

横观各向同性体滑移线场理论

阮怀宁 王维襄

(南京 河海大学) (北京 中国地质大学)
(薛大为推荐, 1992年 6 月23日收到)

摘 要

本文系统推演了横观各向同性体滑移线场理论。为解决地球动力学与岩土力学问题, 考虑到成层地质体横观各向同性与非均匀温度场作用, 本文选择了Gol'denblat-Kopnov 破坏准则, 并使物性参数随温度变化, 建立了复杂介质的强度准则。通过关联流动法则, 导出了塑性流动基本方程。应用特征线理论, 导出了滑移线斜率公式、应力沿滑移线微分公式和速度沿滑移线微分公式。应用本文理论计算了基础承压问题。本文理论将许多著名的经典理论如Mises理论、Hill理论、Coulomb理论概括为特例。这一综合理论可应用于岩土工程、地质构造、石油、采矿等许多领域。

关键词 滑移线场 横观各向同性 非均匀温度场 破坏准则 极限平衡

一、引 言

在地质与工程领域, 有大量的问题须应用数学力学理论加以解决。分析岩土材料的复杂特性, 考虑更多的地质影响因素, 建立更为适用的综合理论, 这对丰富和发展力学理论, 更好地解决实际工程问题, 有重要的理论和实用意义。

地壳上广泛发育着各种断裂, Hafner根据地质体的平衡条件计算地应力迹线, 再用破坏准则加以检验, 分析势断层^[1]。这种方法把平衡与破坏分开讨论, 并不符合地质实际。滑移线场理论统一处理平衡方程与破坏准则, 是研究地壳断裂构造的一种有效的理论方法。Ode据此用滑移线模拟了断裂^[2]。在岩土工程界, 极限平衡分析方法也是研究工程稳定性问题的一种基本理论工具。B. B. 索科洛夫斯基应用这一理论研究了大量的地基、边坡等问题^[3]。

然而, 经典的滑移线场理论主要以金属材料为研究对象, 大多考虑的是均匀连续各向同性介质。岩土材料性质多变, 由于层理、节理等面状构造的存在, 许多地质体表现出明显的横观各向同性, 且受地壳非均匀温度场的影响, 有关这种复杂介质的滑移线场理论尚不多见, 有必要建立新的理论体系以解决实际工程问题。

二、岩土材料破坏准则

经典塑性理论普遍采用的是Tresca准则和Mises准则, 其结果是材料的拉压强度相

等,不能反映岩土介质的内摩擦性。岩土力学中广泛使用的是Mohr-Coulomb准则,但准则中又未考虑中主应力的影响。Hill在其理论著作中曾给出了金属材料的正交各向异性准则,这也不宜直接用来解决岩土材料问题。为了研究成层地质体的理论问题,一些学者在Coulomb准则的基础上提出了软弱面理论,一些学者在Mises准则的基础上提出了三维广义理论。笔者通过对众多准则的具体分析,认为Pariseau准则和Gol'denblat-Kopnov准则具有较好的适用性^[4]。对于层状介质, Saada以粘土试验证实了Gol'denblat-Kopnov准则的正确性^[5]。这一准则考虑了介质的横观各向同性,拉压强度不等,中主应力影响,被选作本文的基础准则。其表达形式为:

$$\frac{1}{2}[P(\sigma_x + \sigma_z) + R\sigma_y] + \frac{1}{2}[F(\sigma_x^2 + \sigma_z^2) + H\sigma_y^2 + J(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) + I\sigma_z\sigma_x + 2M(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2) + 2N\tau_{zx}^2]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (2.1)$$

式中, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ 为坐标轴方向正应力与剪应力分量, P, R, F, H, J, I, M, N 为物性参数。xz面在横观各向同性面内, y轴垂直于层面。当介质各向同性时,有:

$$P=R, F=H=-J=-I=2M/3=2N/3 \quad (2.2)$$

代入(2.1)式得:

$$\frac{1}{2}P(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \frac{1}{2}F^{\frac{1}{2}}[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (2.3)$$

