

夹层圆板的大幅度振动*

杜国君

(东北重型机械学院, 1992年12月8日收到)

摘 要

本文利用哈密顿原理导出了夹层圆板轴对称大幅度自由振动的基本方程, 并给出了表板很薄情况下的简化形式。作为算例, 利用修正迭代法求出了具有滑动固定边界条件夹层圆板轴对称大幅度自由振动的一种解析解, 并由此导出了夹层圆板振幅和振频的解析关系式。

关键词 夹层圆板 大幅度 振动

一、前 言

夹层板是航空、宇航和船舶制造等工业中的重要结构元件, 由于这种板具有较高的刚度和较轻的重量, 所以在工业中应用十分广泛。但是, 对于夹层板的大挠度问题, 由于数学上非线性的困难而仅有少数人进行过研究。刘人怀在这方面作了大量工作, 并得到了一系列有实用价值的结果^[1,2,3], 而关于夹层板的大幅度振动问题的文章更加少见, 作者在文献[1, 4, 5]的启发下对夹层圆板的轴对称大幅度自由振动加以探讨, 本文首先由变分法导出了决定圆板振动基频的非线性特征方程和边界条件, 并给出了表板很薄情况的简化形式, 然后使用修正迭代法求解该组方程, 导出了具有滑动固定边界条件夹层圆板振幅和非线性振频的解析关系式, 并给出了数值计算结果。

二、非线性特征值问题的基本方程

图1所示夹层圆板, 基本假设与文献[1]相同, 由[1]知板在轴对称变形时的总势能为:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{h_1}{E} \int_0^a [(\sigma_{r_0} + \sigma_{\theta_0})^2 - 2(1+\nu)\sigma_{r_0}\sigma_{\theta_0}] 2\pi r dr \\
 & + D_f \int_0^a [(w_{,rrr} + w_{,r}/r)^2 - 2(1-\nu)w_{,r}w_{,rrr}/r] 2\pi r dr \\
 & + \frac{D}{2} \int_0^a [(\psi_{,r} + \psi/r)^2 - 2(1-\nu)\psi\psi_{,r}/r] 2\pi r dr \\
 & + \frac{C}{2} \int_0^a (\psi + w_{,r})^2 2\pi r dr
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

* 钱伟长推荐, 1992年元月7日第一次收到。

其中 σ_{r_0} , σ_{θ_0} 为夹层圆板中面内的径向和环向应力, w 为夹层圆板中面上点的挠度, ψ 为上、下表层中面上任意点在变形后的连线与夹层圆板变形前法线的尖角, D_f 为表板的抗弯刚度, D , C 为夹层圆板的抗弯和抗剪刚度, 并且有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_0} &= \frac{E}{1-\nu^2} (u_{,r} + \nu u/r + w^2_{,r}/2) \\ \sigma_{\theta_0} &= \frac{E}{1-\nu^2} (u/r + \nu u_{,r} + \nu w^2_{,r}/2) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

这里 u 为夹层圆板中面上点的径向位移, 略去板的径向运动动能, 则对于夹层圆板的轴对称运动情形, 其动能为:

$$T = \int_0^a \frac{1}{2} m w^2_{,t} 2\pi r dr \quad (2.3)$$

哈密顿函数可表示为

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt \quad (2.4)$$

根据哈密顿原理有

$$\delta H = 0 \quad (2.5)$$

利用(2.5)并考虑到如下边界条件^[1]

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } r=0 \text{ 或 } r=a \text{ 时} \\ &r\sigma_{r_0} = 0, \text{ 或 } \delta u = 0 \\ &2rD_f [(r w_{,r})_{,r}/r]_{,r} - 2rh_1\sigma_{r_0} w_{,r} - rC(\psi + w_{,r}) = 0 \\ &\text{或 } \delta w = 0 \\ &Dr(\psi_{,r} + \nu\psi/r) = 0, \text{ 或 } \delta\psi = 0 \\ &D_f r(w_{,rr} + \nu w_{,r}/r) = 0, \text{ 或 } (\delta w)_{,r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

可导出

$$\left. \begin{aligned} mrw_{,tt} + 2D_f (r((r w_{,r})_{,r}/r)_{,r})_{,r} - 2h_1(r\sigma_{r_0} w_{,r})_{,r} - C(r(\psi + w_{,r}))_{,r} &= 0 \\ \sigma_{\theta_0} - (r\sigma_{r_0})_{,r} &= 0 \\ D((r\psi)_{,r}/r)_{,r} - C(\psi + w_{,r}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.7a, b, c)$$

