

非均匀变截面梁动力响应的一般解*

纪振义 叶开沅

(安徽建筑工业学院) (兰州大学)

(1992年5月21日收到)

摘 要

本文利用精确解析法^[1]给出非均匀变截面梁在任意谐振荷载和边界条件下的动力响应的一般解。问题最后归结为求解一个非正定微分方程。对于这一问题用一般变分法求解失败,利用本文的方法,这个问题的一般解可以写成解析的形式,因此对优化特别方便。本文给出收敛性证明。文末给出的算例表明本文的方法可获得满意的结果。

关键词 变截面梁 动力响应 精确解析法 稳态谐振动

一、引 言

非均匀变截面梁的强度、稳定和动力学问题无论在理论上还是实际上都是极为重要的。在[2]和[3]中分别用矩阵迁移法求解了非均匀变截面梁和连续梁的稳定和自由振动问题, [4]用同样的方法处理了非均匀弹性基础梁的稳定和自由振动问题。但它们最后结果均为数值解,无法写出统一的解析表达式。文[5]求解非均匀变截面梁的稳定和自由振动问题,问题最后归结为求解一个解析表达的超越代数方程。

本文采用文[1]的理论,给出非均匀变截面梁在任意谐振荷载和边界条件下的动力响应的一般解。问题最后可归结为求解一个非正定变系数微分方程。用变分法求解微分方程,需要方程是正定的,因此这一问题用常规方法难以求解。本文在文[1]的基础上,给出了这一问题的解析表达式,因而在优化问题中显示出它的巨大优点,并具有计算简单、方便和速度快等特点。在文中还给出所求得解一致收敛于精确解的证明。文末给出算例,表明了本文理论的正确性。

应当指出,本文的方法可毫无困难地推广到刚架等结构动力学计算中去。

二、非均匀变截面梁动力响应的一般解

考虑图1所示承受谐振荷载的非均匀变截面梁,所有外力 q, M, P 均随时间按同一简谐规律变化,荷载的圆频率为 ω 。不考虑阻尼的影响,它的动力响应方程为

* 国家自然科学基金资助课题。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (2.1)$$

式中 $D(x)$ 是抗弯刚度等于 EI , E 是弹性模量, I 是梁的横截面对中性轴的惯性矩, m 是梁的单位长度的容重, w 是挠度。

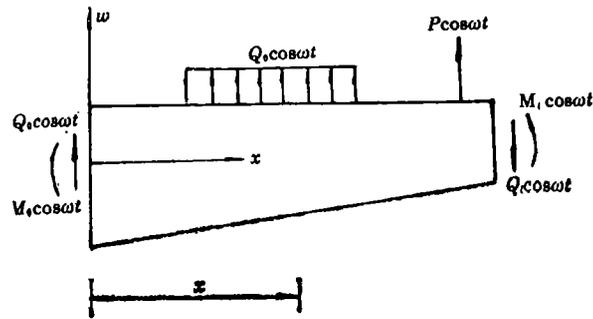


图 1 受谐波荷载的非均匀变截面梁

在工程实际中,常常遇到梁承受谐波荷载的情况。这时一般总是将结构设计得避开共振区。当避开共振区时,阻尼对结构振动的影响很小,可不考虑阻尼的影响。梁的稳态谐振动的位移和内力的幅值可直接得出,而不必将振型分解。这样的计算偏于安全,并使问题大大简化^[6]。在稳态谐振动时,所有荷载、变形、内力、支反力和惯性力均按同一简谐规律变化,即同时达到各自的最大值。利用

$$q(x,t) = q(x) \cos \omega t, \quad w(x,t) = w(x) \cos \omega t \quad (2.2)$$

代入(2.1),我们即可得到一个非正定变系数微分方程

$$\frac{d^2}{dx^2} D(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - m(x) \omega^2 w(x) = q(x) \quad (2.3)$$

如果外力,内力和坐标均以图1所示方向为正,位移向上为正,倾角以反时针为正,则振幅 $w(x)$, 倾角 $\varphi(x)$, 弯矩 $M(x)$ 和剪力 $Q(x)$ 之间存在以下微分关系

$$\begin{aligned} w(x) = w(x), \quad \varphi(x) &= -\frac{dw(x)}{dx} \\ M(x) &= D(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad Q(x) = \frac{d}{dx} D(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