这是岩土力学中使用较多的Drucker-Prager准则。若忽略静水应力对材料破坏的影响,则有:

$$P=0 \quad (2.4)$$

(2.3)式简化为:

$$\frac{1}{2}F^{\frac{1}{2}}[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (2.5)$$

这是著名的Mises准则。(2.5)式适用于金属材料,(2.3)式适用于各向同性的岩土材料,(2.1)式适用于横观各向同性的岩土材料。在地壳非均匀温度场中,由于温度的变化使材料强度亦随之变化。在(2.1)式中,命物性参数为温度 T 的函数:

$$\left. \begin{aligned} P &= P(T), R = R(T), F = F(T), H = H(T) \\ J &= J(T), I = I(T), M = M(T), N = N(T) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

其中温度为位置坐标的函数:

$$T = T(x, y, z) \quad (2.7)$$

将(2.6)式代入(2.1)式得:

$$\frac{1}{2}[P(T)(\sigma_x + \sigma_z) + R(T)\sigma_y] + \frac{1}{2}[F(T)(\sigma_x^2 + \sigma_z^2) + H(T)\sigma_y^2 + J(T)(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) + I(T)\sigma_z\sigma_x + 2M(T)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2) + 2N(T)\tau_{zx}^2]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (2.8)$$

(2.8)式便是本文采用的最一般性准则。它反映了非均匀温度场中横观各向同性介质的强度特性。为方便起见,可将(2.8)式简记为(2.1)式。式中8个物性参数,可由垂直与平行横观各向同性面的单轴抗压、单轴抗拉、双向压缩、直剪等强度试验定出。

三、塑性流动基本方程

按照塑性位势理论，应力应变率关系可由下式导出：

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} f(\sigma_{ij}), \quad \dot{\lambda} \geq 0 \tag{3.1}$$

以破坏准则(2.8)式作为位势函数，代入(3.1)式导得关联的流动法则：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{\epsilon}_x}{\dot{\lambda}} &= \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}U^{-\frac{1}{2}} [2F\sigma_x + J\sigma_y + I\sigma_z] \\ \frac{\dot{\epsilon}_y}{\dot{\lambda}} &= \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}U^{-\frac{1}{2}} [2H\sigma_y + J(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \frac{\dot{\epsilon}_z}{\dot{\lambda}} &= \frac{1}{2}P + \frac{1}{4}U^{-\frac{1}{2}} [2F\sigma_z + I\sigma_x + J\sigma_y] \\ \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\dot{\lambda}} &= U^{-\frac{1}{2}} M\tau_{xy}, \quad \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{\dot{\lambda}} = U^{-\frac{1}{2}} M\tau_{yz}, \quad \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{\dot{\lambda}} = U^{-\frac{1}{2}} N\tau_{zx} \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

式中：

$$\begin{aligned} U &= F(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + H\sigma_y^2 + J(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z) \\ &\quad + I\sigma_z\sigma_x + 2M(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2) + 2N\tau_{zx}^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.2)式便是本文理论的本构方程。式中 $\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z, \dot{\gamma}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz}, \dot{\gamma}_{zx}$ 为坐标轴方向正应变率与剪应变率。将(3.2)式前三式相加得：

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_v &= \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = \dot{\lambda}(2P + R)/2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\dot{\lambda}U^{-\frac{1}{2}} [(2F + J + I)(\sigma_z + \sigma_x) + 2(H + J)\sigma_y] \end{aligned} \tag{3.4}$$

体积应变率 $\dot{\epsilon}_v$ 既不是零也也不为常数，而是与应力状态、温度、材料性质有关。这可反映岩土介质的剪胀剪缩与扩容等性质。当材料各向同性且拉压强度相等时，将(2.2)式、(2.4)式代入(3.4)式得： $\dot{\epsilon}_v = 0$ ，这是Mises理论的结果。考虑岩土工程中经常遇到的平面变形问题。设塑性流动平行于 xy 面，由(3.2)式导得：

$$\sigma_x = \frac{(2P^2 - I)\sigma_x + (2PR - J)\sigma_y - 4P}{2F - 2P^2} \tag{3.5}$$

