nabla T \approx V_0 \partial T / \partial z, \quad \mathbf{V} \cdot \nabla \zeta_i \approx V_0 \partial \zeta_i / \partial z$$

由假设(4)

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad \rho C V_0 \frac{\partial T}{\partial z}, \rho_i l_i V_0 \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} \gg k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

方程(2.2)可简化为

$$\rho C V_0 \frac{\partial T}{\partial z} + \rho_i l_i V_0 \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

此式即为连铸问题的温度场控制方程。边界条件为

$$\left. \begin{array}{ll} \text{已知温度: } T = T_0 & (\text{在入口处 } S_0) \\ \text{对流: } k \partial T / \partial n = h(T_e - T) & (\text{在 } S_2, S_3 \text{ 上}) \\ \text{辐射: } k \partial T / \partial n = \kappa(T_r - T) & (\text{在 } S_2, S_3 \text{ 上}) \\ \text{已知热流: } k \partial T / \partial n = q_0 & (\text{在 } S_1 \text{ 上}) \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

这里 T_0 为浇铸温度， q_0 为结晶器带走的已知热流矢量。 h, κ 分别为边界对流传热和辐射散热系数。 T_e 为周围辐射物温度， T_r 为环境温度。

方程(2.3)是一个稳态三维问题，直接计算工作量大，可将其变换成另外形式求解。在此，引进独立时间变量 t ，将 z 看成是 t 的函数。位于空间 z 处的某截面，可视为钢水从浇口 S_0 处经过 t 时刻后移动到达的位置。于是

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial T(x, y, z(t))}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz}{dt} = V_0 \frac{\partial T}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta_i(x, y, z(t))}{\partial t} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} \frac{dz}{dt} = V_0 \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

这样方程(2.3)就变为

$$\rho C \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} + \rho_i l_i \frac{\partial \zeta_i(x, y, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

这是一个瞬态二维问题。相应的边界条件、初始条件为

$$\text{初始条件: } T(x, y, t) = t_0 \quad (\text{在 } t = 0) \quad (2.7)$$

$$\text{边界条件: } \left. \begin{aligned} k\partial T/\partial n = q_0 & \quad (0 < t \leq S_1/V_0) \\ k\partial T/\partial n = h(T_e - T), \quad k\partial T/\partial n = \kappa(T_r - T) & \quad (t > S_1/V_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

于是求解铸坯三维稳态温度场的问题 ((2.3)、(2.4)式), 就等价地化为在条件 (2.7)、(2.8)下, 求解二维瞬态温度场的问题 ((2.6)式)。

2. 相变潜热的处理——等效比热法

二元合金和钢的典型相图如图 2 所示, L 为液相区, S 为固相区, $S+L$ 固液两相区。对某合金从开始相变到相变结束有一个温度范围 (即固相点 T_s 和液相点 T_L 之间), 当发生从固相到液相 (或液相到固相) 相变, 将吸收 (或放出) 潜热。

在某温度 T , 假设相变已达到平衡状态, 根据相律, 则此时固、液所占的比率 f_s, f_L 完全可由杠杆定律确定 (图2), 即

$$f_s = \frac{C_1 - C_0}{C_1 - C_2}, \quad f_L = \frac{C_0 - C_2}{C_1 - C_2} \quad (2.9)$$

于是方程(2.1)中的 $\xi_s = f_s$, 相变潜热的贡献为:

$$\rho_s l_s \frac{d\xi_s}{dt} = \rho_s l_s \frac{df_s}{dt} = \rho_s l_s \psi \frac{dT}{dt}$$

$$\text{在此} \quad \psi = \frac{(C_0 - C_1) \partial C_2 / \partial T + (C_2 - C_0) \partial C_1 / \partial T}{(C_2 - C_1)^2} \quad (2.10)$$

