

# 三维盆地发育史的数值模拟\*

袁益让 王文洽 羊丹平

(山东大学数学系)

韩玉笈 杨成顺

(胜利石油管理局计算中心)

## 摘 要

盆地数值模拟方法就是在计算机上重建盆地发育的地史和热史,并将这些地质信息进一步定量化地导出石油生成、运移和聚集的历史。其中地史和热史的数学模型是一组非线性偏微分方程初边值问题。本文给出了三维问题的数值解法,模型问题的稳定性分析以及计算实例的数值结果,计算得到的超压和古温度合理,有很强的物理特性。

**关键词** 含油气盆地 盆地发育 古温度 数学模型 数值模拟 数值解

## 一、引 言

随着地质科学、地球化学、计算机及计算技术的迅速发展和应用,资源评价的研究正逐渐由定性向定量方向发展。三维盆地发育史的数值模拟就是利用现代化的计算机和计算技术,再现盆地发育过程,特别是盆地发育过程中与生成油气有主要关系的地层古温度和地层压力在空间和时间概念下的动态变化过程。这对于进一步研究油气生成、运移、聚集及油气分布规律、分布范围,定量预测一个盆地、一个地区乃至更大范围的油气蕴藏量,保证石油工业的稳步发育有重要意义<sup>[1][2][3]</sup>。盆地模拟的数学模型是一组非线性偏微分方程初、边值问题。其求解区域随盆地的沉积压实的发育过程而变化,再加上被模拟的盆地面积大、地层厚、沉积发育时间长达数千万年乃至上亿年之久,这类问题的数值解法只能在大步长下进行,其数值分析也有重要理论价值。本文对盆地模拟的三维问题提出了一类行之有效的数值方法,并且得到了满意的数值结果。文中给出了超压和地层古温度的计算格式、计算实例的数值结果、模型问题的理论分析,同时也可以得到孔隙度、渗透率、粘度等地质参数动态结果。

\* 钱伟长推荐,1992年1月21日收到。  
国家教委博士点基金资助课题。

## 二、问题的数学模型

问题的数学模型是一个偶合的抛物型偏微分方程组初边值问题。第一个关于超压 $P$ 和第二个关于古温度 $T$ 的方程都是抛物型的，第三个关于孔隙度 $\phi$ 的方程是一阶常微分方程<sup>[4]</sup>。

### 1. 超压方程

我们用 $V$ 表示盆地岩块体积， $V_s$ 表示骨架体积， $\phi$ 表示岩块孔隙度，则

$$V_s = (1 - \phi)V$$

在岩块骨架是不可压缩的前提下，我们有导数 $\frac{\partial V_s}{\partial t} = 0$ ，把它代入上式，并解出 $\frac{\partial \phi}{\partial t}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1 - \phi}{V} \frac{\partial V}{\partial t}$$

设岩块承受的上覆荷重为 $S$ ，岩块孔隙中流体的内压为 $\bar{P}$ ，则作用在岩块上的有效压力为 $\sigma = S - \bar{P}$ ，由虎克定律，岩块的相对形变与有效压力的改变量成正比，即

$$\frac{\partial V}{V} = -\alpha \partial \sigma$$

此处 $\alpha$ 为岩块的压缩系数，上式同除以时间的微分 $\partial t$ ，得

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\alpha(1 - \phi) \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (2.1)$$

设岩块孔隙内流体的密度为 $\rho_w$ ，压缩系数为 $\beta$ ，在流体可以压缩的情况下应用虎克定律，经仔细推导可得

$$\frac{\partial \rho_w}{\partial t} = \rho_w \beta \frac{\partial \bar{P}}{\partial t} \quad (2.2)$$

(2.2)式表明流体密度的变化率与流体压力的变化率成正比。

另外，描述质量守恒的连续性方程为

$$-\nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v}) = \frac{\partial (\rho_w \phi)}{\partial t} \quad (2.3)$$

式中 $\mathbf{v}$ 是速度向量，由Darcy定律给出

$$\mathbf{v} = -\frac{\kappa}{\mu} \nabla (\bar{P} - \rho_w g D) \quad (2.4)$$

此处 $\kappa$ 是渗透率， $\mu$ 是流体粘度， $D$ 是距水准面的深度， $g$ 为重力加速度。

如果用 $P_n = \rho_w g D$ 表示静水柱压力， $P$ 表示孔隙内流体的超压，则 $P = \bar{P} - P_n$ ，把 $\bar{P} = P + P_n$ 和公式(2.1)、(2.2)、(2.4)代入连续性方程(2.3)的展开式中，在微小压缩的情况下可得

$$\nabla \cdot \left[ \frac{\kappa}{\mu} \nabla P \right] = (\alpha(1 - \phi) + \beta\phi) \frac{\partial P}{\partial t} - \alpha(1 - \phi) \frac{\partial S}{\partial t} + (\alpha(1 - \phi) + \beta\phi) \frac{\partial P_n}{\partial t} \quad (2.5)$$

(2.5)式为超压方程，超压函数 $P = P(x, y, z, t)$ ，在三维盆地模型中

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

## 2. 热流方程

热流方程描述盆地地层温度的动态变化, 满足能量守恒定律, 控制着地层内能量的传递. 本文采用的数学模型考虑了热的传导和对流同时发生的情况

$$\nabla \cdot [\kappa_s \nabla T] - c_w \rho_w \nabla \cdot (\mathbf{v}T) + Q = c_s \rho_s \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.6)$$

其中  $T = T(x, y, z, t)$  是古温度函数,  $\kappa_s$  是沉积物的热导率,  $c_w$  和  $c_s$  分别是流体和沉积物的比热,  $\rho_s$  是沉积物的密度,  $Q$  是热的源汇项.