应变协调方程可由(2.2) 消去 u 求得

$$\sigma_{r_0} - (r\sigma_{\theta_0})_{,r} - E w^2_{,r}/2 = 0 \quad (2.8)$$

方程(2.7)、(2.8)便是夹层圆板大幅度振动的基本方程。

三、方程的简化

若表板很薄, 即 $h_1 \ll h$, 可得到下面的简化方程和边界条件

$$\left. \begin{aligned} mrw_{,tt} - 2h_1(r\sigma_{r_0} w_{,r})_{,r} - G_2 h_0 (r(\psi + w_{,r}))_{,r} &= 0 \\ \sigma_{\theta_0} - (r\sigma_{r_0})_{,r} &= 0 \\ D((r\psi)_{,r}/r)_{,r} - G_2 h_0 (\psi + w_{,r}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1a, b, c)$$

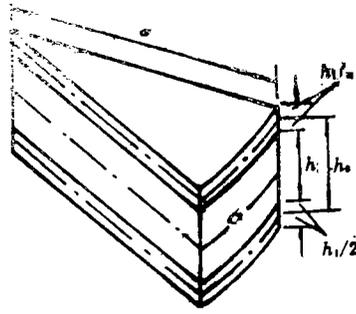


图1 夹层圆板

$$\left. \begin{aligned} &\text{当 } r=0 \text{ 或 } r=a \text{ 时} \\ &r\sigma_{r_0}=0, \text{ 或 } \delta u=0 \\ &G_2 h_0 r(\psi+w_{,r})=-2h_1 r\sigma_{r_0} w_{,r}, \text{ 或 } \delta w=0 \\ &Dr(\psi_{,r}+\nu\psi/r)=0, \text{ 或 } \delta\psi=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中 G_2 为夹心的剪切模量, 应变协调方程仍然是(2.8).

假设

$$w = \bar{W}(r) \cos \bar{\omega} t \quad (3.3)$$

则由(2.8)、(3.1c)有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_0} &= \bar{S}(r) \cos^2 \bar{\omega} t \\ \sigma_{\theta_0} &= \bar{U}(r) \cos^2 \bar{\omega} t \\ \psi &= \bar{\Psi}(r) \cos \bar{\omega} t \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

将(3.3)、(3.4)代入(3.1a)左端, 并在区间 $[0, 2\pi/\bar{\omega}]$ 上应用熟知的 Kantorovich 平均法^[6], 可得到

$$\bar{\omega}^2 m r \bar{W} + \frac{3}{2} h_1 (r \bar{S} \bar{W}_{,r})_{,r} + G_2 h_0 (r \bar{\Psi} + \bar{W}_{,r})_{,r} = 0 \quad (3.5)$$

将(3.3)、(3.4)代入(3.1c)并对 r 求一阶导数, 再与(3.5)联立得

$$\begin{aligned} &(r((r\bar{W}_{,r})_{,r}/r))_{,r} + \frac{\bar{\omega}^2 m}{G_2 h_0} (r\bar{W}_{,r})_{,r} - \frac{\bar{\omega}^2 m}{D} r\bar{W} \\ &+ \frac{3h_1}{2G_2 h_0} (r((r\bar{S}\bar{W}_{,r})_{,r}/r))_{,r} - \frac{3h_1}{2D} (r\bar{S}\bar{W}_{,r})_{,r} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

再将(3.3)、(3.4)代入(3.1b)、(2.8)并将两式联立得

$$((r^2 \bar{S})_{,r}/r)_{,r} + E \bar{W}_{,r}^2 / 2r = 0 \quad (3.7)$$

四、问题的求解

我们应用简化方程(3.6)、(3.7)研究图2所示具有滑动固定边界条件夹层圆板的大幅度振动问题, 此时边界条件变为

在 $r=a$ 时

$$\bar{W} = 0, \bar{\Psi} = -\frac{\bar{\omega}^2 m}{G_2 h_0 r} \int_0^r r \bar{W} dr - \frac{3h_1}{2G_0 h_0} \bar{S} \bar{W}_{,r} - \bar{W}_{,r} = 0, \bar{S} = 0 \quad (4.1)$$