称 $C_e = l_s \psi$ 为相变等效比热, 其值为:

$$C_e = \begin{cases} 0 & (T > T_L \text{ 或 } T < T_s) \\ l_s \psi & (T_s \leq T \leq T_L) \end{cases} \quad (2.11)$$

引进等效比热后, 方程(2.6)就变为

$$(\rho C + \rho_s C_e) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (2.12)$$

固-液相变所产生的热效应通过 $\rho_s C_e$ 加以反映, C_e 是温度的函数, 其值可以直接根据相图按(2.10), (2.11)式求得, $\partial C_1 / \partial T, \partial C_2 / \partial T$ 值可由相图上液相线、固相线的斜率求得。

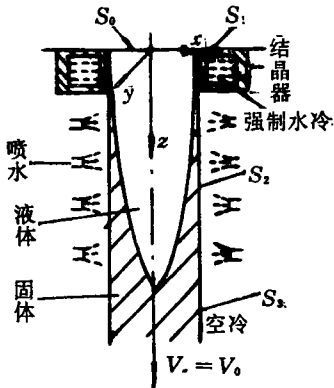


图 1

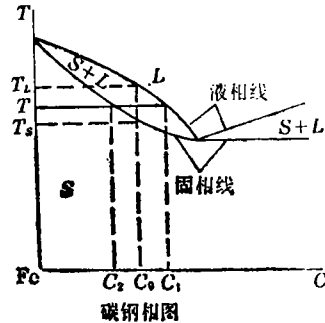
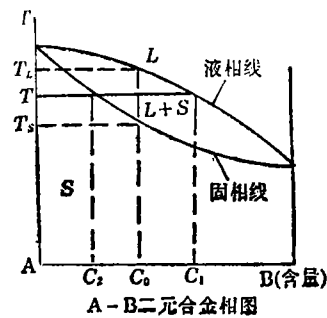


图 2

对于图 3 两种典型的相图, 利用(2.10)式不难求得

(1) 对图3(a), C_e 是常量, 有

$$C_e = l_s \psi = l_s / (T_L - T_s) \quad (2.13)$$

(2) 对图3(b), C_e 是 T 的函数, 有

$$C_e = \frac{-l_s b_1 b_2 (T_L - T_S)}{[b_1 (T_L - T) + b_2 (T - T_S)]^2} \quad (2.14)$$

其中 b_1 、 b_2 分别为相线 C_1 、 C_2 的斜率。

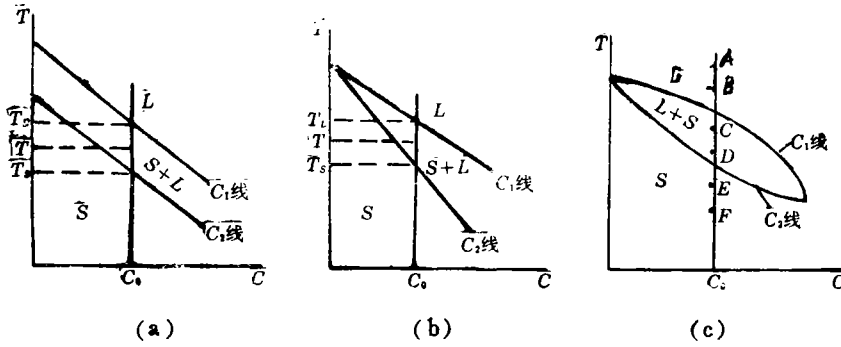


图 3

三、有限元公式

1. 二维瞬态非线性温度场分析

(1) 有限元方程

假设 t 到 $t + \alpha \Delta t$ 时刻温度随时间呈线性变化，即

$${}^{t+\alpha\Delta t}T = {}^tT + \Delta T, \quad {}^{t+\alpha\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Delta T}{\alpha \Delta t} \quad (3.1)$$