对于任意的 $D(x)$ 和 $m(x)$, 求解(2.3)仍是一桩困难的事。注意(2.3)是一个非正定微分方程,利用变分法也是无法求解的,我们把(2.3)改写为

$$\frac{d^2}{dx^2} D(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + (xm(x)\omega^2 w(x))_{,x} - x(m(x)\omega^2 w(x))_{,x} = q(x) \quad (2.5)$$

利用文[1]的方法,把梁分成 N 个单元,设第 i 个单元区间为 $[x_{i-1}, x_i]$ 。在第 i 个单元上,(2.5)式可转化为

$$D_i \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (2.6)$$

式中 D_i 是 $D(x)$ 在单元中点的值。此外在单元之间尚需满足连续条件

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{w}(x_{i-1}-\varepsilon) &= \bar{w}(x_{i-1}), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\varphi}(x_{i-1}-\varepsilon) = \bar{\varphi}(x_{i-1}) = \frac{d\bar{w}}{dx} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{M}(x_{i-1}-\varepsilon) &= \bar{M}(x_{i-1}) = D_i \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{Q}(x_{i-1}-\varepsilon) &= \bar{Q}(x_{i-1}) = D_i \frac{d^3 \bar{w}}{dx^3} + (x - \bar{x}_i) m(x) \omega^2 \bar{w}(x)\end{aligned}\quad (2.7)$$

这里 \bar{x}_i 表示单元中点的坐标值, 等于 $(x_i + x_{i-1})/2$, ε 是一个任意的正数. 可以证明由 (2.6) 和 (2.7) 所得到的 $\bar{w}(x)$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{M}(x)$ 和 $\bar{Q}(x)$ 可一致收敛于 (2.3) 和 (2.4) 的精确解 $w(x)$, $\varphi(x)$, $M(x)$ 和 $Q(x)$. 并有二阶收敛精度. 问题的一般解可以写为^[1]

$$\begin{aligned}\{\delta(x)\} &= [F_i(x_i - x_{i-1})] \{\delta(0)\} + \{P_i(x)\} + \sum_{k=1}^{i-1} \{x - x_k\}^\circ [F_i(x - x_{i-1})] \{A_k\} \\ \{A_{i-1}\} &= ([F_{i-1}(x_{i-1} - x_{i-2})] - [I]) \{\delta(0)\} + \{P_{i-1}(x_{i-1})\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-2} (F_i(x_{k-1} - x_{k-2}) - [I]) \{A_k\}\end{aligned}\quad (2.8)$$

这里矢量

$$\{\delta(x)\} = \{\bar{w}(x) \quad \bar{\varphi}(x) \quad \bar{M}(x) \quad \bar{Q}(x)\}^T \quad (2.9)$$

记号

$$\{x - x_k\}^\circ = \begin{cases} 0 & (x < x_k) \\ 1 & (x \geq x_k) \end{cases}$$

为 Heaviside 函数, $[F_i(x)]$ 是一个 4×4 的矩阵, $\{P_i(x)\}$ 是一个 4×1 的向量. 它们分别是 (2.6) 的基本解和特解, 并满足

$$[F_i(0) = [I], \quad \{P_i(x_{i-1})\} = 0 \quad (2.10)$$

利用 (2.6), (2.7), (2.9) 和 (2.10), 我们可以得到

$$[F_i(x - x_{i-1})] = \begin{bmatrix} 1 - \xi(x_{i-1}) \frac{(x - x_{i-1})^3}{6D_i} & x - x_{i-1} \\ -\frac{\xi(x_{i-1})}{2D_i} (x - x_{i-1})^2 & 1 \\ -\xi(x_{i-1}) (x - x_{i-1}) & 0 \\ \xi(x) \left[1 - \frac{\xi(x_{i-1})}{6D_i} (x - x_{i-1})^3 \right] - \xi(x_{i-1}) & \xi(x) (x - x_{i-1}) \\ \frac{(x - x_{i-1})^2}{2D_i} & \frac{(x - x_{i-1})^3}{6D_i} \\ \frac{x - x_{i-1}}{D_i} & \frac{(x - x_{i-1})^2}{2D_i} \\ 1 & x - x_{i-1} \\ \xi(x) \frac{(x - x_{i-1})^2}{2D_i} & 1 + \xi(x) \frac{(x - x_{i-1})^3}{6D_i} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