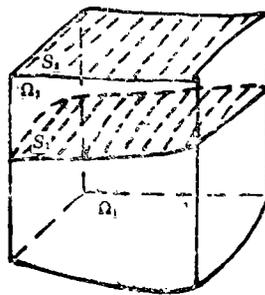


图1 求解区域示意图

## 3. 定义域、边界条件和初始条件

如图 1,  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $\Omega_1$  为超压区,  $\Omega_2$  为非超压区, 在  $\Omega_1$  上  $P$  满足方程(2.5), 在  $\Omega_2$  上  $P \equiv 0$ ,  $P = 0$ ,  $(x, y, z) \in S_1$ ,  $\nabla P \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $(x, y, z) \in (\partial\Omega_1 \setminus S_1)$ . 古温度  $T$  定义在  $\Omega$  上.  $T = T_0$ ,  $(x, y, z) \in S_2$ ,  $\nabla T \cdot \mathbf{v} = 0$ ,  $(x, y, z) \in (\partial\Omega \setminus S_2)$ ,  $\mathbf{v}$  为边界的单位外法线向量. 初始条件分别为  $P(x, y, z, 0) = P^0(x, y, z)$ ,  $T(x, y, z, 0) = T^0(x, y, z)$ .

## 4. 孔隙度方程

把  $\sigma = S - \bar{P}$  和  $\bar{P} = P + P_m$  代入方程(2.1) 可得孔隙度  $\phi = \phi(x, y, z, t)$  满足的方程

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\alpha(1-\phi) \left( \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P_m}{\partial t} \right) \quad (2.7)$$

## 5. 主要地质参数的计算公式

流体粘度  $\mu$ .  $\mu$  主要与温度有关, 其计算公式为

$$\mu = (5.3 + 3.8AT - 0.26AT^3)^{-1}$$

其中  $AT = (T - 150) / 100$

渗透率  $\kappa$ . 渗透率  $\kappa$  由孔隙度与渗透率的经验公式给出, 采用指数型回归公式  $\kappa = a\phi^b$ , 其中  $\phi$  是孔隙度,  $a, b$  为常数.

岩石压缩系数  $\alpha$ . 从统计意义上讲, 且将系数  $\alpha$  的常数与孔隙度  $\phi$  呈线性关系. 该对应于  $\alpha_{\min}$ ,  $\phi_0$  对应于  $\alpha_{\max}$ .  $h$  为截距, 则

$$\frac{\log_{10} \alpha_{\min} - h}{\phi_{\min}} = \frac{\log_{10} \alpha_{\max} - h}{\phi_0}$$

于是  $h = (\phi_{\min} \log_{10} \alpha_{\max} - \phi_0 \log_{10} \alpha_{\min}) / (\phi_{\min} - \phi_0)$ , 从而可以导出  $\alpha$  的计算公式

$$\alpha = 10^L$$

$$\text{式中 } L = \left[ \frac{\phi}{\phi_{\min}} (\log_{10} \alpha_{\min} - h) + h \right]$$

沉积物的密度  $\rho_s = \phi \rho_w + (1 - \phi) \rho_r$ ,  $\rho_r$  为岩石骨架的密度.

沉积物热导率  $\kappa_s = \kappa_r (\kappa_w / \kappa_r)^\phi$ , 其中  $\kappa_r$  和  $\kappa_w$  分别是岩石和流体的热导率.

沉积物的比热  $c_s$

$$c_s = (1 - \phi) c_r [1 + \Omega_r (T - T_0)] + \phi c_w [1 + \Omega_w (T - T_0)]$$

$c_r$ 和 $c_w$ 分别是岩石和流体的比热,  $\Omega_r$ 和 $\Omega_w$ 分别是岩石和流体的比热随温度变化的比例系数, 本文取 $\Omega_r=0.769 \times 10^{-3}$ ,  $\Omega_w=0.219 \times 10^{-3}$ .

### 三、一类差分格式

先对区域 $\Omega$ 进行等距剖分, 记 $h_x=x_i-x_{i-1}$  ( $i=1, 2, \dots, N_x$ ),  $h_y=y_j-y_{j-1}$  ( $j=1, 2, \dots, N_y$ ),  $h_z=z_m-z_{m-1}$  ( $m=1, 2, \dots, N_z$ ),  $\tau=t_n-t_{n-1}$ ,  $P_{i,j,m}^n=P(x_i, y_j, z_m, t_n)$ ,  $T_{i,j,m}^n=T(x_i, y_j, z_m, t_n)$ , 其次在节点 $(i, j, m)=(x_i, y_j, z_m)$ 处建立对偶剖分区域 $D$

$$D=\{(x, y, z): x_{i-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+\frac{1}{2}}, z_{m-\frac{1}{2}} \leq z \leq z_{m+\frac{1}{2}}\}.$$

