

# 水中孤立气泡对声波的耗散作用\*

黄景泉 李福新

(西安 西北工业大学, 1993年6月7日收到)

## 摘 要

本文从气泡壁面线性运动方程出发, 对水中孤立气泡的声耗散机理进行了分析。结果表明: 气泡对声波具有明显的耗散作用; 耗散作用由声散射和声吸收两部份组成; 热传导在气泡对声波的耗散作用中起决定性作用; 气泡处于谐振时, 对声波具有最大的耗散作用。

**关键词** 气泡散射 气泡吸收 声耗散

目前, 关于水中孤立气泡在外声场作用下的振动理论, 已有许多学者进行了讨论<sup>[1],[2],[3]</sup>。Devin<sup>[2]</sup>, Prosperetti<sup>[3]</sup>对气泡振动阻尼的机理作了探讨。在Flynn<sup>[1]</sup>的气泡振动理论中, 考虑了热传导、水的粘滞性和声散射对气泡振动的影响, 对气泡振动作了较为精细的分析。但是, 有关气泡对声波耗散作用的论述却很少见到。本文基于Flynn的气泡振动理论, 分析了气泡对声波的散射作用和吸收作用。

## 一、气泡壁面运动方程

设水为不可压缩流体。所讨论气泡的周长 $2\pi R$ 远小于入射声波波长 $\lambda$ , 即 $2\pi R/\lambda = \omega R/c \ll 1$ 。其中,  $R$ 为气泡半径,  $c$ 为水中声速,  $\omega = 2\pi f$ 为入射波圆频率,  $f$ 为入射波频率。

在平面入射声波

$$p_A(t) = A \exp[i(\omega t + \omega R_0/c)]$$

作用下, 气泡壁面运动方程为<sup>[1],[3],[4]</sup>:

$$\rho R \ddot{R} + \frac{3}{2} \rho \dot{R}^2 + 4 \left( \frac{\mu_{th}}{R} + \frac{\mu}{R} \right) \dot{R} = p_0 + p_v - p_\infty(t) - \frac{2\sigma}{R} + \left( 1 - \frac{\dot{R}}{c} \right) \frac{R}{c} \cdot \frac{dp_L}{dt} \quad (1.1)$$

其中,  $p_A(t)$  为入射平面声压,  $A$  为入射波声压幅值,  $R_0$  为气泡平衡状态时的半径,  $\mu_{th}$  为水与泡内气体的热传导等效粘性系数,  $\mu$  为水的粘性系数,  $p_0 = p_0(R_0/R)^{3\eta}$  为泡内气体压力,  $p_0$  为气泡处于平衡状态时, 泡内的气体压力,  $\eta$  为气体多变指数,  $p_v$  为水的饱和蒸

\* 钱伟长推荐。

汽压力,  $p_{\infty}(t) = p_{L_0} + p_A(t)$  为无穷远处水的压力,  $p_{L_0}$  为无穷远处水的流动压力,  $\rho$  为水的密度,  $\sigma$  为水的表面张力,  $p_L$  为泡壁外侧水的压力,  $t$  为时间.

气泡处于平衡状态时有

$$p_0 + p_v = 2\sigma/R_0 + p_{L_0} \quad (1.2)$$

令  $R = R_0 + r$ , 其中  $r$  与  $R_0$  相比为高阶微量. 对式 (1.1) 进行线性化处理, 并考虑到式 (1.2), 得气泡壁面运动方程为

$$\begin{aligned} \rho R_0 \ddot{r} + 4(\mu_{th} + \mu)/R_0 \cdot \dot{r} + [3\eta(p_{L_0} + 2\sigma/R_0 - p_v) - 2\sigma/R_0] \cdot r/R_0 \\ = -p_A(t) + \frac{R_0}{c} \frac{dp_L}{dt} \end{aligned} \quad (1.3)$$

## 二、气泡对声波的散射

气泡对声波的散射作用, 可以认为是在入射波的激励下, 气泡作为次级声源辐射而引起的. 此时, 气泡壁面作径向脉动而辐射球面波. 设气泡的散射声压  $p_s$  为

$$p_s = \frac{B}{s} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega s}{c}\right)\right] \quad (2.1)$$

其中,  $B$  为单位距离处的散射声压幅值,  $s$  为由气泡中心计起的径向距离.

在泡壁外侧处, 水对泡壁的压力为

$$p_L = p_{\infty}(t) + p_{s0} = p_{\infty}(t) + \frac{B}{R_0} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega R_0}{c}\right)\right] \quad (2.2)$$

其中,  $p_{s0}$  为泡壁上的散射声压.

对不可压缩流体, 任意点处流体径向速度与压力之间存在关系:

$$dv(s)/dt = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (2.3)$$

其中,  $v(s)$  为  $s$  处水的径向速度,  $p$  为  $s$  处水的压力.