由于数学上的困难，下面讨论Gol'denblat-Kopnov准则的一个特殊系列，设：

$$J = -H, \quad I = H - 2F \tag{3.6}$$

将(3.5)式、(3.6)式代入(2.8)式并经整理得：

$$\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4(1-D)} + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} G_1\sigma_x + \frac{1}{2} G_2\sigma_y + K \tag{3.7}$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} D &= 1 - \frac{MF}{H(2F - H/2)}, \quad G_1 = - \frac{2P(2F - H/2)}{[2MF(F - P^2)]^{\frac{1}{2}}} \\ G_2 &= - \frac{2(RF + PH/2)}{[2MF(F - P^2)]^{\frac{1}{2}}}, \quad K = \frac{2F}{[2MF(F - P^2)]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \tag{3.8}$$

(3.7)式是横观各向同性体平面变形条件下的破坏准则。当忽略静水应力影响时，将(2.4)式

代入(3.8)式得:

$$D \neq 0, G_1 = G_2 = 0 \quad (3.9)$$

(3.7)式简化为:

$$\left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4(1-D)} + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = K \quad (3.10)$$

这是Hill准则。当介质各向同性,考虑静水应力影响,将(2.2)式代入(3.8)式得:

$$D = 0, G_1 = G_2 = G \quad (3.11)$$

(3.7)式简化为:

$$\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} G(\sigma_x + \sigma_y) + K \quad (3.12)$$

这是Coulomb准则。若介质各向同性且忽略静水影响,将(2.2)式、(2.4)式代入(3.8)式得:

$$D = 0, G_1 = G_2 = 0 \quad (3.13)$$

(3.7)式简化为:

$$\left[\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = K \quad (3.14)$$

这是Mises准则。在滑移线场理论分析中,还要用到平衡方程:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X(x, y) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y(x, y) = 0 \quad (3.15)$$

式中 $X(x, y)$, $Y(x, y)$ 为体力分量。(3.15)式、(3.7)式便是求解应力场的基本方程。设 σ_m 为平均正应力, θ 为大主应力与 x 轴夹角,由(3.7)式可求得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{(h(\theta) - G_2 \cos 2\theta) \sigma_m + K \cos 2\theta}{h(\theta) - 0.5(G_1 - G_2) \cos 2\theta} \\ \sigma_y &= \frac{(h(\theta) - G_1 \cos 2\theta) \sigma_m - K \cos 2\theta}{h(\theta) - 0.5(G_1 - G_2) \cos 2\theta} \\ \tau_{xy} &= \frac{[0.5(G_1 + G_2) \sigma_m + K] \sin 2\theta}{h(\theta) - 0.5(G_1 - G_2) \cos 2\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

式中:

$$h(\theta) = \left[\frac{1 - D \sin^2 2\theta}{1 - D} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.17)$$

以 v_x , v_y 表示坐标轴方向的速度分量。从流动法则(3.2)式中消去 $\dot{\lambda}$,代入几何方程,再将(3.16)式代入,导得速度方程:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2\theta \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) h(\theta) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x}{\partial v_x / \partial x - \partial v_y / \partial y} &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta / (1 - D) - 0.5(G_1 - G_2) h(\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

(3.18)式是求解速度场的基本方程。设主应变率方向为 θ' ,根据应变莫尔圆有:

$$\operatorname{tg} 2\theta' = \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{\dot{\varepsilon}_x - \dot{\varepsilon}_y} = \frac{\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x}{\partial v_x / \partial x - \partial v_y / \partial y} \quad (3.19)$$

将(3.18)式第二式代入可见,一般情况下 $\theta' \neq \theta$ 。只有当介质各向同性时,将(3.11)式代入才有:

$$\operatorname{tg}2\theta' = \operatorname{tg}2\theta \tag{3.20}$$

即应变率主轴与应力主轴重合。本节(3.7)式、(3.15)式、(3.18)式是求解横观各向同性体塑性流动问题的基本方程。从5个微分方程中需解出 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, v_x, v_y$ 5个未知量。