$$\{P_i(x)\} = \int_{x_{i-1}}^x \begin{pmatrix} \frac{(x-\rho)^3}{6D_i} q(\rho) d\rho \\ \frac{(x-\rho)^2}{2D_i} q(\rho) d\rho \\ (x-\rho) q(\rho) d\rho \\ \left(1 + \xi(x) \frac{(x-\rho)^3}{6D_i}\right) q(\rho) d\rho \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

式中

$$\xi(x) = (x - \bar{x}_i) m(x) \omega^2$$

如果有集中力 P 和集中力偶 M 分别作用在第 i 个单元的 x_p 和 x_m 处。注意它们与横向分布载荷

$$q_p(x) = P\delta(x - x_p), \quad q_m(x) = -M\delta'(x - x_m)$$

等价。代入(2.12)直接积分可得对应的特解

$$\begin{aligned} \{P_i(x)\}_p &= P \{x - x_p\} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{6D_i} (x - x_p)^3 \\ \frac{1}{2D_i} (x - x_p)^2 \\ x - x_p \\ 1 + \frac{\xi(x)}{6D_i} (x - x_p)^3 \end{pmatrix} \\ \{P_i(x)\}_m &= -M \{x - x_m\} \circ \begin{pmatrix} \frac{1}{2D_i} (x - x_p)^2 \\ \frac{1}{D_i} (x - x_p) \\ 1 \\ -\frac{\xi(x)}{2D_i} (x - x_p)^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

代入(2.8)式。即可得到带有任意集中力和集中力偶作用的非均匀变截面梁动力响应的一般解。

把终端坐标 $x = x_N$ 代入(2.8)式。整理后即可得

$$\{\delta(x_N)\} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \{\delta(0)\} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

这里 k_{ij} 和 f_i 均为已知量。我们按 $\{\delta(x)\}$ 中元素的次序编上号。例如，当 w 和 M 在边界上已知时，则已知条件编号为(1,3)。未知边界条件编号为(2,4)。若在 $x=0$ 处，已知边界条件编号为 (m_1, m_2) ，未知边界条件编号为 (m_3, m_4) ，在 $x=x_N$ 处已知边界条件编号为 (n_1, n_2) ，则对问题最后可归结为求解二元一次代数方程组

$$\begin{bmatrix} k_{n_1 m_3} & k_{n_1 m_4} \\ k_{n_2 m_3} & k_{n_2 m_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{m_3}(0) \\ \delta_{m_4}(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{n_1}(x_N) \\ \delta_{n_2}(x_N) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_{n_1} \\ f_{n_2} \end{Bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} k_{n_1 m_1} & k_{n_1 m_2} \\ k_{n_2 m_1} & k_{n_2 m_2} \end{bmatrix} \begin{cases} \delta_{m_1}(0) \\ \delta_{m_2}(0) \end{cases} \quad (2.15)$$

式中记号 $\delta_m(0)$ 表示 $\{\delta(0)\}$ 中的第 m 个元素。求出 $\{\delta(0)\}$ 后，再利用 (2.8) 式即可求出变截面梁任一点的位移和内力幅度。

应当指出，令 $\omega=0$ ，(2.8) 式即可计算非均匀变截面梁的强度问题。

三、收敛性证明

我们把 (2.6) 式改写为

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D_i \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + (\bar{x}_i m(x) \omega^2 w(x))_{,x} - \bar{x}_i (m(x) \omega^2 w(x))_{,x} = q(x) \quad (3.1)$$

同时把 (2.5) 和 (3.1) 写成算子形式

$$Aw = q(x), \quad \bar{A}_i \bar{w} = q(x) \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (3.2)$$