在 $r=0$ 时

$$\bar{W} = \bar{W}_m, \bar{\Psi} = -\frac{\bar{\omega}^2 m}{G_2 h_0 r} \int_0^r r \bar{W} dr - \frac{3h_1}{2G_2 h_0} \bar{S} \bar{W}_{,r} - \bar{W}_{,r} = 0, \bar{S} < \infty \quad (4.2)$$

为计算简单, 引入无量纲量

$$\left. \begin{aligned} \rho &= r/a, W = \bar{W}/h_0, \omega = \bar{\omega}(ma^4/D)^{1/2} \\ S &= \frac{3h_1 a^2}{2D} \bar{S}, K = D/G_2 h_0 a^2, \beta = \frac{3}{2}(1-\nu^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

则边值问题(3.6)、(3.7)、(4.1)、(4.2)成为

$$\begin{aligned} &(\rho((\rho W_{,\rho})_{,\rho}/\rho))_{,\rho} - \omega^2 \rho W + \omega^2 K (\rho W_{,\rho})_{,\rho} \\ &+ K (\rho((\rho S W_{,\rho})_{,\rho}/\rho))_{,\rho} - (\rho S W_{,\rho})_{,\rho} = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

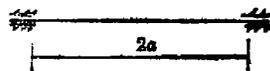


图2 滑动固定边夹层圆板

$$((\rho^2 S), \rho/\rho), \rho + \beta W^2, \rho/\rho = 0 \quad (4.5)$$

在 $\rho=1$ 时

$$W=0, K\omega^2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W d\rho + KSW, \rho + W, \rho = 0, S=0 \quad (4.6a, b, c)$$

在 $\rho=0$ 时

$$W=W_m, K\omega^2 \frac{1}{|\rho|} \int_0^\rho \rho W d\rho + KSW, \rho + W, \rho = 0, S < \infty \quad (4.7a, b, c)$$

我们使用修正迭代法求解此组非线性边值问题，在一阶近似中，略去 (4.4)、(4.6)、(4.7) 中的非线性项，然后将由 (4.4) 所得的解 W_1 代入 (4.5)，便得到下列线性特值问题

$$(L^2 + \omega_0^2 KL - \omega_0^2)W_1 = 0 \quad (4.8)$$

$$((\rho^2 S_1), \rho/\rho), \rho + \beta W_1^2, \rho/\rho = 0 \quad (4.9)$$

在 $\rho=1$ 时

$$W_1=0, K\omega_0^2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W_1 d\rho + W_1, \rho = 0, S_1=0 \quad (4.10a, b, c)$$

在 $\rho=0$ 时

$$W_1=W_m, K\omega_0^2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W_1 d\rho + W_1, \rho = 0, S_1 < \infty \quad (4.11a, b, c)$$

其中 $L = (\rho(\dots), \rho), \rho/\rho$, ω_0 为夹层板的无量纲化后的线性振频。

方程 (4.8) 的通解为

$$W_1 = C_1 J_0(\rho) + C_2 N_0(\rho) + C_3 I_0(\rho) + C_4 K_0(\rho) \quad (4.12)$$

其中 $J_0(\rho)$ 和 $N_0(\rho)$ 分别称为实宗量的、零阶的第一类和第二类 Bessel 函数, $I_0(\rho)$ 和 $K_0(\rho)$ 分别称为虚宗量的、零阶的第一类和第二类 Bessel 函数, 且有

$$\left. \begin{aligned} J_0(\rho) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_0^{2j}}{2^{2j}(j!)^2 b^j} \rho^{2j} \\ N_0(\rho) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j \omega_0^{2j} \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}}{2^{2j}(j!)^2 b^j} \rho^{2j} + \ln \rho \cdot J_0(\rho) \\ I_0(\rho) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b^j}{2^{2j}(j!)^2} \rho^{2j} \\ K_0(\rho) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} b^j \sum_{i=1}^j \frac{1}{i}}{2^{2j}(j!)^2} \rho^{2j} + \ln \rho \cdot I_0(\rho) \\ b &= \omega_0^2 (K + (K^2 + 4/\omega_0^2)^{1/2})/2 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