四、应力场解答

以 σ_m, θ 为基本未知量，根据(3.7)式、(3.15)式导出应力方程。(3.16)式已满足破坏准则(3.7)式，代入平衡方程(3.15)式导得应力方程：

$$\left. \begin{aligned} A_1 \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} + A_4 \frac{\partial \theta}{\partial y} &= A_5 \\ B_1 \frac{\partial \sigma_m}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \sigma_m}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} + B_4 \frac{\partial \theta}{\partial y} &= B_5 \end{aligned} \right\} \tag{4.1}$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= [h(\theta) + G_2 \cos 2\theta] \left[h(\theta) - \frac{1}{2} (G_1 - G_2) \cos 2\theta \right] \\ A_2 &= \left[\frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sin 2\theta \right] \left[h(\theta) - \frac{1}{2} (G_1 - G_2) \cos 2\theta \right] \\ A_3 &= - \frac{2 \sin 2\theta}{h(\theta)} \left[K + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sigma_m \right] \\ A_4 &= \left[\frac{2 \cos 2\theta}{h(\theta)(1-D)} - (G_1 - G_2) \right] \left[K + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sigma_m \right] \\ A_5 &= E(\sigma_m, \theta) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \cos 2\theta + \frac{\partial T}{\partial y} \sin 2\theta \right) \\ &\quad - X(x, y) \left[h(\theta) - \frac{1}{2} (G_1 - G_2) \cos 2\theta \right]^2 \\ B_1 &= \left[\frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sin 2\theta \right] \left[h(\theta) - \frac{1}{2} (G_1 - G_2) \cos 2\theta \right] \\ B_2 &= [h(\theta) - G_1 \cos 2\theta] \left[h(\theta) - \frac{1}{2} (G_1 - G_2) \cos 2\theta \right] \\ B_3 &= \left[\frac{2 \cos 2\theta}{h(\theta)(1-D)} - (G_1 - G_2) \right] \left[K + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sigma_m \right] \\ B_4 &= \frac{2 \sin 2\theta}{h(\theta)} \left[K + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sigma_m \right] \\ B_5 &= E(\sigma_m, \theta) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \sin 2\theta - \frac{\partial T}{\partial y} \cos 2\theta \right) \\ &\quad - Y(x, y) \left[h(\theta) - \frac{1}{2} (G_1 - G_2) \cos 2\theta \right]^2 \\ E(\sigma_m, \theta) &= \left[\frac{\cos^2 2\theta}{2h(\theta)(1-D)^2} \frac{dD}{dT} \right] \left[K + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \sigma_m \right] \end{aligned} \right\} \tag{4.2}$$

$$\left. \begin{aligned} & -h(\theta) \left[\frac{dK}{dT} + \frac{1}{2} \left(\frac{dG_1}{dT} + \frac{dG_2}{dT} \right) \sigma_m \right] \\ & + \frac{1}{2} \cos 2\theta \left[\frac{dK}{dT} (G_1 - G_2) - K \left(\frac{dG_1}{dT} - \frac{dG_2}{dT} \right) \right. \\ & \left. + \left(G_1 \frac{dG_2}{dT} - \frac{dG_1}{dT} G_2 \right) \sigma_m \right] \end{aligned} \right\}$$

(4.1)式是一阶双变量拟线性非齐次偏微分方程组。用特征线理论求解，导最两族滑移线斜率公式：

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(1-D)\sin 2\theta \mp \{[(1-D)\sin 2\theta]^2 - [G_2 h(\theta)(1-D) + \cos 2\theta][G_1 h(\theta)(1-D) - \cos 2\theta]\}^{\frac{1}{2}}}{G_2 h(\theta)(1-D) + \cos 2\theta} \quad (4.3)$$

以 m_1 为 α 线斜率， m_2 为 β 线斜率。由(4.3)式可推出横观各向同性体滑移线场如下三条性质：

(1) 通常情况下两族滑移线非正交。将 α 线， β 线斜率相乘：

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{G_1 h(\theta)(1-D) - \cos 2\theta}{G_2 h(\theta)(1-D) + \cos 2\theta} \quad (4.4)$$

一般 $m_1 \cdot m_2 \neq -1$ 。仅当忽略静水应力影响时，将(3.9)式代入才有： $m_1 \cdot m_2 = -1$ 。可见滑移线正交与否与应力一次项有关。