已知 t 时刻的温度场求 $t + \alpha \Delta t$ 时刻的温度场。按通常瞬态温度场问题有限元分析方法^{[9][11]}，根据方程(2.12)和条件(2.7)、(2.8)，可得增量形式连铸问题截面温度场分析的有限元方程为：

$${}^{t+\alpha\Delta t} [K] \{\Delta T^h\} = {}^{t+\alpha\Delta t} \{Q\} \quad (3.2)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\alpha\Delta t} [K] &= {}^{t+\alpha\Delta t} [K^K] + {}^{t+\alpha\Delta t} [K^c] + {}^{t+\alpha\Delta t} [K^r] + \frac{1}{\alpha \Delta t} {}^{t+\alpha\Delta t} [C] \\ {}^{t+\alpha\Delta t} \{Q\} &= {}^{t+\alpha\Delta t} \{Q^0\} + {}^{t+\alpha\Delta t} \{Q^B\} + {}^{t+\alpha\Delta t} \{Q^e\} + {}^{t+\alpha\Delta t} \{Q^r\} \\ &\quad - {}^{t+\alpha\Delta t} [K^K] \{T^h\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

其中

$${}^{t+\alpha\Delta t} [K^K] = \sum_1^n \int_V [B]^T {}^{t+\alpha\Delta t} [K] [B] dV$$

$${}^{t+\alpha\Delta t} [K^c] = \sum_1^n \int_{S_c} {}^{t+\alpha\Delta t} h [N]^T [N] dS_c$$

$${}^{t+\alpha\Delta t} [K^r] = \sum_1^n \int_{S_r} {}^{t+\alpha\Delta t} \kappa [N]^T [N] dS_r$$

$${}^{t+\alpha\Delta t} [C] = \sum_1^n \int_V {}^{t+\alpha\Delta t} C \rho [N]^T [N] dV$$

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^s\} &= \sum_1^n \int_{S_1} [N]^T {}^{t+\alpha\Delta t}\{q_0\} dS_1, \quad {}^{t+\alpha\Delta t}[K] = \begin{bmatrix} {}^{t+\alpha\Delta t}k & 0 \\ 0 & {}^{t+\alpha\Delta t}k \end{bmatrix} \\ {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^c\} &= \sum_1^n \int_{S_c} {}^{t+\alpha\Delta t}h [N]^T [N] dS_c ({}^{t+\alpha\Delta t}\{T_c^k\} - {}^t\{T^k\}) \\ {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^r\} &= \sum_1^n \int_{S_r} {}^{t+\alpha\Delta t}K [N]^T [N] dS_r ({}^{t+\alpha\Delta t}\{T_r^k\} - {}^t\{T^k\}) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

这里左上角标表示 $t + \alpha\Delta t$ 时刻和 t 时刻的量, S_1 , S_c , S_r 分别为受已知热流、对流、辐射作用的边界面, V 为单元体积, n 为物体单元总数, ${}^{t+\alpha\Delta t}\{T_c^k\}$ 为 $t + \alpha\Delta t$ 时刻对流边界节点环境温度列阵, ${}^{t+\alpha\Delta t}\{T_r^k\}$ 为 $t + \alpha\Delta t$ 时刻辐射边界节点周围温度列阵, ${}^t\{T^k\}$ 为 t 时刻节点温度列阵, $\{\Delta T^k\}$ 为 t 到 $t + \alpha\Delta t$ 时间内节点温度增量列阵, $[N]$, $[B]$ 分别为单元的形函数矩阵及其导数矩阵。

等式(3.3)中 ${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^s\}$, ${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^c\}$, ${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^r\}$, ${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^B\}$ 分别反映已知热流、对流、辐射等边界条件和相变对热流矢量 ${}^{t+\alpha\Delta t}\{\hat{Q}\}$ 的影响; ${}^{t+\alpha\Delta t}[K^K]$, ${}^{t+\alpha\Delta t}[K^c]$, ${}^{t+\alpha\Delta t}[K^r]$, ${}^{t+\alpha\Delta t}[C]$ 分别反映物体热传导、对流、辐射和热容对 ${}^{t+\alpha\Delta t}[\hat{K}]$ 的贡献。由于包含相变和辐射, ${}^{t+\alpha\Delta t}[\hat{K}]$, ${}^{t+\alpha\Delta t}\{\hat{Q}\}$ 是 T 的函数, 因此这是一组非线性方程。