对于圆板问题, $\rho=0$ 时, $W_1=W_m$ 有限, 则有 $C_2=C_4=0$, 因此方程 (4.8) 的解可写成

$$W_1 = W_m (\mu_1 J_0(\rho) + \mu_2 I_0(\rho)) \quad (4.14)$$

式 (4.14) 中 μ_1, μ_2 为待定系数, 应由板的边界条件确定, 将 (4.14) 代入 (4.10a, b), (4.11a) 可得到

$$A\mu = 0 \quad (4.15)$$

其中

$$\mu = [\mu_1, \mu_2, 1]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & -1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 中各元素为

$$a_{01} = a_{02} = 1$$

$$a_{11} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_0^{2j}}{2^{2j} (j_1)^2 b^j}$$

$$a_{12} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b^j}{2^{2j} (j_1)^2}$$

$$a_{21} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K \omega_0^{2j+2} + 4j(j+1) \omega_0^{2j}}{(2j+2) 2^{2j} (j_1)^2 b^j}$$

$$a_{22} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b^j (K \omega_0^2 + 4j(j+1))}{(2j+2) 2^{2j} (j_1)^2}$$

由于 μ 为非零向量, 故 A 的行列式等于零, 即

$$\det A = 0 \quad (4.16)$$

由 (4.16) 中解出 ω_0 值, 于是得到了 a_{lm} ($l=0, 1, 2; m=1, 2$) 的值, 再由 (4.15) 可定出 μ_1, μ_2 的值。

为求 S_1 , 将 (4.14) 写成更简洁的形式

$$W_1 = W_m \sum_{j=0}^{\infty} A_j \rho^{2j} \quad (4.17)$$

其中

$$A_j = \mu_1 \frac{\omega_0^{2j}}{2^{2j} (j_1)^2 b^j} + \mu_2 \frac{(-1)^j b^j}{2^{2j} (j_1)^2}$$

再将 (4.17) 代入 (4.9), 直接积分方程并利用边界条件 (4.10c)、(4.11c) 可得

$$S_1 = W_m^2 \sum_{j=0}^{\infty} B_j \rho^{2j} \quad (4.18)$$

其中

$$B_j = -\frac{\beta}{j(j+1)} \sum_{i=1}^j i(j-i+1) A_i A_{j-i+1} \quad (j=1, 2, \dots)$$

$$B_0 = -\sum_{j=1}^{\infty} B_j$$

在二阶迭代中, 有如下修正特征值问题

$$\begin{aligned} & (\rho((\rho W_2, \rho), \rho/\rho), \rho), \rho - \omega^2 \rho W_2 + \omega^2 K(\rho W_2, \rho), \rho \\ & + K(\rho((\rho S_1 W_1, \rho), \rho/\rho), \rho), \rho - (\rho S_1 W_1, \rho), \rho = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

在 $\rho=1$ 时

$$W_2=0, K\omega^2 \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \rho W_2 d\rho + W_{2,\rho} + KS_1 W_{1,\rho} = 0, S_2 = 0 \quad (4.20a, b, c)$$

在 $\rho=0$ 时

$$W_2 = W_m, K\omega^2 \frac{1}{\rho} \int_0^{\rho} \rho W_2 d\rho + W_{2,\rho} + KS_1 W_{1,\rho} = 0, S_2 < \infty \quad (4.21a, b, c)$$

这里 ω 是线性振动频率加以修正后的非线性振频。

将式(4.17)、(4.18)代入(4.19)可求得(4.19)的解为

$$W_2 = W_m (\xi_1 J_0(\rho) + \xi_2 I_0(\rho)) + W_m^2 \sum_{j=0}^{\infty} C_j \rho^{2j} \quad (4.22)$$

其中

$$C_0 = C_1 = 0$$

$$C_j = \frac{D_{j-2}}{16j^2(j-1)^2} - \frac{\omega^2 K}{4j^2} C_{j-1} + \frac{\omega^2}{16j^2(j-1)^2} C_{j-2} \quad (j \geq 2)$$

$$D_j = - \sum_{i=1}^2 E_j^{(i)}$$

$$E_j^{(1)} = 16K(j+2)(j+1)^2 \sum_{i=0}^{j+2} i A_i B_{j-i+2}$$

$$E_j^{(2)} = -4(j+1) \sum_{i=1}^{j+1} i A_i B_{j-i+1}$$

待定系数 ξ_1, ξ_2 由边界条件确定, 将(4.22)式代入(4.20a, b)、(4.21a)可得到

$$B\xi = 0 \quad (4.23)$$

其中

$$\xi = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad 1]^T$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