上面两式相减，可得恒等式

$$Aw - \bar{A}_i \bar{w} = 0$$

对上式作内积得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\phi, Aw - \bar{A}_i \bar{w}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\phi, \sum_{i=1}^N (A_i w - \bar{A}_i \bar{w}) \right) = 0 \quad (3.3)$$

这里 $\phi \in W_2^{(2)}$ ， $W_2^{(2)}$ 是索伯列夫空间。利用分部积分，当 $N \rightarrow \infty$ 时我们有

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\phi, Aw - \bar{A}_i \bar{w}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (A^* \phi, w - \bar{w}) \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left\{ \phi(Q_r - \bar{Q}_r) - \frac{d\phi}{dx} (M - \bar{M}) + M^*(\varphi - \bar{\varphi}) - Q^*(w - \bar{w}) \right\} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \end{aligned} \quad (3.4)$$

这里 A^* 是 A 的共轭算子， M^* 和 Q^* 是共轭边界条件，并假定在 $[0, x_N]$ 上连续。利用单元交接处的连续条件 (2.7) 及四个已知边界条件，同时令 4 个未知边界条件对应的共轭边界条件为零，则可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (A^* \phi, w - \bar{w}) = 0 \quad (3.5)$$

根据 Hilbert-伴随逆算子定理，当 A 在给定的边界条件下有逆算子 A^{-1} 存在时， A^* 在零共轭边界条件下也有逆，特别地当

$$A^* \phi = w - \bar{w}$$

时有唯一解 $\varphi \in W_2^{(2)}$ ，可使 M^* 和 Q^* 在区间 $[0, x_N]$ 连续，因此我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{x_N} (w - \bar{w})^2 dx = 0 \quad (3.6)$$

因 $w - \bar{w}$ ， $\varphi - \bar{\varphi}$ ， $M - \bar{M}$ 和 $Q - \bar{Q}$ 在 $[0, x_N]$ 上连续，因此有界。通过 (3.6) 式很容易证明 w ， φ ， \bar{M} 和 \bar{Q} 一致收敛于 (2.3) 的精确解 w ， φ ， M 和 Q 。

四、算 例

算例1 为便于和精确解比较,我们考虑一个均匀等直杆问题,如图1所示。梁的左边固支,右边简支。它的尺寸为:高 $a=1$,长 $L=10$,宽度 $b=1$,弹性模量 $E=120000$,截面惯性矩 $I=\frac{1}{12}$ 。表1给出当单元数 $N=100$, $k=\left(\frac{m\omega^2}{EI}\right)^{1/4}=0.5$ 时,所得到的挠度和弯矩值。并与精确解[6]相比较。表2给出当 $N=20$ 时,不同 k 值梁的始端和中间的位移及内力的幅值。表3给出, $k=0.5$ 时所得到的解随 N 收敛的情况。

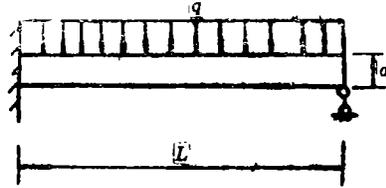


图2 受均布载荷等直截面杆

表1 当 $k=0.5$ 时,等直截面杆挠度和弯矩幅值分布($N=100$)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$EIw(x)$	本文解	0	2.479	9.024	17.72	26.21	32.21	34.06	30.99	23.39	12.49	0
	精确解	0	2.517	9.127	17.85	26.31	32.23	33.96	30.82	23.20	12.36	0
$M(x)$	本文解	5.249	4.136	2.186	-0.2125	-2.532	-4.251	-4.992	-4.630	-3.339	-1.574	0
	精确解	5.351	4.162	2.152	-0.2768	-2.590	-4.274	-4.965	-4.550	-3.249	-1.507	0

表2 等直截面杆随 k 不同时 w 和 M 的值($N=20$)

k	$M(0)$		$EIw(5)$		$M(5)$	
	本文解	精确解	本文解	精确解	本文解	精确解
0	-12.5	-12.5	-52.08	-52.08	6.25	6.25
0.1	-12.55	-12.55	-52.30	-52.30	6.277	6.278
0.5	5.068	5.351	32.82	32.23	-4.276	-4.275

