应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

当极限方程有奇性时高阶线性常微分方程柯西问题解的渐近式*

蔡建平　　林宗池

（福建 漳州师院数学系）（福州 福建师大数学系）

（1992年11月11日收到）

摘　　要

本文研究当极限方程有奇性时，高阶线性常微分方程柯西问题解的渐近式．为了构造解的渐近式，我们把区域分为三个小区域，在每个小区域，微分方程的解是不同的．

关键词　极限方程　奇性　渐近式

一、引　　言

作者已研究了当极限方程有奇性时，二阶和四阶线性常微分方程柯西问题解的渐近式[1][2]．本文将利用改进的方法把上述结果推广到任意阶情形，考察如下初值问题：

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^{n+2}y^{(n+1)}+a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x) \tag{1.1}$$

$$y(0)=C,\ y'(0)=y''(0)=\cdots=y^{(n)}(0)=0 \tag{1.2}$$

其中$\varepsilon>0$是小参数．$a_i(x)$，$f(x)$有如下展开

$$a_i(x)=a_{i0}x^{n-i}+a_{i1}x^{n-i+1}+a_{i2}x^{n-i+2}+\cdots,\qquad (i=0,1,\cdots,n)$$

$$f(x)=f_0+f_1x+f_2x^2+\cdots$$

当$\varepsilon=0$时，得到极限方程

$$L_0y\equiv a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)$$

它在点$x=0$有奇性，即$a_0(0)=0$．

为了构造(1.1)、(1.2)解的渐近式，我们把区域分成三个小区域．在第一个小区域极限方程有奇性而在第二、三个小区域则无奇性．此外，在每个小区域微分方程的解是不同的．本文只给出前两个区域柯西问题解的渐近式，而在第三个区域解的渐近式可用[3]的方法类似求得，这里不再重复．为计算简便，取$a_{i0}=C_n^{n-i}$．

二、在第一个小区域内解的构造

作变换$x=\varepsilon^{(n+2)/(n+1)}t\overset{\text{def}}{=\!=}\mu t$，则(1.1)改写为

* 国家自然科学基金资助课题

$$L_\varepsilon y\equiv M_0 y+\mu M_1 y+\mu^2 M_2 y+\cdots=f_0+\mu t f_1+\mu^2 t^2 f_2+\cdots \tag{2.1}$$

其中

$$M_0 y=y_t^{(n+1)}+t^n y_t^{(n)}+a_{10} n t^{n-1} y_t^{(n-1)}+\cdots+n!\,y$$

$$M_i y=a_{0i} t^{n+i} y_t^{(n)}+a_{1i} t^{n-1+i} y_t^{(n-1)}+\cdots+a_{ni} t^i y \qquad (i=1,2,\cdots)$$

相应初始条件

$$y(t)|_{t=0}=y(x)|_{x=0}=C,\quad y^{(i)}(t)|_{t=0}=y^{(i)}(x)\mu^i|_{x=0}=0 \tag{2.2}$$

设(2.1)、(2.2)具有如下形式的解

$$y_\varepsilon=y_0+\mu y_1+\mu^2 y_2+\cdots$$

把它代入(2.1)、(2.2)并比较ε同次幂的系数得

$$M_0 y_0=f_0,\quad y_0(0)=C,\quad y_0'(0)=\cdots=y_0^{(n)}(0)=0 \tag{2.3}$$

$$M_0 y_i=t^i f_i-\sum_{r=1}^{i} M_r y_{i-r},\quad y_i(0)=y_i'(0)=\cdots=y_i^{(n)}(0)=0 \tag{2.4$_i$}$$

求解问题(2.3)，得

$$y_0=\frac{f_0}{n!}+\left(C-\frac{f_0}{n!}\right)\exp\left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]=O(1)+O(1)\exp\left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]$$

所以 $y_0^{(i)}=O(t^{ni})\exp\left[-\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\right],\qquad (i=1,2,\cdots,n)$

利用数学归纳法不难得到

$$y_i=O(P(t^{(n+2)i}))\exp\left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]+O(R(t^i)) \tag{2.5}$$

$$y_i^{(j)}=O(P(t^{(n+2)i+nj}))\exp\left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]+O(R(t^{i-j}))\qquad (i=1,2,\cdots)$$

其中$P(t^i)$，$R(t^i)$表示次数不超过i的t的多项式。

假设第一个小区域终止在点$x=x_k=\varepsilon$($t=t_k=x_k\varepsilon^{-\frac{n+2}{n+1}}=\varepsilon^{-\frac{1}{n+1}}$)，在这点

$$y^{(i)}(x)|_{x=\varepsilon}=\varepsilon^{-\frac{n+2}{n+1}i}\,y^{(i)}(t)\,|_{t=\varepsilon^{-1/(n+1)}}=O(1)$$

三、在第二个小区域内解的构造

曲线穿过第一区域进入第二区域，在这个区域内解方程(1.1)附有如下初始条件

$$y(x)|_{x=\varepsilon}=P_0,\quad y'(x)|_{x=\varepsilon}=P_1,\cdots,y^{(n)}(x)|_{x=\varepsilon}=P_n$$