(2) 两族滑移线一般不与应力主轴对称。若为对称应有： $\text{tg}(B-\theta) = \text{tg}(\theta-\alpha)$ ，展开以后并将(4.3)式代入为：

$$\frac{G_1 h(\theta)(1-D) + (1-2D)\cos 2\theta}{G_2 h(\theta)(1-D) + \cos 2\theta} = 1 \quad (4.5)$$

该式通常不成立。仅当介质各向同性时，将(3.11)式代入才成立。可见滑移线对称与否与介质各向异性有关。

(3) 根据前两条性质可推知，通常情况下滑移线不与最大剪应力线重合。

由应力方程(4.1)式，导得应力沿滑移线微分公式：

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_m + f_1 d\theta &= l_1 dx + g_1 dy && \text{沿}\alpha\text{线} \\ d\sigma_m + f_2 d\theta &= l_2 dx + g_2 dy && \text{沿}\beta\text{线} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} f_i &= \frac{m_i(A_3 B_4 - A_4 B_3)}{A_2 B_4 - A_4 B_2 + m_i(A_3 B_2 - A_2 B_3)} \\ l_i &= \frac{m_i(A_5 B_4 - A_4 B_5)}{A_2 B_4 - A_4 B_2 + m_i(A_3 B_2 - A_2 B_3)} \\ g_i &= \frac{m_i(A_3 B_5 - A_5 B_3)}{A_2 B_4 - A_4 B_2 + m_i(A_3 B_2 - A_2 B_3)} \end{aligned} \right\} \quad (i=1,2) \quad (4.7)$$

应用(4.3)式、(4.6)式，便可求解滑移线场及应力 σ_m ， θ ，再代入(3.16)式便得 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 。本文导出的基本公式经简化可得到一些经典理论的解答。考虑均匀温度场中无重介质。若忽略静水应力影响，将(3.9)式代入(4.3)式、(4.6)式得：

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(1-D)\sin 2\theta \mp \sqrt{[(1-D)\sin 2\theta]^2 + \cos^2 2\theta}}{\cos 2\theta} \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_m - \frac{2K\sqrt{[(1-D)\sin 2\theta]^2 + \cos^2 2\theta}}{h(\theta)(1-D\sin^2 2\theta)} d\theta = 0 & \quad \text{沿}\alpha\text{线} \\ d\sigma_m + \frac{2K\sqrt{[(1-D)\sin 2\theta]^2 + \cos^2 2\theta}}{h(\theta)(1-D\sin^2 2\theta)} d\theta = 0 & \quad \text{沿}\beta\text{线} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

得到Hill理论解答。当介质各向同性，考虑静水应力影响时将(3.11)式代入得：

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin 2\theta \mp \sqrt{1-G^2}}{G + \cos 2\theta} \quad (4.10)$$

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_m - \frac{2(K+G\sigma_m)}{\sqrt{1-G^2}} d\theta = 0 & \quad \text{沿}\alpha\text{线} \\ d\sigma_m + \frac{2(K+G\sigma_m)}{\sqrt{1-G^2}} d\theta = 0 & \quad \text{沿}\beta\text{线} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

得到Coulomb理论解答。在各向同性介质中忽略静水应力影响，将(3.13)式代入便得：

$$\frac{m_1}{m_2} = \operatorname{tg}(\theta \mp \pi/4) \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_m - 2Kd\theta = 0 & \quad \text{沿}\alpha\text{线} \\ d\sigma_m + 2Kd\theta = 0 & \quad \text{沿}\beta\text{线} \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

这是经典的Mises理论解答。

五、速度场解答

应用速度方程(3.18)式，导得速度沿滑移线微分公式：

$$\left. \begin{aligned} dv_x + m_1 dv_y = 0 & \quad \text{沿}\alpha\text{线} \\ dv_x + m_2 dv_y = 0 & \quad \text{沿}\beta\text{线} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

以 v_α, v_β 表示速度在 α, β 线上的分量，则有：

$$\left. \begin{aligned} v_x = v_\alpha \cos \alpha + v_\beta \cos \beta \\ v_y = v_\alpha \sin \alpha + v_\beta \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