(2) 迭代公式

对非线性方程(3.2)的求解, 通常可采用修正Newton Raphson (MNR) 法进行。近似取

$${}^{t+\alpha\Delta t}[\hat{K}] \approx {}^t[\hat{K}] \quad (3.5)$$

对第 i 次迭代可设

$${}^{t+\alpha\Delta t}\{T^k\}^{(i)} = {}^{t+\alpha\Delta t}\{T^k\}^{(i-1)} + \{\Delta T\}^{(i)}, \quad {}^{t+\alpha\Delta t}\{T^k\}^{(0)} = {}^t\{T^k\} \quad (3.6)$$

于是

$$\{\Delta T^k\} = {}^{t+\alpha\Delta t}\{T^k\}^{(i-1)} + \{\Delta T\}^{(i)} - {}^t\{T^k\} \quad (3.7)$$

将其代入方程(3.2)~(3.4), 化简后得连铸问题截面温度场非线性有限元分析MNR法的迭代公式为:

$$\left. \begin{aligned} {}^t[\hat{K}]\{\Delta T\}^{(i)} &= {}^{t+\alpha\Delta t}\{\hat{Q}\}^{(i-1)} \\ {}^{t+\alpha\Delta t}\{T^k\}^{(i)} &= {}^{t+\alpha\Delta t}\{T^k\}^{(i-1)} + \{\Delta T\}^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} {}^t[\hat{K}] &= {}^t[K^K] + {}^t[K^c] + {}^t[K^r] + \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^t[C] \\ {}^{t+\alpha\Delta t}\{\hat{Q}\}^{(i-1)} &= {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^s\}^{(i-1)} + {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^B\}^{(i-1)} + {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^c\}^{(i-1)} \\ &\quad + {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^r\}^{(i-1)} - {}^{t+\alpha\Delta t}[K^K]^{(i-1)} {}^{t+\alpha\Delta t}\{T^k\}^{(i-1)} \\ &\quad - \frac{1}{\alpha\Delta t} {}^{t+\alpha\Delta t}[C]^{(i-1)} ({}^{t+\alpha\Delta t}\{T^k\}^{(i-1)} - {}^t\{T^k\}) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

在此

$${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^s\}^{(i-1)} = \sum_1^n \int_{S_1} [N]^T {}^{t+\alpha\Delta t}\{q_0\}^{(i-1)} dS_1$$

$$\left. \begin{aligned}
 {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^e\}^{(t-1)} &= \sum_1^n \int_{S_e} [N]^T [N] {}^{t+\alpha\Delta t} h^{(t-1)} dS_e ({}^{t+\alpha\Delta t}\{T_k\} - {}^{t+\alpha\Delta t}\{T^h\}^{(t-1)}) \\
 {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^r\}^{(t-1)} &= \sum_1^n \int_{S_r} [N]^T [N] {}^{t+\alpha\Delta t} \kappa^{(t-1)} dS_r ({}^{t+\alpha\Delta t}\{T_h\} - {}^{t+\alpha\Delta t}\{T_k\}^{(t-1)}) \\
 {}^{t+\alpha\Delta t}\{K^K\}^{(t-1)} &= \sum_1^n \int_V [B]^T {}^{t+\alpha\Delta t}\{K\}^{(t-1)} [B] dV \\
 {}^{t+\alpha\Delta t}\{C\}^{(t-1)} &= \sum_1^n \int_V \rho [N]^T [N] {}^{t+\alpha\Delta t} C^{(t-1)} dV
 \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