#### 1. 超压方程(2.5)的离散化

为简便起见, 记 $\bar{E}=\alpha(1-\phi)+\beta\phi$ ,  $\bar{F}=\alpha(1-\phi)$ ,  $K_\mu=\kappa/\mu$ , 在方程(2.5)中先用 $(P^{n+1}-P^n)/\tau$ 代替导数 $\frac{\partial P}{\partial t}$ , 则有

$$\nabla \cdot [K_\mu \nabla P^{n+1}] = \bar{E}(P^{n+1}-P^n)/\tau - \bar{F} \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{E} \frac{\partial P^n}{\partial t} \quad (3.1)$$

把(3.1)式写成可分裂的形式

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\tau}{\bar{E}} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_\mu \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \left(1 - \frac{\tau}{\bar{E}} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_\mu \frac{\partial}{\partial x}\right)\right) \left(1 - \frac{\tau}{\bar{E}} \frac{\partial}{\partial y} \left(K_\mu \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) P^{n+1} \\ & = P^n + \frac{\tau \bar{F}}{\bar{E}} \frac{\partial S}{\partial t} - \tau \frac{\partial P^n}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

(3.2)式与(3.1)式比较, 相差一个带有高阶导数的无穷小量. 令

$$\left(1 - \frac{\tau}{\bar{E}} \frac{\partial}{\partial z} \left(K_\mu \frac{\partial}{\partial z}\right)\right) u = P^n + \frac{\tau \bar{F}}{\bar{E}} \frac{\partial S}{\partial t} - \tau \frac{\partial P^n}{\partial t} \quad (3.3)$$

$$\left(1 - \frac{\tau}{\bar{E}} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_\mu \frac{\partial}{\partial x}\right)\right) v = u \quad (3.4)$$

$$\left(1 - \frac{\tau}{\bar{E}} \frac{\partial}{\partial y} \left(K_\mu \frac{\partial}{\partial y}\right)\right) P^{n+1} = v \quad (3.5)$$

则(3.3)、(3.4)、(3.5)式等价于(3.2)式.

下面对方程(3.3)~(3.5)做空间变量离散化, 把方程(3.3)在对偶剖分区域 $D$ 上积分

$$\begin{aligned} & \iiint_D dx dy dz - \tau \iiint_D \frac{\partial}{\partial z} \left(K_\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right) dx dy dz = \iiint_D \bar{E} P^n dx dy dz \\ & + \tau \iiint_D \frac{\partial S}{\partial t} dx dy dz - \tau \iiint_D \bar{E} \frac{\partial P^n}{\partial t} dx dy dz \end{aligned} \quad (3.6)$$

由Green公式

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial z} \left(K_\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right) dx dy dz = \sum_{q=1}^6 \iint_{S_q} K_\mu \frac{\partial u}{\partial z} \cos(n, z) dS$$

式中  $S_1=\{(x_{i-\frac{1}{2}}, y, z): y_{j-\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+\frac{1}{2}}, z_{m-\frac{1}{2}} \leq z \leq z_{m+\frac{1}{2}}\}$ ,  $S_2=\{(x_{i+\frac{1}{2}}, y, z): y_{j-\frac{1}{2}} \leq y \leq y_{j+\frac{1}{2}}, z_{m-\frac{1}{2}} \leq z \leq z_{m+\frac{1}{2}}\}$ ,  $S_3=\{(x, y_{j-1/2}, z): x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, z_{m-1/2} \leq z \leq z_{m+1/2}\}$ ,  $S_4=\{(x, y_{j+1/2}, z): x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, z_{m-1/2} \leq z \leq z_{m+1/2}\}$ ,  $S_5=\{(x, y, z_{m-1/2}): x_{i-1/2} \leq x$

$\leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}$ ,  $S_6 = \{(x, y, z_{m+1/2}) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\}$ . 由于  $\cos(n, z) dS$  只在  $S_5$  和  $S_6$  上不等于零, 于是有

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial z} \left( K_{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx dy dz = - \iint_{S_5} K_{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} dx dy + \iint_{S_6} K_{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} dx dy$$

记  $K_{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} = w$ , 考虑到  $K_{\mu} \frac{\partial u}{\partial z}$  的连续性, 由中矩形公式  $\iint_{S_5} K_{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} dx dy = w_{i,j,m-1/2} h_x h_y$

把  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{w}{K_{\mu}}$  在  $[z_{m-1}, z_m]$  上积分, 则

$$u_{i,j,m} - u_{i,j,m-1} \approx w_{i,j,m-1/2} \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{dz}{K_{\mu}}$$

于是  $\tau \iint_{S_5} K_{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} dx dy \approx \tau (u_{i,j,m} - u_{i,j,m-1}) h_x h_y \left[ \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{1}{K_{\mu}} dz \right]^{-1}$

若积分  $\left[ \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{dz}{K_{\mu}} \right]^{-1}$  用梯形公式计算, 则  $\left[ \int_{z_{m-1}}^{z_m} \frac{dz}{K_{\mu}} \right]^{-1} \approx K_{\mu i,j,m} \cdot K_{\mu i,j,m-1}$

$\div [(K_{\mu i,j,m-1} + K_{\mu i,j,m}) h_z]$ , 记  $K_{\mu i,j,m-1/2} = K_{\mu i,j,m-1} K_{\mu i,j,m} h_x h_y \tau / [(K_{\mu i,j,m-1} + K_{\mu i,j,m}) h_z]$