作变换$z=x/\varepsilon$，则方程(1.1)化为

$$L_\varepsilon y\equiv M_0 y+\varepsilon M_1 y+\varepsilon^2 M_2 y+\cdots=f_0+\varepsilon z f_1+\varepsilon^2 z^2 f_2+\cdots \tag{3.1}$$

其中

$$M_0 y=z^n y^{(n)}+C_n^{n-1} n z^{n-1} y^{(n-1)}+\cdots+C_n^0 n!\,y$$

$$M_1 y=y^{(n+1)}+a_{01} z^{n+1} y^{(n)}+a_{11} z^n y^{(n-1)}+\cdots+a_{n1} z y$$

$$M_i y=a_{0i} z^{n+i} y^{(n)}+a_{1i} z^{n-1+i} y^{(n-1)}+\cdots+a_{ni} z^i y\qquad (i=2,3,\cdots)$$

相应初始条件

$$y^{(i)}(z)|_{z=1}=\varepsilon^i P_i\qquad (i=0,1,\cdots,n) \tag{3.2$_i$}$$

设(3.1)的外解形如

$$y(\varepsilon,z)=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+\cdots$$

代入(3.1)并比较ε同次幂系数得

$$M_0y_0=f_0 \tag{3.3}$$

$$M_0y_i=z^if_i-\sum_{r=1}^{i}M_ry_{i-r} \tag*{(3.4)$_i$}$$

注意到$M_0y_0=f_0$有基本解组

$$y_{01}=\frac{1}{z},\quad y_{02}=\frac{1}{z^2},\ \cdots,\ y_{0n}=\frac{1}{z^n}$$

且$M_0y_0=f_0$的特解为（参阅[4]）

$$\tilde{y}_0=f_0/n!$$

所以(3.3)的解为

$$y_0=\frac{f_0}{n!}+C_{01}\frac{1}{z}+\cdots+C_{0n}\frac{1}{z^n}$$

其中C_{0i}由y_0的初始条件确定．由于$\varepsilon\to0$时z充分大，故可取

$$y_0=O(1),\ y_0'=\frac{O(1)}{z^2},\cdots,y_0^{(n)}=\frac{O(1)}{z^{n+1}},\quad y_0^{(n+1}=\frac{O(1)}{z^{n+2}}$$

利用数学归纳法可求得(3.4)$_i$的解为

$$y_i=O(1)z^i+C_{i1}\frac{1}{z}+\cdots+C_{in}\frac{1}{z^n}$$

由于$\varepsilon\to0$时z充分大，故可取

$$y_i=O(1)z^i\qquad(i=1,2,3,\cdots) \tag{3.5}$$

现在转到第二迭代过程，引进新变换$z-1=\varepsilon\tau$，则$L_\varepsilon y\equiv0$化为

$$\begin{aligned}L_\varepsilon y&\equiv\varepsilon^{-n}y_\tau^{(n+1)}+a_0(\tau,\varepsilon)\varepsilon^{-n}y_\tau^{(n)}+a_1(\tau,\varepsilon)\varepsilon^{-(n-1)}y_\tau^{(n-1)}+\cdots+a_n(\tau,\varepsilon)y\\&=\varepsilon^{-n}(M_0+\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2+\cdots)y=0\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中

$$a_0(\tau,\varepsilon)=1+a_{01}(\tau)\varepsilon+a_{02}(\tau)\varepsilon^2+\cdots$$

$$a_1(\tau,\varepsilon)=C_n^{n-1}n+a_{11}(\tau)\varepsilon+a_{12}(\tau)\varepsilon^2+\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_n(\tau,\varepsilon)=C_n^0n!+a_{n1}(\tau)\varepsilon+a_{n2}(\tau)\varepsilon^2+\cdots$$

$$M_0y=y_\tau^{(n+1)}+y_\tau^{(n)}$$

$$M_1y=a_{01}(\tau)y_\tau^{(n)}+C_n^{n-1}ny_\tau^{(n-1)}$$

$$M_2y=a_{02}(\tau)y_\tau^{n}+a_{11}(\tau)y_\tau^{n-1)}+C_n^{n-2}n(n-1)y_\tau^{(n-2)}$$

$$\cdots\cdots$$

$$M_ny=a_{0n}(\tau)y_\tau^{(n)}+a_{1,n-1}(\tau)y_\tau^{n-1)}+\cdots+C_n^0\cancel{n!y}$$

$$M_{n+i}y=a_{0,n+i}(\tau)\,y_\tau^{n}+a_{1,n-1+i}(\tau)y_\tau^{n-1)}+\cdots+a_{ni}y\qquad(i=1,2,\cdots)$$