表3 随 N 增大时, w 和 M 收敛情况

N	10	20	40	100	200	500	精确解
$M(0)$	5.373	5.068	5.139	5.249	5.298	5.329	5.351
$w(5)$	35.15	32.83	32.31	32.21	32.22	32.22	32.22
$M(5)$	-4.584	-4.276	-4.238	-4.251	-4.261	-4.268	-4.275

算例2 为一非均匀变截面悬臂梁,受均布载荷作用,如图3所示。图中 $l=10$, $a=2$, $b=1$,弹性模量 $E=120000$ 。截面惯性矩 $I=\frac{1}{12}$,宽度为1。梁单位长度的容重和角频率 ω^2 的乘积为

$$m\omega^2 = 12500 - 625x$$

取 $N=100$ 进行计算,表4给出位移和内力幅值沿 x 轴的分布情况.并和当角频率 $\omega=0$ 时的情况作了比较.

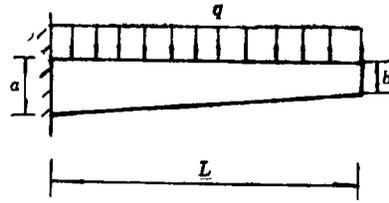


图3 一个变截面悬臂梁

表4 变截面悬臂梁位移和内力幅值分布情况($N=100$)

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$w \times 10^4$	$\omega \neq 0$	0	-0.2332	-0.6007	-0.6011	0.2406	2.322	5.901	11.03	17.50	24.89	32.64
	$\omega = 0$	0	3.071	-12.04	-26.49	-45.92	-69.74	-97.25	-127.7	-160.1	-193.76	-227.8
M	$\omega \neq 0$	-5.032	-0.9268	2.152	4.168	5.126	5.110	4.309	3.012	1.591	0.4558	0
	$\omega = 0$	-50	-40.5	-32	-24.5	-18	-12.50	-8	-4.5	-2	-0.5	0
Q	$\omega \neq 0$	4.608	3.598	2.552	1.481	-0.4487	-0.4492	-1.106	-1.426	-1.347	-0.8577	0
	$\omega = 0$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

以上两个算例表明,利用本文的方法获得的结果是满意的,并收敛于精确解,验证了本文理论的正确性.

参 考 文 献

- [1] 纪振义、叶开沅,任意变系数微分方程的精确解析法,应用数学和力学,10(10)(1989),841—852.
- [2] 叶开沅,非均匀变厚度弹性力学若干问题的一般解,非均匀变厚度梁的弯曲,稳定和自由振动,兰州大学学报(自然科学版),(力学专号),(1979),133—157.
- [3] 叶开沅、丁延岭,非均匀变厚度连续梁的稳定性和自由振动,兰州大学学报(自然科学版),18(2)(1982),42—47.
- [4] 叶开沅、郑书英,非均匀弹性地基上的非均匀变截面梁的稳定性,兰州大学学报(自然科学版),(力学专号),19(1983),37—57.
- [5] 叶开沅、纪振义,非均匀变截面梁的稳定和自由振动的阶梯折算法,兰州大学学报(自然科学版),26(2)(1990),40—46.
- [6] 王光远,《建筑结构的振动》,科学出版社,北京(1978),150—153.

The General Solution for Dynamic Response of Nonhomogeneous Beam with Variable Cross Section

Ji Zhen-yi

(*Anhui Architectural Industry College, Hefei*)

Yeh Kai-yuan

(*Lanzhou University, Lanzhou*)

Abstract

In this paper, by means of the exact analytic method^[1] the general solution for dynamic response of nonhomogeneous beam with variable cross section is obtained under arbitrary resonant load and boundary conditions. The problem is reduced to solve a non-positive differential equation. Generally, it is not solved by variational method. By the present method, the general solution for this problem may be written as an analytic form. Hence, it is convenient for structure optimizing problem. In this paper, its convergence is proved. Numerical examples are given at the end of the paper, which indicates satisfactory results can be obtained.

Key words variable cross section beam, dynamic response, exact analytic method, steady-state resonant vibration