B 中各元素为

$$b_{01} = b_{02} = -b_{03} = 1$$

$$b_{11} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega^{2j}}{2^{2j}(j!)^2 b^j}, \quad b_{12} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b^j}{2^{2j}(j!)^2}, \quad b_{13} = W_m^2 \sum_{j=0}^{\infty} C_j$$

$$b_{21} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K\omega^{2j+2} + 4j(j+1)\omega^{2j}}{(2j+2)2^{2j}(j!)^2 b^j},$$

$$b_{22} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j b^j (K\omega^2 + 4j(j+1))}{(2j+2)2^{2j}(j!)^2}$$

$$b_{23} = W_m^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K\omega^2 + 4j(j+1)}{2j+2} C_j$$

由于 ξ 为非零向量, 故 B 的行列式等于零, 即

$$\det B = 0 \tag{4.24}$$

方程(4.24)可转化为下述代数方程

$$W_m^2 = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(\omega) / \sum_{j=0}^{\infty} G_j(\omega)$$

式中 $F_j(\omega)$ 、 $G_j(\omega)$ 的表达式从略。

在式(4.25)中, 令 $W_m = 0$, 则(4.25)退化到线性情形(4.16), 并由此得到 $\omega = \omega_0$ 。

式(4.25)就是所求出的夹层圆板振动的振幅和振频的解析关系式, 利用此式可对一定的幅值 W_m 求出相应的 ω 值, 再由前面的递推公式求出 C_j , 因此矩阵 B 的元素就完全确定了, 从而由方程(4.23)定出系数 ξ_1, ξ_2 , 到此, 二阶修正迭代解就完全确定了。

利用式(4.25)对所讨论的滑动固定边夹层圆板进行了数值计算, 所得数值结果绘于图3和图4中, 由图3可见, 随着 K 值增大, 夹层圆板自由振动的非线性效应逐渐加强, 由此可见, 夹层板非线性振动的研究, 不仅具有理论意义, 而且也具有一定的实际意义。图4给出了夹层圆板的线性基频随 K 的变化曲线, 可见, 具有较大 K 值的夹层板, 其线性基频较小。

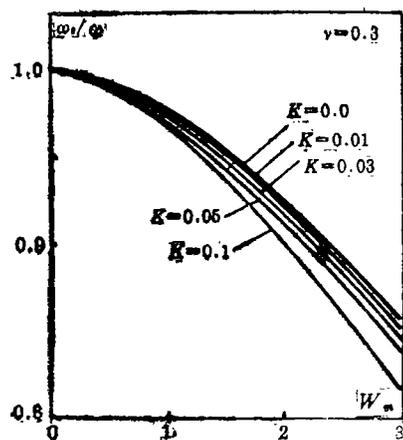


图3 K 值对振频的影响

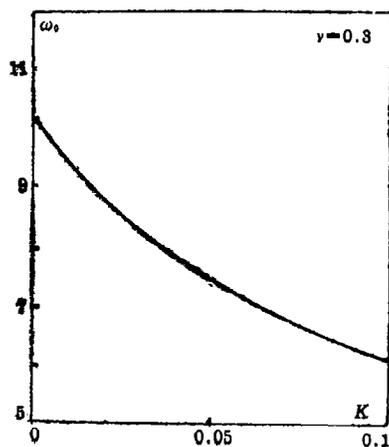


图4 K 值对线性基频的影响

参 考 文 献

[1] 刘人怀, 夹层圆板的非线性弯曲, 应用数学和力学, 2(2)(1981), 173.
 [3] 刘人怀、施云方, 夹层圆板大挠度问题的精确解, 应用数学和力学, 3(1)(1982), 11.
 [3] 刘人怀、朱高秋, 夹层圆板大挠度问题的进一步研究, 应用数学和力学, 10(12)(1989), 1041.
 [4] 李东, 环形薄板的大幅度振动, 应用数学和力学, 12(6)(1991), 547.
 [5] 李东、刘人怀, 修正迭代法在波纹圆板非线性振动问题中的应用, 应用数学和力学, 11(1)(1990), 13.

Large Amplitude Vibration of Circular Sandwich Plates

Du Guo-jun

(Northeast Institute of Heavy Machinery, Qiqihar)

Abstract

In this paper, fundamental equations of the axisymmetric large amplitude free vibration for circular sandwich plates are derived by means of Hamilton principle. In most cases, the sandwich plates are composed of very thin faces, then the preceding fundamental equations are simplified considerably. For an illustrative example, a circular sandwich plate with edge clamped but free to slip is considered, and then we got a pure analytic solution of the axisymmetric large amplitude free vibration with the aid of the modified iteration method, and derived an analytic relation for the amplitude-frequency response.

Key words circular sandwich plate, large amplitude, vibration