以

$$V=\varepsilon^n\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^iv_i$$

代入(3.6)并比较ε同次幂的系数得

$$M_0 v_0 = 0 \tag{3.7}$$

$$M_0 v_i = -\sum_{r=1}^{i} M_r v_{i-r} \tag{3.8$_i$}$$

相应初始条件

$$\left[y_0(z)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i y_i(z)\right]\bigg|_{z=1}+\varepsilon^n\left[v_0(\tau)+\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon^i v_i(\tau)\right]\bigg|_{\tau=0}+\varepsilon^{n+1}R_n\bigg|_{z=1}=P_0$$

$$\left[y_0^{(s)}+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i y_i^{(s)}\right]\bigg|_{z=1}+\varepsilon^n\left[v_0^{(s)}+\sum_{i=1}^{2n}\varepsilon^i v_i^{(s)}\right]\bigg|_{\tau=0}+\varepsilon^{n+1}R_n^{(s)}\bigg|_{z=1}=\varepsilon^s P_s$$

其中$\varepsilon^{n+1}R_n$为余项，

$$y_i^{(s)}=\frac{d^s y_i}{dz^s}=\frac{d^s y_i}{dx^s}\frac{d^s x}{dz^s}=\varepsilon^s\frac{d^s y_i}{dx^s}$$

即得

$$y_0|_{z=1}=P_0,\ y_1|_{z=1}=0,\ \cdots,\ y_{n-1}|_{z=1}=0,\ y_n|_{z=1}=-v_0|_{\tau=0}$$
$$y_0^{(s)}|_{z=1}=P_s,\ y_i^{(s)}|_{z=1}=-v_{i-n-s}^{(s)}|_{\tau=0}$$
$$y_0^{(n)}|_{z=1}=P_n-v_0^{(n)}|_{\tau=0},\quad y_i^{(n)}|_{z=1}=-v_i^{(n)}|_{\tau=0}$$

其中，$s=1,2,\cdots,n-1$；$i=1,2,\cdots,n$。规定$v_{-r}^{(s)}=0$，$r>0$。所以(3.7)、(3.8)$_i$相应的初始条件为

$$v_0^{(n)}|_{\tau=0}=P_n-y_0^{(n)}|_{z=1} \tag{3.9}$$

$$v_i^{(n)}|_{\tau=0}=-y_i^{(n)}|_{z=1} \tag{3.10$_i$}$$

求解(3.7)、(3.9)得

$$v_0=C_0e^{-\tau},\ C_0=(-1)^n\left[P_n-y_0^{(n)}(1)\right]$$

利用数学归纳法可求得

$$v_i=O(P_i(\tau))e^{-\tau},\ P_i(\tau)\text{为}\tau\text{的多项式} \tag{3.11}$$

设第二区域终止在点$x=N$ (即$z=N/\varepsilon$)

假设算子L_ε是正定的，即

$$(L_\varepsilon y,y)\geqslant\alpha\|y\|_1^2$$

其中α是正常数，$\|\ \|_1$是Banach范数，在此条件下不难证得

定理1 初值问题(1.1)、(1.2)的解在第一个小区域$0\leqslant x\leqslant\varepsilon$($0\leqslant t\leqslant\varepsilon^{-\frac{1}{n+1}}$) 有如下渐近展开

$$y_1(t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\mu^i y_i(t)+R_{1n}=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{\frac{n+2}{n+1}i}y_i(t)+R_{1n}$$

其中$y_i(t)$由(2.5)式确定，R_{1n}是余项且$R_{1n}=O(\mu^{n+1})=O(\varepsilon^{n+2})$。

定理2 初值问题(3.1)、(3.2)的解在第二个小区域$\varepsilon\leqslant x\leqslant N$($1\leqslant z\leqslant N/\varepsilon$) 有如下渐近展开

$$y_2(z,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i y_i(z)+\varepsilon^n\sum_{i=0}^{2n}\varepsilon^i v_i(\tau)+R_{2n}$$

其中$y_i(z)$，$v_i(\tau)$分别由(3.5)、(3.11)式确定，余项$R_{2n}=O(\varepsilon^{n+1})$。

参 考 文 献

[1] Линь Цзун-чи, Асимптотика решений задачи Коши в случае когда предельное уравнение имеет особенность, *ДАН СССР*, **157**(3) (1964), 522—523; *Math. Reviews*, **29**(3) (1965), 2490.

[2] 蔡建平，具有奇性的四阶线性常微分方程柯西问题解的渐近式，福建师范大学学报（自然科学版），**8**(3) (1992), 7—12.

[3] 苏煜城，《奇异摄动中的边界层校正法》，上海科技出版社，上海 (1983).

[4] E·卡姆克著，《常微分方程手册》，张鸿林译，科学出版社，北京 (1977).

The Asymptotic Expression of the Solution of the Cauchy's Problem for a Higher Order Linear Ordinary Differential Equation when the Limit Equation Has Singularity

Cai Jian-ping

(Department of Mathematics, Zhangzhou Normal College, Zhangzhou, Fujian)

Lin Zong-chi

(Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract

In this paper we consider the asymptotic expression of the solution of the Cauchy's problem for a higher order equation when the limit equation has singularity. In order to construct the asymptotic expression of the solution, the region is divided into three sub-areas. In every small region, the solution of the differential equation is different.

Key words limit equation, singularity, asymptotic expression