将(5.2)式代入(5.1)式，并注意利用滑移线角度正切表示斜率，得到：

$$\left. \begin{aligned} dv_\alpha + \cos(\beta - \alpha) dv_\beta - v_\beta \sin(\beta - \alpha) d\beta = 0 & \quad \text{沿}\alpha\text{线} \\ dv_\beta + \cos(\beta - \alpha) dv_\alpha + v_\alpha \sin(\beta - \alpha) d\alpha = 0 & \quad \text{沿}\beta\text{线} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

若忽略静水应力影响，由上节滑移线性质(1)知， $\beta - \alpha = \pi/2$ ， $d\alpha = -d\beta$ ，代入(5.3)式得：

$$\left. \begin{aligned} dv_\alpha - v_\beta d\alpha = 0 & \quad \text{沿}\alpha\text{线} \\ dv_\beta + v_\alpha d\beta = 0 & \quad \text{沿}\beta\text{线} \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

这便是著名的Geiringer关系式。由速度微分公式可推知速度场如下三条性质：

- (1) 在横观各向同性体中，滑移线也是速度的零增长线。
- (2) 滑移线通常不是最大剪应变率线。仅当忽略静水应力影响时二者才重合。
- (3) 在直线滑移线场中，若两族滑移线斜交，则沿每族滑移线的速度值可以变化。只有在正交滑移线场中，速度沿滑移线才为常量。

六、基础承压数值计算

应用应力场基本公式(4.3)式、(4.6)式,采用沿滑移线的变网格差分法,编制电算程序,计算半无限基础上的承压问题。设定几组典型数据,先考虑均匀温度场中横观各向同性体,命:

$$\left. \begin{aligned} D=0.5, G_1=G_2=0, K=1 \\ T=0 \\ X(x,y)=Y(x,y)=0 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

计算得到滑移线网如图1。图中扇形场径向滑移线明显向水平方向偏转,这是层理作用的结果。

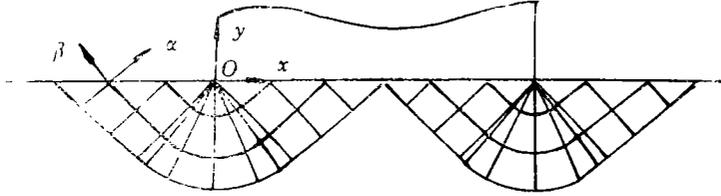


图1 横观各向同性体滑移线场

果。计算表明压头压力均匀分布,数值为:

$$\sigma_v = -4.1161 \quad (6.2)$$

Hill导出的压力公式为^[9]:

$$p^* = 2K \left[1 + \frac{\pi}{2} - \frac{D}{2} \left(1 + \frac{\pi}{4} + \sin^2 2\nu \right) + \dots \right] \quad (6.3)$$

式中 ν 为各向异性主轴与x轴夹角。将 $\nu=0, K=1, D=0.5$ 代入上式得: $p^*=4.2489$ 。与(6.2)式基本吻合。再考虑非均匀温度场中各向同性介质,命:

$$\left. \begin{aligned} D=G_1=G_2=0, K=1-0.002(T-20) \\ T=20-30y \\ X(x,y)=Y(x,y)=0 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

计算得到滑移线网如图2。压头下两族滑移线呈曲线形式。压头极限压力非均匀分布。这些

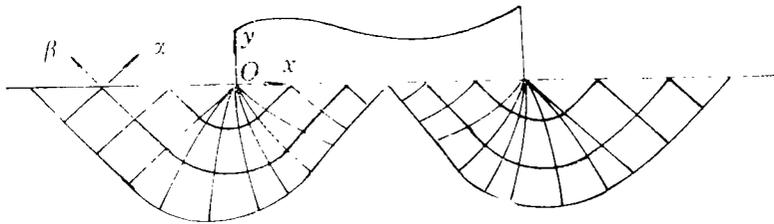


图2 非均匀温度场中介质滑移线网

变化均是温度改变了介质各点强度所产生的结果。最后考虑一般情形,命:

$$\left. \begin{aligned} D=0.5, G_1=G_2=-0.5, K=1-0.002(T-20) \\ T=20-30y \\ X(x,y)=0, Y(x,y)=-1 \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