相变贡献 ${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^B\}^{(t-1)}$ 见下一节。方程 (3.8) 是比较一般的非线性迭代公式，它可以允许 C, k, h, κ 等参数和边界条件随温度和时间而变化。当满足

$$\|\{\Delta T\}^{(t)}\|_2 \leq \epsilon \quad (3.11)$$

时，迭代结束，再求下一时刻的解。在上述公式中，如取 $\alpha=1$ ，即为欧拉后差积分格式。为使数值积分无条件稳定，一般取 $1/2 \leq \alpha \leq 1$ 。

2. 相变贡献 ${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^B\}^{(t-1)}$

现在来讨论固液交界区，由液相到固相凝固时，相变潜热对方程 (3.8) 的贡献 ${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q\}^{(t-1)}$ 的计算。为此首先判断 t 到 $t+\alpha\Delta t$ 时间间隔内，该单元是否发生过相变。即高斯积分点上的温度 T^* ，是否经过 $T_L - T_S$ 之间的相变温度带，若曾经过则求该单元的 $\{K\}$ ， $\{Q\}$ 时，必须计及该积分点代表区域所产生的相变潜热影响。下面分 6 种情况来讨论。

(1) 液相区 L

从 t 到 $t+\alpha\Delta t$ 时刻，温度 T^* 由 A 点到 B 点 (图3(c))，此时无相变发生。有

$${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^B\}^{(t-1)} = 0 \quad ({}^{t+\alpha\Delta t}T^*, {}^{t+\alpha\Delta t}T^* > T_L) \quad (3.12)$$

(2) 固相区 S

从 t 到 $t+\alpha\Delta t$ 时刻， T^* 由 E 点到 F 点，都在固相区无新的相变发生。有

$${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^B\}^{(t-1)} = 0 \quad ({}^{t+\alpha\Delta t}T^*, {}^{t+\alpha\Delta t}T^* < T_S) \quad (3.13)$$

(3) 由液相区 L 到固相区 S

t 时刻 T^* 在液相区，而 ${}^{t+\alpha\Delta t}T^*$ 在固相区 (图中 B 点到 E 点)。该积分点区域的物质全部发生相变。有

$${}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^B\}^{(0)} = \sum_1^n \int_{V^*} [N]^T [N] \rho \{I\} dV^* \quad ({}^{t+\alpha\Delta t}T^* < T_S, {}^{t+\alpha\Delta t}T^* > T_L) \quad (3.14)$$

$\{I\}$ 为单位列阵。 V^* 为积分点代表的区域。

(4) 液相区 L 到两相区 $L+S$ (图中 B 点到 C 点)

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\alpha\Delta t}\{Q^B\}^{(t-1)} &= -\frac{1}{\alpha\Delta t} {}^{t+\alpha\Delta t}\{C_e\}^{(t-1)} ({}^{t+\alpha\Delta t}\{T_k\}^{(t-1)} - T_L \{I\}) \\
 &\quad ({}^{t+\alpha\Delta t}T^* > T_L, T_L \geq {}^{t+\alpha\Delta t}T^* \geq T_S)
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

其中

$${}^{i+a\Delta t}[C_e]^{(i-1)} = \sum_1^n \int_{V^*} [N]^T [N] {}^{i+a\Delta t} C_e^{(i-1)} dV^* \quad (3.16)$$