则

$$\tau \iint_{S_5} K_{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} dx dy \approx K_{\mu i,j,m-1/2} (u_{i,j,m} - u_{i,j,m-1})$$

同理

$$\tau \iint_{S_6} K_{\mu} \frac{\partial u}{\partial z} dx dy \approx K_{\mu i,j,m+1/2} (u_{i,j,m+1} - u_{i,j,m})$$

此处  $K_{\mu i,j,m+1/2} = K_{\mu i,j,m} K_{\mu i,j,m+1} h_x h_y \tau / [(K_{\mu i,j,m} + K_{\mu i,j,m+1}) h_z]$

把上面两式代入方程(3.6)中, (3.6)式中的其余积分用中矩形公式计算, 并且把  $\frac{\partial S}{\partial t}$  和

$\frac{\partial P_n}{\partial t}$  用差商代替, 经计算整理可以得到(3.3)式的离散化公式

$$K_{\mu i,j,m-1/2} u_{i,j,m-1} - (K_{\mu i,j,m-1/2} + K_{\mu i,j,m+1/2} + E_{i,j,m}) u_{i,j,m} + K_{\mu i,j,m+1/2} u_{i,j,m+1} = d_{i,j,m}^{(1)} \quad (3.7)$$

这里  $E_{i,j,m} = \bar{E}_{i,j,m} h_x h_y h_z$ ,

$$d_{i,j,m}^{(1)} = E_{i,j,m} (P_{n i,j,m}^{n+1} - P_{n i,j,m}^n) - F_{i,j,m} (S_{i,j,m}^{n+1} - S_{i,j,m}^n) - E_{i,j,m} P_n^n,$$

$$F_{i,j,m} = \bar{F}_{i,j,m} h_x h_y h_z \quad (m=1, 2, \dots, N_z; \quad i=1, 2, \dots, N_x; \quad j=1, 2, \dots, N_y).$$

方程(3.4)和(3.5)的离散化过程与方程(3.3)完全类似, 经过计算, 方程(3.4)的离散化格式为

$$K_{\mu i,j,-1/2,m} v_{i,j-1,m} - (K_{\mu i,j,-1/2,m} + K_{\mu i,j+1/2,m} + E_{i,j,m}) v_{i,j,m} + K_{\mu i,j+1/2,m} v_{i,j+1,m} = d_{i,j,m}^{(2)} \quad (j=1, 2, \dots, N_y; \quad i=1, 2, \dots, N_x; \quad m=1, 2, \dots, N_z) \quad (3.8)$$

方程(3.5)的离散化格式为

$$\begin{aligned}
& K_{\mu \ i-1/2, j, m} P_{i-1, j, m}^{n+1} - (K_{\mu \ i-1/2, j, m} + K_{\mu \ i+1/2, j, m} + E_{i, j, m}) P_{i, j, m}^{n+1} \\
& + K_{\mu \ i+1/2, j, m} P_{i+1, j, m}^{n+1} = d_{i, j, m}^{(3)}, \\
& (i=1, 2, \dots, N_x, \quad j=1, 2, \dots, N_y, \quad m=1, 2, \dots, N_z) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

方程(3.8)中  $d_{i, j, m}^{(2)} = E_{i, j, m} u_{i, j, m}$ , 方程(3.9)中  $d_{i, j, m}^{(3)} = E_{i, j, m} v_{i, j, m}$ .

在已知 $n$ 时刻的超压 $P^n$ 求 $n+1$ 时刻的超压 $P^{n+1}$ 时, 可先由(3.7)式求出 $u$ , 再由(3.8)式求出 $v$ , 最后由(3.9)式求出 $P^{n+1}$ , 在求解(3.7)~(3.9)时, 它们都是三对角方程组, 用追赶法求解.

## 2. 热流方程的离散化

热流方程(2.6)的离散化与超压方程相似, 只要注意到(2.6)式中的Darcy速度 $v$ 用下面公式计算即可

$$\begin{aligned}
v_x^n_{i+1/2, j, m} &= -K_{\mu \ i+1/2, j, m} (P_{i+1, j, m}^n - P_{i, j, m}^n) / (h_y h_z) \\
v_y^n_{i, j+1/2, m} &= -K_{\mu \ i, j+1/2, m} (P_{i, j+1, m}^n - P_{i, j, m}^n) / (h_x h_z) \\
v_z^n_{i, j, m+1/2} &= -K_{\mu \ i, j, m+1/2} (P_{i, j, m+1}^n - P_{i, j, m}^n - \rho_a g h_z) / (h_x h_y)
\end{aligned}$$