计算得到滑移线网如图3。图中滑移线呈曲线,两族滑移线非正交,扇形场径向滑移线有偏

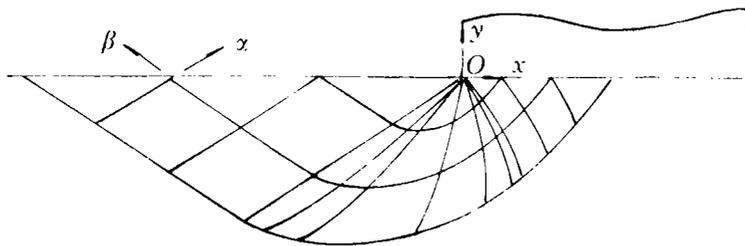


图3 一般情形下的滑移线网

转。这些都综合反映了非均匀温度场中横观各向同性介质的各方面特点。

七、结 论

(一)本文系统导出了横观各向同性体滑移线场理论的一系列方程、公式及推论。这一理论体系对解决工程与地学问题有一定的实用意义。

(二)本文通过Gol'denblat-Kopnov准则,并使物性参数随温度变化,给出了岩土材料的破坏准则。这一准则考虑了介质的横观各向同性、拉压强度不等、非均匀温度场作用、中间主应力影响等多种复杂因素,并将许多著名的经典准则概括为特例。

(三)本文导出了关联的流动法则,并由此导出了塑性流动问题应力场与速度场的基本方程。分析这些公式表明,介质体积应变率既不是零也不为常数,而是与物性、温度、应力状态有关。由于介质的横观各向同性,应变率主轴与应力主轴相分离。

(四)应用特征线理论,本文导出了滑移线斜率公式、应力沿滑移线微分公式、速度沿滑移线微分公式。分析这些公式又可知,两族滑移线通常非正交,也不与应力主轴对称。滑移线一般不是最大剪应力线,也不是最大剪应变率线,其是速度的零增长线。

(五)本文得到的理论解答,在特殊情形下可以简化为Mises理论、Coulomb理论、Hill理论的结果。

(六)本文计算了半无限基础上的承压问题,所得滑移线网表现出非正交、弯曲、偏转等多种特征。

本文理论曾被用来分析东明凹陷地质构造与岩土工程问题,取得了较好的成果。

参 考 文 献

- [1] Hafner, W., Stress distributions and faulting, *Geol. Soc. Am. Bull.*, 62 (1951), 373—398.
- [2] Odé, H., Faulting as a velocity discontinuity in plastic deformation, *Geol. Soc. Am., Memoir 79, Rock Deformation* (1960), 293—321.
- [3] B. B. 索科洛夫斯基,《松散介质静力学》,徐志英译,地质出版社(1964).
- [4] 阮怀宁,岩土工程中各向异性强度理论研究,《河海科技进展》,(3)(1992).
- [5] Saada, A. S., Strain-stress relations and failure of anisotropic clays, *J. Soil Mech. Found. Div., ASCE*, 99(SM12) (1973).
- [6] R. 希尔,《塑性数学理论》,王仁等译,科学出版社,北京(1966).

Slip-Line Field Theory of Transversely Isotropic Body

Ruan Huai-ning

(*Hehai University, Nanjing*)

Wang Wei-xiang

(*China University of Geosciences, Beijing*)

Abstract

A slip-line field theory of transversely isotropic body is proposed in the present paper in order to deal with problems in geology and geotechniques. The Gol'denblat-Kopnov failure criterion is employed. The parameters in it are treated as functions of temperature. It is applicable to transverse isotropic media in non-uniform temperature field. The basic equations of plastic deformation are developed while the associated rules of flow are derived. By means of characteristic line theory, slip-line slope formulas and laws of variation of stress and velocity along the slip lines are obtained. The indentation on semi-infinite media is calculated. The theory developed in this paper may be simplified into many classical theories such as Mises, Hill, and the Coulomb ones. This complicated theory may be applied to geotechniques, geological structures, petroleum industry, mining engineering, etc.

Key words slip-line field, transversely isotropic, non-uniform temperature field, failure criterion, limit equilibrium