应用式 (2.2) 及式 (2.3), 并略去高阶微量, 有

$$\ddot{r} = \left. \frac{dv(s)}{dt} \right|_{s=R_0} = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{s=R_0} = \frac{B}{\rho R_0^2} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega R_0}{c}\right)\right] \quad (2.4)$$

设  $r = r_0 e^{i\omega t}$ ,  $r_0$  为  $r$  的幅值. 于是有  $\ddot{r} = -\omega^2 r = i\omega \dot{r}$ , 即

$$\dot{r} = \ddot{r}/i\omega, \quad r = \ddot{r}/-\omega^2 \quad (2.5)$$

将式 (2.2)、式 (2.4) 及式 (2.5) 代入式 (1.3), 并略去高阶微量, 即可得出散射波在单位距离处的声压幅值

$$B = \frac{AR_0}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1) + i\beta} \quad (2.6)$$

且

$$\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 = \frac{1}{R_0^2 \rho} \left[ 3\eta \left( p_{L_0} + \frac{2\sigma}{R_0} - p_v \right) - \frac{2\sigma}{R_0} \right] \quad (2.7)$$

$$\beta = \frac{\omega R_0}{c} + \frac{4\mu}{\rho R_0^2 \omega} + \frac{4\mu_{th}}{\rho R_0^2 \omega} = \beta_{rad} + \beta_{vis} + \beta_{th} \quad (2.8)$$

其中,  $\omega_0$ 为气泡谐振圆频率,  $f_0$ 为气泡谐振频率,  $\beta$ 为气泡耗散阻尼,  $\beta_{rad} = \omega R_0/c$ 为气泡散射阻尼;  $\beta_{vis} = 4\mu/\rho R_0^2 \omega$ 为气泡粘性阻尼;  $\beta_{th} = 4\mu_{th}/\rho R_0^2 \omega$ 为气泡热传导阻尼。

由式(2.7)可见, 气泡谐振频率 $f_0$ 取决于气泡及流场自身的特性而与入射声波无关。

图1给出, 水温20℃,  $p_{L_0}$ 分别等于1、5、10个大气压时,  $f_0$ 与 $R_0$ 的关系曲线。

由图1可见,  $f_0$ 随 $R_0$ 的增大而减小, 在相同的 $R_0$ 下, 谐振频率 $f_0$ 随 $p_{L_0}$ 的增大而增大。

由式(2.8)可见, 气泡耗散阻尼 $\beta$ 与气泡平衡半径 $R_0$ , 入射波频率 $\omega = 2\pi f$ , 水的粘性系数 $\mu$ 及热传导等效粘性系数 $\mu_{th}$ 等有关。其中 $\mu_{th}$ 与气泡的谐振频率 $f_0$ 有密切关系。

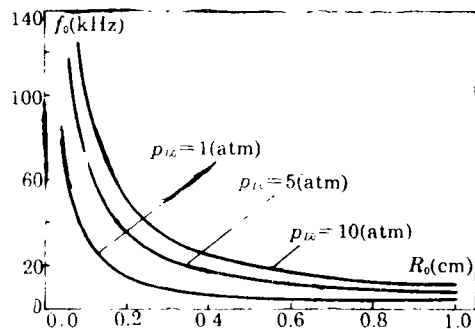


图 1

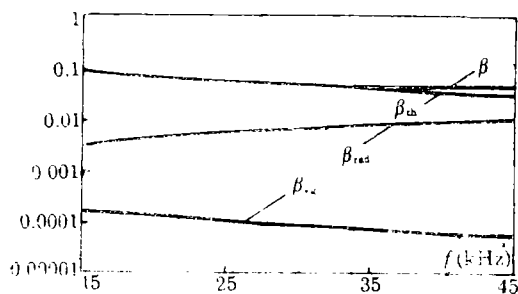


图 2

图2给出, 当 $R_0 = 0.5\text{mm}$ ,  $f_0 = 30\text{kHz}$ 时,  $\beta$ 及 $\beta_{rad}$ ,  $\beta_{vis}$ ,  $\beta_{th}$ 与 $f$ 之间的关系曲线<sup>[2]</sup>。

由图2可见,  $\beta$ 值随 $f$ 的增大而略有减小;  $\beta_{rad}$ ,  $\beta_{vis}$ ,  $\beta_{th}$ 三者相比,  $\beta_{th}$ 在耗散阻尼中所占份额最大, 起主导作用。

由式(2.6), 气泡散射功率 $W_s$ 为

$$W_s = 4\pi s^2 I_s = \frac{4\pi R_0^2 I_A}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + \beta^2} \quad (2.9)$$