经过与超压方程类似的推导, 可得到热流方程(2.6)的离散化格式为

$$\begin{aligned}
& (K_s \ i, j, m-1/2 + C_{i, j, m-1/2}) T_{i, j, m-1}^{n+1/3} - (K_s \ i, j, m-1/2 + K_s \ i, j, m+1/2) \\
& - C_{i, j, m-1/2} + C_{i, j, m+1/2}) T_{i, j, m}^{n+1/3} + (K_s \ i, j, m+1/2 - C_{i, j, m+1/2}) T_{i, j, m+1}^{n+1/3} = g_{i, j, m}^{(1)}, \\
& (m=1, 2, \dots, N_z, \quad i=1, 2, \dots, N_x, \quad j=1, 2, \dots, N_y) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (K_s \ i, j-1/2, m + C_{i, j-1/2, m}) T_{i, j-1, m}^{n+2/3} - (K_s \ i, j-1/2, m + K_s \ i, j+1/2, m) \\
& - C_{i, j-1/2, m} + C_{i, j+1/2, m}) T_{i, j, m}^{n+2/3} + (K_s \ i, j+1/2, m - C_{i, j+1/2, m}) T_{i, j+1, m}^{n+2/3} = g_{i, j, m}^{(2)}, \\
& (j=1, 2, \dots, N_y, \quad i=1, 2, \dots, N_x, \quad m=1, 2, \dots, N_z) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (K_s \ i-1/2, j, m + C_{i-1/2, j, m}) T_{i-1, j, m}^{n+1} - (K_s \ i-1/2, j, m + K_s \ i+1/2, j, m) \\
& - C_{i-1/2, j, m} + C_{i+1/2, j, m}) T_{i, j, m}^{n+1} + (K_s \ i+1/2, j, m - C_{i+1/2, j, m}) T_{i+1, j, m}^{n+1} = g_{i, j, m}^{(3)}, \\
& (i=1, 2, \dots, N_x, \quad j=1, 2, \dots, N_y, \quad m=1, 2, \dots, N_z) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

以上三式的系数由下面的公式计算,

$$\begin{aligned}
K_s \ i-1/2, j, m &= 2K_s \ i-1, j, m K_s \ i, j, m h_y h_z \tau / [(K_s \ i-1, j, m + K_s \ i, j, m) h_x], \\
K_s \ i, j-1/2, m &= 2K_s \ i, j-1, m K_s \ i, j, m h_x h_z \tau / [(K_s \ i, j-1, m + K_s \ i, j, m) h_y], \\
K_s \ i, j, m-1/2 &= 2K_s \ i, j, m-1 K_s \ i, j, m h_x h_y \tau / [(K_s \ i, j, m-1 + K_s \ i, j, m) h_z], \\
C_{i+1/2, j, m} &= (C_w \rho_w)_{i, j, m} v_x^{n+1/2}_{i+1/2, j, m} h_y h_z / 2, \quad C_{i, j+1/2, m} = (C_w \rho_w)_{i, j, m} v_y^{n+1/2}_{i, j+1/2, m} h_x h_z / 2, \\
C_{i, j, m+1/2} &= (C_w \rho_w)_{i, j, m} v_z^{n+1/2}_{i, j, m+1/2} + h_x h_y / 2, \quad g_{i, j, m}^{(1)} = -(C_s \rho_s)_{i, j, m} h_x h_y h_z T_{i, j, m}^n, \\
g_{i, j, m}^{(2)} &= -(C_s \rho_s)_{i, j, m} h_x h_y h_z T_{i, j, m}^{n+1/3}, \quad g_{i, j, m}^{(3)} = -(C_s \rho_s)_{i, j, m} h_x h_y h_z T_{i, j, m}^{n+2/3}.
\end{aligned}$$

应该注意, 对于方程(3.10)来说, 其盆地底上节点的方程右端应加上热源项 $Q h_x h_y \tau$ .

在已知 $n$ 时刻的古温度 $T^n$ 求 $n+1$ 时刻的古温度 $T^{n+1}$ 时, 可以先由(3.10)解出 $T^{n+1/3}$ , 再由(3.11)解出 $T^{n+2/3}$ , 最后由(3.12)求出 $T^{n+1}$ , 方程组(3.10)~(3.12)都是三对角方程, 用追赶法求解.

至于孔隙度方程(2.7), 当求得 $n+1$ 时刻的超压 $P^{n+1}$ 后, 可以直解积分求得.

### 四、模型问题的稳定性分析

对于超压方程(2.5), 考虑下面的模型问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (4.1)$$

其差分格式为

$$\frac{u_{j,k,m}^{n+1/3} - u_{j,k,m}^n}{\tau} = \frac{1}{h_x^2} \delta_z (a \delta_z u^{n+1/3})_{j,k,m} \quad (4.2)$$

$$\frac{u_{j,k,m}^{n+2/3} - u_{j,k,m}^{n+1/3}}{\tau} = \frac{1}{h_x^2} \delta_x (a \delta_x u^{n+1/3})_{j,k,m} \quad (4.3)$$

$$\frac{u_{j,k,m}^{n+1} - u_{j,k,m}^{n+2/3}}{\tau} = \frac{1}{h_y^2} \delta_y (a \delta_y u^{n+1})_{j,k,m} \quad (4.4)$$

这里  $\delta_x(u^n)_{j,k,m} = u_{j+1,k,m}^n - u_{j,k,m}^n$ ,  $\delta_x(u^n)_{j,k,m} = u_{j,k,m}^n - u_{j-1,k,m}^n$ .