(5) 由两相区 $L+S$ 到固相区 S (图中 D 点到 E 点)

$${}^{i+a\Delta t}\{Q^B\}^{(i-1)} = -\frac{1}{\alpha\Delta t} {}^{i+a\Delta t}[C_e]^{(i-1)} (T_s\{I\} - {}^i\{T^k\})$$

$$(T_L \geq {}^i T^* > T_s, \quad {}^{i+a\Delta t} T^* < T_s) \quad (3.17)$$

式中 ${}^{i+a\Delta t}[C_e]^{(i-1)}$ 见(3.16)式。

(6) 在两相区 (图中 C 点到 D 点)

$${}^{i+a\Delta t}\{Q^B\}^{(i-1)} = -\frac{1}{\alpha\Delta t} {}^{i+a\Delta t}[C_e]^{(i-1)} ({}^{i+a\Delta t}\{T^k\}^{(i-1)} - {}^i\{T^k\})$$

$$(T_L \geq {}^i T^*, \quad {}^{i+a\Delta t} T^* \geq T_s) \quad (3.18)$$

同时(3.9)式中的 ${}^i[\hat{K}]$ 要作修正, 变为 ${}^i[\hat{K}]^*$ 。即

$${}^i[\hat{K}]^* = {}^i[\hat{K}] + \frac{1}{\alpha\Delta t} \sum_1^n \int_{V^*} [N]^T [N] {}^i \rho^i C_e dV^* \quad (3.19)$$

一般不同时刻的 ${}^i C_e$ 是不同的。

对于纯物质凝固问题, $T_L = T_s$ 。为使能用上法计算, 可假设 T_L, T_s 之间相差一个很小的温度值。

用上法我们编制了相应的计算机程序。

四、数 例

1. 1/4象限角形区的凝固

设 xy 平面1/4象限角形区如图4所示。采用无量纲量, 设液体固体的 ρ, C, k 都相同, 且设

$$k = \rho C = 1, \quad T_s = T_L = 0, \quad \beta = \frac{\rho l_s}{\rho C (T_s - T_e)} = 1.5613$$

区域初始温度 $T_0 = 0$ 。在 $x=0, y=0$ 边上温度恒定, 且 $T_e = -1$ 。在 x, y 无穷远处满足绝热条件。

用本文方法计算得到 $t=0.1$ 时相变前沿位置如图4(b)所示, 与Buhia等人^[10]的解析解及W. D. Rolph等人^[2]的数值结果基本一致。

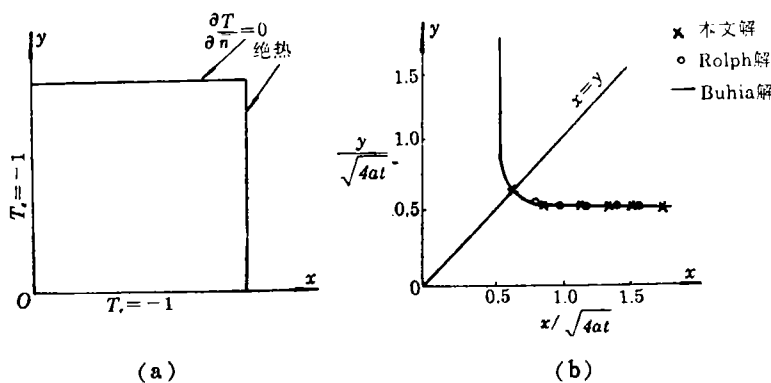


图 4

2. 连铸铸坯的温度场

铸坯截面尺寸为 $15 \times 27.4 \text{ cm}^2$, $S_1=70 \text{ cm}$, $S_2=685 \text{ cm}$, $S_3=867 \text{ cm}$ (图1)。比热 $C=490 \text{ J/kg} \cdot \text{C}$, 密度 $\rho=7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$, 潜热 $l_s=297600 \text{ J/kg}$, 相变温度 $T_L=1523.1 \text{ C}$, $T_s=1488.7 \text{ C}$, 铸坯初始温度 $T_0=1545 \text{ C}$, 环境温度 $T_e=20 \text{ C}$ 。结晶器区热流密度 $q_0=104.7 \text{ J/cm}^2 \cdot \text{s}$, 对流散热系数 $h=0.0837 \text{ J/cm}^2 \cdot \text{s}$ 。热传导系数 k 在 0 C , 800 C , 1600 C 时分别为 $0.544, 0.28, 0.377$ (单位: $\text{J/cm} \cdot \text{s}$)。相图按图 3(a) 的形式, 并忽略辐射散热的影响。