其中,  $I_s = |B/s|^2/2\rho c$ 为气泡散射声强,  $I_A = |A|^2/2\rho c$ 为入射波声强。

定义气泡的散射截面 $\sigma_s$ 为

$$\sigma_s = 4\pi s^2 I_s / I_A \quad (2.10)$$

由式(2.9), 有

$$\sigma_s = \frac{W_s}{I_A} = \frac{4\pi R_0^2}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + \beta^2} \quad (2.11)$$

散射截面为单位入射波声强下的散射功率, 通常作为度量散射作用的一个特征参量。由式(2.11)可见,  $\sigma_s$ 与入射波声强无关, 而与入射波频率 $\omega$ (或 $f$ )有关。

当 $R_0 = 0.5\text{mm}$ ,  $f_0 = 30\text{kHz}$ 时,  $\sigma_s$ 随 $f$ 的变化曲线见图3。

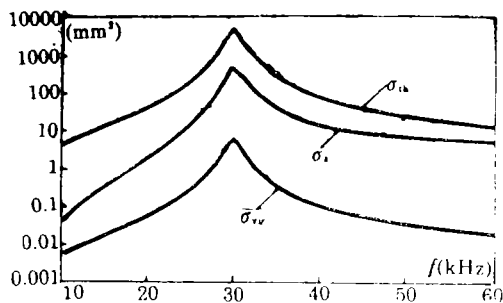


图 3

由图3可见, 当谐振时( $f = f_0 = 30\text{kHz}$ ),  $\sigma_s$ 取最大值,  $f$ 偏离 $f_0$ 的数值愈大,  $\sigma_s$ 值将愈小。

### 三、气泡对声波的吸收

气泡对声波的吸收作用是由水的粘滞性和热传导共同引起的。当泡壁振动时，由于水的粘性阻力作用，部份声能将转变为水分子的无规则热运动；在气泡变形过程中，泡内气体的温度将发生变化，泡内气体与水发生热传导作用，部份声能将转化为热能而耗散。

按照通常的功率概念，可以将水的粘性损耗功率 $W_{vis}$ 写为（参见式(1.3)）

$$W_{vis} = \text{Re} \left[ \frac{4\mu}{R_0} \dot{r} \right] \cdot \text{Re} \left[ \frac{dV}{dt} \right] \quad (3.1)$$

其中，一横表示取时间的平均值， $\text{Re}[\quad]$ 表示对方括号内的量取实部， $V$ 为气泡体积。

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = 4\pi (R_0 + r)^2 \dot{r} \doteq 4\pi R_0^2 \dot{r} \quad (3.2)$$

将式(2.4)及式(2.5)代入式(3.2)，得

$$\text{Re} \left[ \frac{dV}{dt} \right] = -\frac{2}{\rho f} (B^R \sin \omega t + B^I \cos \omega t) \quad (3.3)$$

其中， $B^R$ ， $B^I$ 分别为 $B$ 的实部和虚部。

又：

$$\frac{4\mu}{R_0} \dot{r} = \frac{4\mu}{\rho R_0^2 \omega} R_0 \omega \rho \dot{r} = \beta_{vis} R_0 \omega \rho \dot{r} = -i \beta_{vis} R_0 \rho \ddot{r} \quad (3.4)$$

将式(2.4)代入式(3.4)，有

$$\text{Re} \left[ \frac{4\mu}{R_0} \dot{r} \right] = \frac{\beta_{vis}}{R_0} (B^R \sin \omega t + B^I \cos \omega t) \quad (3.5)$$

将式(3.3)及式(3.5)代入式(3.1)，并注意到 $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$ ， $\overline{\sin^2 \omega t} = 1/2$ ， $\overline{2 \sin \omega t \cos \omega t} = 0$ ，则得

$$W_{vis} = \frac{4\pi R_0^3 I_A}{(\omega_0^2/\omega^2 - 1)^2 + \beta^2} \cdot \frac{\beta_{vis}}{\beta_{rad}} = W_s \frac{\beta_{vis}}{\beta_{rad}} \quad (3.6)$$

同样，可以得出热传导损耗功率为

$$W_{th} = \text{Re} \left[ \frac{4\mu_{th}}{R_0} \dot{r} \right] \cdot \text{Re} \left[ \frac{dV}{dt} \right] = W_s \frac{\beta_{th}}{\beta_{rad}} \quad (3.7)$$

对应地

粘性损耗截面

$$\sigma_{vis} = \frac{W_{vis}}{I_A} = \sigma_s \frac{\beta_{vis}}{\beta_{rad}} \quad (3.8)$$

热传导损耗截面

$$\sigma_{th} = \frac{W_{th}}{I_A} = \sigma_s \frac{\beta_{th}}{\beta_{rad}} \quad (3.9)$$