古温度方程(2.6)简化为下述模型问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( a \frac{\partial u}{\partial z} \right) - b \nabla \cdot (cu) \quad (4.5)$$

式中  $c = (c_x, c_y, c_z)$ ,  $c_x > 0$ ,  $c_x, c_y, c_z \in W^{1,\infty}$ , 方程(4.5)的差分格式为

$$\frac{u_{j,k,m}^{n+1/3} - u_{j,k,m}^n}{\tau} = \frac{1}{h_x^2} \delta_z (a \delta_z u^{n+1/3})_{j,k,m} - \frac{b_{j,k,m}}{h_x} \delta_z (c_x u^{n+1/3})_{j,k,m} \quad (4.6)$$

$$\frac{u_{j,k,m}^{n+2/3} - u_{j,k,m}^{n+1/3}}{\tau} = \frac{1}{h_x^2} \delta_x (a \delta_x u^{n+2/3})_{j,k,m} - \frac{b_{j,k,m}}{h_x} \delta_x (c_x u^{n+1/3})_{j,k,m} \quad (4.7)$$

$$\frac{u_{j,k,m}^{n+1} - u_{j,k,m}^{n+2/3}}{\tau} = \frac{1}{h_y^2} \delta_y (a \delta_y u^{n+1})_{j,k,m} - \frac{b_{j,k,m}}{h_y} \delta_y (c_y u^{n+1})_{j,k,m} \quad (4.8)$$

式中  $\delta_z(c_x u^n)_{j,k,m} = c_{x,j+1/2,k,m} \frac{u_{j+1,k,m}^n + u_{j,k,m}^n}{2} - c_{x,j-1/2,k,m} \frac{u_{j,k,m}^n + u_{j-1,k,m}^n}{2}$

先讨论格式(4.2)~(4.4)的稳定性, 设  $u^n(x,y,z) = v^n \exp[i\sigma \cdot M]$ , 其中  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (2\pi l_1, 2\pi l_2, 2\pi l_3)$ ,  $l_1, l_2, l_3$  为整数,  $M = (x,y,z)$ ,  $i = \sqrt{-1}$  为虚部单位, 将格式  $u^n(x,y,z)$  代入格式(4.2)~(4.4), 经过仔细推导并消去  $v^{n+1/3}$  和  $v^{n+2/3}$ , 最后可得

$$v^{n+1} = G_1(\sigma, \tau) v^n$$

其中  $G_1(\sigma, \tau)$  称为增长因子, 并且有

$$G_1(\sigma, \tau) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}$$

$$g_1 = 1 + 2r_1 (a_{j+1/2,k,m} + a_{j-1/2,k,m}) \sin^2 \frac{\sigma_1 h_x}{2} - ir_1 (a_{j+1/2,k,m} - a_{j-1/2,k,m}) \sin \sigma_1 h_x$$

$$g_2 = 1 + 2r_2 (a_{j,k+1/2,m} + a_{j,k-1/2,m}) \sin^2 \frac{\sigma_2 h_y}{2} - ir_2 (a_{j,k+1/2,m} - a_{j,k-1/2,m}) \sin \sigma_2 h_y$$

$$g_3 = 1 + 2r_3(a_{j,k,m+1/2} - a_{j,k,m-1/2}) \sin^2 \frac{\sigma_3 h_x}{2} - ir_3(a_{j,k,m+1/2} - a_{j,k,m-1/2}) \sin \sigma_3 h_x$$

这里  $r_1 = \frac{\tau}{h_x^2}$ ,  $r_2 = \frac{\tau}{h_y^2}$ ,  $r_3 = \frac{\tau}{h_z^2}$ ,

容易验证, 格式(4.2)~(4.4)的截断误差是

$$O(\tau + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2),$$

且有估计式

$$|G_1(\sigma, \tau)| \leq 1 \quad (\forall \sigma, \tau, h)$$

对于格式(4.6)~(4.8)可以做类似的分析, 截断误差为  $O(\tau + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$ , 增长因子

$$G_2(\sigma, \tau) = \frac{1}{g_1^* g_2^* g_3^*}$$

式中

$$g_1^* = 1 + 2r_1(a_{j+1/2,k,m} + a_{j-1/2,k,m}) \sin^2 \frac{\sigma_1 h_x}{2} + r_1 h_x b_{j,k,m}(c_{x,j+1/2,k,m}$$

$$- c_{x,j-1/2,k,m}) \cos^2 \frac{\sigma_1 h_x}{2} + ir_1[(a_{j-1/2,k,m} - a_{j+1/2,k,m}) \sin \sigma_1 h_x$$

$$+ \frac{1}{2} h_x b_{j,k,m}(c_{x,j+1/2,k,m} - c_{x,j-1/2,k,m}) \sin \sigma_1 h_x]$$

$$g_2^* = 1 + 2r_2(a_{j,k,m+1/2} + a_{j,k,m-1/2}) \sin^2 \frac{\sigma_2 h_y}{2} + r_2 h_y b_{j,k,m}(c_{y,j,k+1/2,m}$$

$$- c_{y,j,k-1/2,m}) \cos^2 \frac{\sigma_2 h_y}{2} + ir_2[(a_{j,k,m-1/2} - a_{j,k,m+1/2}) \sin \sigma_2 h_y$$

$$+ \frac{1}{2} h_y b_{j,k,m}(c_{y,j,k+1/2,m} + c_{y,j,k-1/2,m}) \sin \sigma_2 h_y]$$

$$g_3^* = 1 + 2r_3(a_{j,k,m+1/2} + a_{j,k,m-1/2}) \sin^2 \frac{\sigma_3 h_x}{2} + r_3 h_x b_{j,k,m}(c_{x,j,k,m+1/2}$$

$$- c_{x,j,k,m-1/2}) \cos^2 \frac{\sigma_3 h_x}{2} + ir_3[(a_{j,k,m-1/2} - a_{j,k,m+1/2}) \sin^2 \frac{\sigma_3 h_x}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} h_x b_{j,k,m}(c_{x,j,k,m+1/2} + c_{x,j,k,m}) \sin \sigma_3 h_x]$$

并且有

$$|G_2(\sigma, \tau)| \leq 1 + c\tau \quad (\forall \sigma, \tau, h)$$

综合以上分析, 差分格式(4.2)~(4.4)和(4.6)~(4.8)是相容的和绝对稳定的<sup>[5]</sup>.