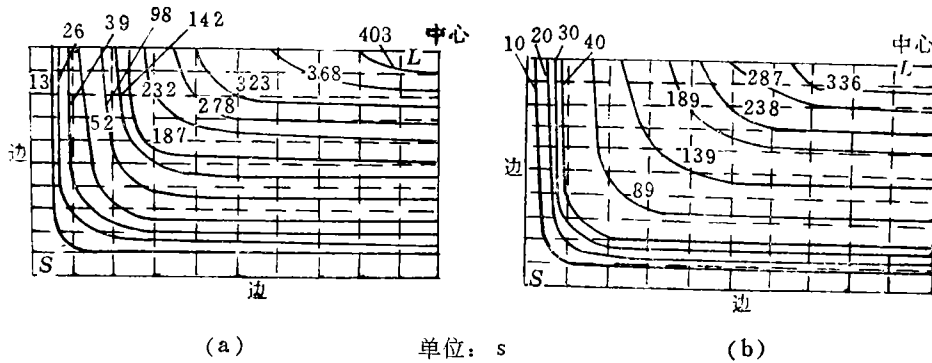


图 5 单位: s

图 5(a)、(b) 分别表示两种拉拔速度 $V_0=1.35 \text{ cm/s}$ 和 $V_0=1.73 \text{ cm/s}$ 下, 在不同时刻固液交界相变前沿的位置图。随时间增长相变前沿不断向截面中心推进。根据 $z=V_0 t$, 就可知道两种工况下, 离结晶器不同截面上液相区的范围。由计算得到上述两种速度下的液芯长分别为 553 cm 和 617 cm 。另外也可求得截面各点的温度。这些结果对确定连铸工艺参数和设备结构设计是十分有用的。

参 考 文 献

- [1] Rolph, W. D. and K. J. Bathe, An efficient algorithm for the analysis of nonlinear heat transfer with phase changes, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18(1) (1982), 119—134.
- [2] Salcudean, M., et. al., Numerical simulation of casting processing, *Pro. of Int. Heat Transfer Conference*, San Francisco (1986), 12—22.
- [3] Loyd, D., et. al., Thermal analysis of solidification, *Int. J. Communications Appl. Numer. Methods*, 4 (1988), 607.
- [4] Comini, et. al., Finite element solution of nonlinear heat conduction problems with special reference to phase change, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 8 (1974), 613—624.
- [5] Pham, Q. T., A fast unconditionally stable finite difference scheme for phase change, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28(11) (1985), 2079—2084.
- [6] Voller, V. R., et. al., A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase change problems, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30(8) (1987), 1709—1719.

- [7] Yiding, C., et. al., A numerical analysis of Stefan problem for generalized multi-dimensional phase-change structures using the enthalpy transforming modelling, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32(7) (1989), 1289—1298.
- [8] Л. Д. 朗道等,《连续介质力学》, 第五章, 彭旭麟译, 人民教育出版社 (1958).
- [9] Bathe, K. J., et. al., Finite element formulation and solution of nonlinear heat transfer, *Nuclear Engineering and Design*, 51(2) (1979), 349—401.
- [10] Budhia, H., et. al., Heat transfer with melting or freezing in a wedge, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 16(2) (1973), 195—211.

The Temperature Analysis of the Billet with Phase Change during Continuous Casting

Zhao Xing-hua Cheng Xiao-di

(Shanghai University of Technology, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai)

Abstract

In this paper, the problem of 3-D steady heat conduction including the influence of phase change on billets is turned into the 2-D transient problem by a suitable transformation technique. The effective specific heat has been employed to substitute for the effect of the phase change. The computational formulation of finite element has been presented. And the careful disposal of the phase change region has also been given.

Key words continuous casting, phase change, temperature field