吸收功率 $W_a$ 和吸收截面 $\sigma_a$ 分别为

$$W_a = W_{vis} + W_{th} \quad (3.10)$$

$$\sigma_a = \sigma_{vis} + \sigma_{th} \quad (3.11)$$

当  $R_0 = 0.5\text{mm}$ ,  $f_0 = 30\text{kHz}$  时,  $\sigma_{vis} \sim f$  和  $\sigma_{th} \sim f$  曲线, 一并在图3中给出。

#### 四、气泡对声波的耗散

综上所述, 气泡对声波的耗散包括声散射和声吸收两个部份。耗散功率  $W_a$  和耗散截面  $\sigma_a$  分别为

$$W_a = W_s + W_a = W_s + W_{vis} + W_{th} = W_s \beta / \beta_{rad} \quad (4.1)$$

$$\sigma_a = W_a / I_A = \sigma_s + \sigma_a = \sigma_s + \sigma_{vis} + \sigma_{th} = \sigma_s \beta / \beta_{rad} \quad (4.2)$$

由图3可见,  $\sigma_{th}$  值远大于  $\sigma_s$  和  $\sigma_{vis}$  值, 表明热传导损耗在气泡对声波的耗散作用中占主导地位,  $\sigma_{vis}$  的数值相对很小, 必要时粘性损耗可以近似地予以略去;  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{vis}$ ,  $\sigma_{th}$  三者, 在谐振频率处均取最大值, 因而耗散截面  $\sigma_a$  在谐振频率处亦取最大值。

由式(2.11)及式(4.2), 可以求得谐振时气泡的耗散截面  $\sigma_{a0}$  为

$$\sigma_{a0} = 4\pi R_0^2 / \beta \cdot \beta_{rad} \quad (4.3)$$

图4给出, 当气泡处于谐振时 ( $f_0$  分别为5, 15和30kHz),  $R_0$  与  $\sigma_{a0}$  的关系曲线。

由图4可见, 当谐振时, 随着  $R_0$  的增大, 耗散截面也随之增大; 对于给定的  $R_0$  值,  $f_0$  愈小, 其  $\sigma_{a0}$  值将愈大。

由式(2.7)可知, 谐振频率  $\omega_0$  与无穷远处的流动压力  $p_{L0}$  有关, 从而  $\sigma_{a0}$  与  $p_{L0}$  有关。图5给出, 当水温  $20^\circ\text{C}$ ,  $R_0 = 0.5\text{mm}$  时,  $\sigma_{a0} \sim p_{L0}$  的关系曲线。

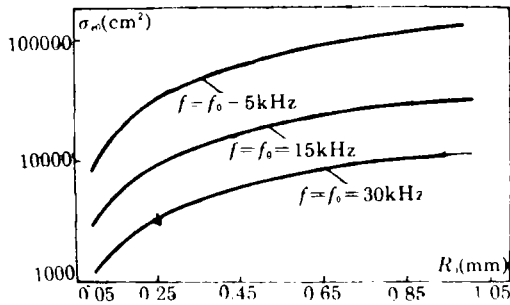


图 4

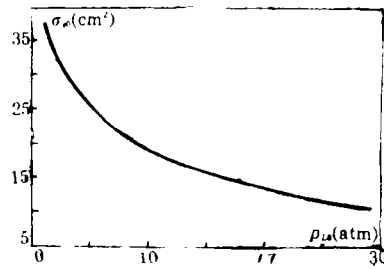


图 5

由图5可以看出, 增大  $p_{L0}$  时,  $\sigma_{a0}$  的值将随之减小。

#### 参 考 文 献

- [1] Flynn, H. G., Cavitation dynamics I: A mathematical formation, *J. Acoust. Soc. Am.*, 57(6) (1975), 1379.
- [2] Devin, Charles, Jr., Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water, *J. Acoust. Soc. Am.*, 31(12) (1957), 1654.
- [3] Prosperetti, Andrea, Thermal effects and damping mechanism in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquid, *J. Acoust. Soc. Am.*, 61(1) (1977), 17.
- [4] Gaitan, Dfelipe, Sonduminescence and bubble dynamics for a single, stable cavitation bubble, *J. Acoust. Soc. Am.*, 91(6) (1992), 3166.

## Dissipative Effects of an Isolated Bubble in Water on the Sound Wave

Huang Jing-quan    Li Fu-xin

*(Northwestern Polytechnic University, Xi'an)*

### Abstract

The dissipative mechanisms of an isolated bubble in water for sound wave are analysed on the basis of the linearized theory of oscillations of a gas bubble. It is shown that the dissipative effects are obvious and contain the scattering and absorption of sound by a bubble; the heat conduction is decisive in the dissipative effects of bubble, and the dissipative effects are maximum at resonance.

**Key words** scattering of bubble, absorption of bubble, dissipative on the sound wave