## 五、数值实例

我对胜利石油管理局提供的实例进行了数值计算, 被模拟的盆地如图2所示, 平面上共有15×6个计算点, 15个不同的地层自下而上编号, 计算是在大步长的情况下进行的, 我们取 $x, y$ 方向的步长为1.5公里,  $z$ 方向的步长为20米, 时间步长为50万年. 数值结果表明,

计算得到的超压和古温度有很强的物理特性，地层的模拟厚度和实际地质资料也拟合的很好。表1~3分别给出了第2、6、10层各计算点上模拟厚度的相对误差，负号表示模拟厚度小于实际地层厚度。

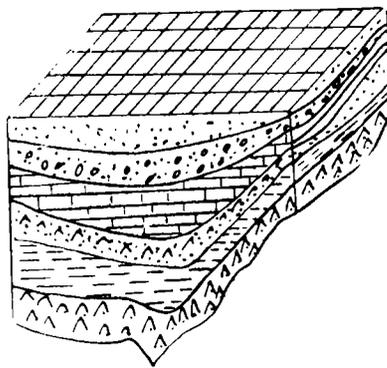


图2. 模拟盆地示意图

表 1 第2层模拟厚度的对相误差

i \ j									
		1	2	3	4	5	6	7	8
j	1	-0.03	-0.04	-0.04	-0.06	-0.05	-0.05	-0.05	-0.06
	2	-0.05	-0.04	-0.06	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04
	3	-0.04	-0.05	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	-0.05
	4	-0.05	-0.04	-0.06	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04
	5	-0.04	-0.05	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	-0.05
	6	-0.05	-0.04	-0.05	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04
i \ j									
		9	10	11	12	13	14	15	
j	1	-0.05	-0.04	-0.05	0.00	0.01	-0.03	-0.01	
	2	-0.05	-0.04	-0.05	0.00	0.01	-0.03	0.03	
	3	-0.05	-0.04	-0.05	0.00	0.01	-0.03	-0.01	
	4	-0.05	-0.04	-0.07	0.00	0.01	-0.03	0.02	
	5	-0.05	-0.04	-0.05	0.00	0.01	-0.03	-0.01	
	6	-0.05	-0.04	-0.07	0.00	0.01	-0.03	0.02	

表 2 第6层模拟厚度的相对误差

i \ j									
		1	2	3	4	5	6	7	8
j	1	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.05
	2	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.04	-0.03	-0.03	-0.05
	3	-0.01	-0.03	-0.03	-0.04	-0.03	-0.04	-0.03	-0.05
	4	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.04	-0.03	-0.03	-0.05
	5	-0.02	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03	-0.04	-0.03	-0.05
	6	-0.02	-0.02	-0.03	-0.03	-0.04	-0.03	-0.03	-0.05

$i \backslash j$								
		9	10	11	12	13	14	15
1		-0.05	-0.04	-0.02	-0.02	-0.02	0.00	0.01
2		-0.05	-0.04	-0.02	-0.02	-0.02	0.00	0.01
3		-0.05	-0.04	-0.02	-0.02	-0.02	0.01	0.01
4		-0.05	-0.04	-0.02	-0.02	-0.02	0.00	0.01
5		-0.05	-0.04	-0.02	-0.02	-0.02	0.01	0.01
6		-0.05	-0.04	-0.02	-0.02	-0.02	0.00	0.01

表 3 第10层模拟厚度的相对误差

$i \backslash j$									
		1	2	3	4	5	6	7	8
1		-0.05	-0.05	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05
2		-0.05	-0.05	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05
3		-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05
4		-0.05	-0.05	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05
5		-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05
6		-0.05	-0.05	-0.04	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05

$i \backslash j$								
		9	10	11	12	13	14	15
1		-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	-0.04
2		-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	-0.04
3		-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	-0.04
4		-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	-0.04
5		-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	-0.04
6		-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.04	-0.04

表中*i, j*分别表示各计算点*x, y*方向的下标。

如果记盆地开始沉积时的地质时间为零，那么图3~5分别给出了地质时间为3300万年时，点(4,2)，(8,2)和(14,2)处的古温度-深度曲线。图6~8给出了盆地的1~4层在剖面*j*=2上不同地质时期的古温度分布，它完全符合问题的物理特征和要求。数值结果还得到了孔隙度 $\phi$ 、渗透率 $\kappa$ ，流体粘度 $\mu$ 等重要地质参数在时空概念下的动态变化过程。

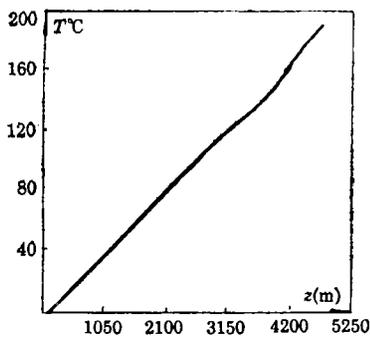


图3 点(4,2)温度-深度曲线

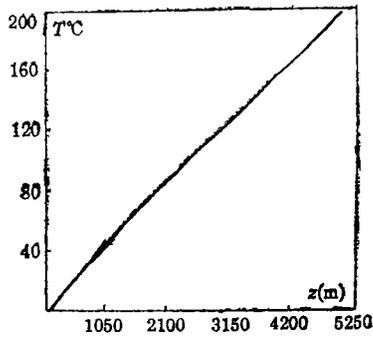


图4 点(8,2)温度-深度曲线

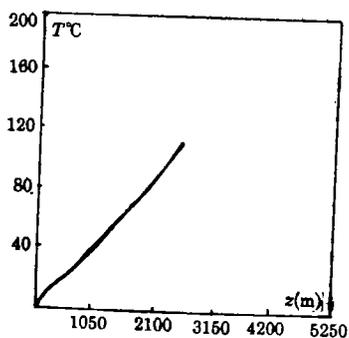


图5 点(14,2)温度-深度曲线

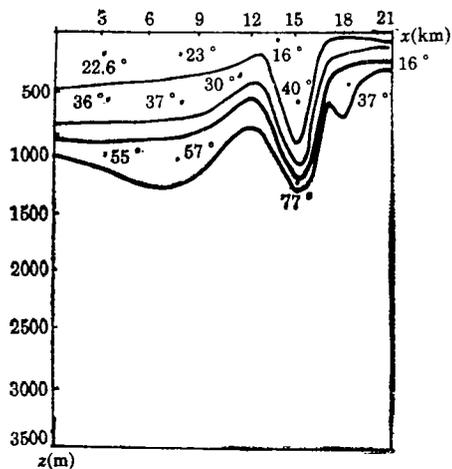


图6 1~4层沉积400万年后温度分布

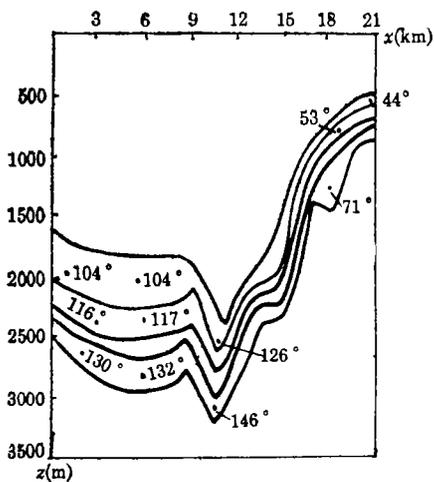


图7 1~4层沉积1100万年后温度分布

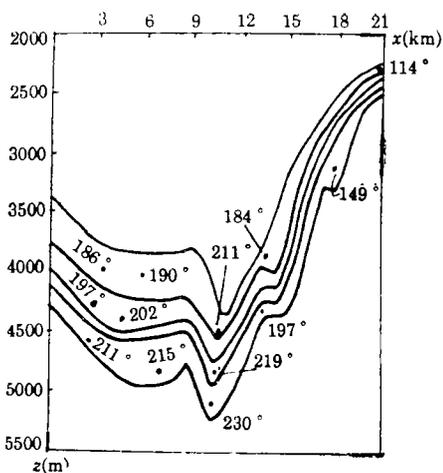


图8 1~4层沉积4100万年后温度分布

参 考 文 献

- [ 1 ] 李泰明编著, 石油地质过程定量研究概论, 石油大学出版社, 东营市(1989)。
- [ 2 ] Welte, D. H. and M. A. Yukler, *AAPG Bull*, 65(1983), 1387—1396.
- [ 3 ] Yukler, M. A., C. Cornford and D. H. Welte, *Geol. Rundschau*, 67(1978), 960—979.
- [ 4 ] 韩玉笈、王捷、毛景标, 盆地模拟方法及其应用, 《油气资源评价方法研究与应用》, 石油工业出版社, 北京(1988)。
- [ 5 ] Richtmyer, R. D. and K. W. Morton, *Difference Methods for Initial Value Problems*, New York(1967)。

## Numerical Simulation for Evolutionary History of Three-Dimensional Basin

Yuan Yi-rang    Wang Wen-qia    Yang Dan-ping

*(Department of Mathematics, Shandong University, Ji'nan)*

Han Yu-ji    Yang Cheng-shun

*(Computer Centre of Shenli Petroleum Administration, Dongying)*

### Abstract

Numerical simulation for evolutionary history of an oil- and gas-bearing basin is to repeat geological and thermodynamic history of basin evolution on a computer and then to quantitate petroleum generation, accumulation and migration. The mathematical model describing geological and thermodynamic history of the basin evolution is characterised by an initial-boundary value problem of a system of nonlinear partial differential equations. In the present paper, a numerical method for three-dimensional problem and the analysis of its stability are established and a numerical result for a practical model is given, which shows that the abnormal pressure and paleo-temperature computed are reasonable and display physical characteristics clearly as well.

**Key words** oil- and gas-bearing basin, basin evolution, mathematical model, numerical simulation