应用数学和力学，第15卷第6期(1994年6月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

耗散孤立波方程的吸引子*

田立新　徐振源　刘曾荣

(镇江 江苏理工大学数理系)(无锡轻工业学院)(苏州大学数学系)
(中国科学院力学研究所L.N.M.开放实验室)
(许政范推荐，1993年5月21日收到)

摘　　要

本文研究耗散孤立波方程的长期动力学行为：吸引子的存在性、吸引子的几何结构、耗散系统参数扰动下动力行为、吸引子的分形维估计.

关键词　吸引子　一致吸收集　分形维　耗散孤立波方程　凝聚及锥不变性质

一、引　　言

偏微分方程相应动力系统长期行为的研究是力学和数学物理中极有意义的工作．在过去的十年里，人们对耗散系统中吸引子做了许多工作．本文将研究耗散孤立波方程的吸引子，它的存在性、几何结构、参数扰动下的动力学行为、分形维估计．在本文第二节得到整体吸引子存在．在第三节证明谱间隙充分大时的凝聚及锥不变性质．在第四节研究半群$\{S_t(\lambda)\}$存在一致吸收集时吸引子的参数扰动，并给出所研究方程的吸引子的扰动结果．第五节在参数一定条件下来估计吸引子的分形维小于或等于4/3．

本文考虑的耗散孤立波方程如下：

$$u_t+vu_{xxxx}+\alpha uu_x+u_{xxx}+\beta u=f \tag{1.1}$$

其中，　$(x,\ t)\in[-L/2,\ L/2]\times R^+$，$v>0$，$\alpha>0$，$I=[-L/2,\ L/2]$

初值条件　$u(x,\ 0)=u_0$　(1.2)

边界条件　$u(\pm L/2,\ t)=u_x(\pm L/2,\ t)=0$　(1.3)

若$v=\beta=f=0$，(1.1)是KdV方程.本文，除了定理2.1，$f\equiv 0$．

设$H=L^2(I)$，范数$\|\cdot\|$．$A=\partial^4/\partial x^4$，$D(A)=H^4(I)\cap H_0^2(I)$．(1.1)～(1.3)的解存在且唯一，见[6]定理1.4，设(1.1)～(1.3)的解半群是$\{S_t\}_{t>0}$．

H中有界集B称为吸收集，若对任意有界集$B_0\subset H$，存在$t_B>0$，满足$S_tB\subset B$，$t\geqslant t_B$时，$X\subset H$称为半群$\{S_t\}_{t\geqslant 0}$的吸引子，若：(1)X是紧集，(2)$S_tX=X$，对任意$t\geqslant 0$．(3)对任意有界集$B_0\subset H$，满足$S_tB\to X$，$t\to\infty$时，即，$\mathrm{dist}(S_tB,\ X)\to 0(t\to\infty)$，其中$\mathrm{dist}(X,Y)=$

* 国家自然科学基金资助项目

$\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}\|x-y\|$.

二、耗散孤立波方程的长期行为

定理2.1　若$u(x,t)$是方程(1.1)～(1.3)的解，则存在$R=\max\{1,\ \|f\|^2/2+\|F\|^2+2\sqrt{r/\delta}L\}$，使$B_{2R}=\{u\in D(A)\mid\|u(x,t)\|\leqslant 2R\}$是吸收集，其中$r$，$\delta$是常数（见证明过程），$F=-v\varphi^{(\mathrm{iv})}-\alpha\varphi\varphi'-\varphi'''-\beta\varphi$，$\varphi$是只与$x$有关的函数。

证明　构造奇函数$\varphi(x)$，满足：$\varphi\in C_0^\infty(I)$；$\varphi(x)=2rx$，$x\in[-(1-\delta)L/2,(1-\delta)L/2]$，$0<\delta<1$；$|\varphi'(x)|\leqslant 4r/\delta$，$x\in I$；$\varphi(L/2)=\varphi(-L/2)=0$。

设　　$u(x,t)=y(x,t)+\varphi(x)$

$$L(y,\varphi)=v\|y_{xx}\|^2+\frac{\alpha}{2}\int_I\varphi' y^2dx+\beta\|y\|^2+\int_I fydx$$

当$0<\varepsilon<\min\{1,\ 1/v\}$时，

$$L(y,\varphi)\geqslant\varepsilon\|y_{xx}\|^2+\|y\|^2/2-\|f\|^2/2,\qquad y\in H_0^1(I)\cap H^2(I)$$

事实上，　　$y'_x=-\int_x^{L/2}y'(t)dt$，　　$x\in[(1-\delta)L/2,\ L/2]$

时，　　$|y(x)|\leqslant(L/2-x)^{1/2}\|y'\|$

$$\left|\int_{(1-\delta)L/2}^{L/2}(\varphi'-2r)y^2dx\right|\leqslant\{\|\varphi'\|_\infty+2r\}\int_{(1-\delta)L/2}^{L/2}|y|^2dx$$

$$\leqslant\left\{\frac{4r}{\delta}+2r\right\}\|y'\|^2\frac{(L\delta)^2}{8}\quad\frac{1}{2}\int_I\varphi' y^2dx$$

$$=\int_I ry^2dx+\frac{\alpha}{2}\int_{-L/2}^{-(1-\delta)L/2}(\varphi'-2r)y^2dx+\frac{\alpha}{2}\int_{(1-\delta)L/2}^{L/2}(\varphi'-2r)y^2dx$$

$$\|y'_x\|^2\leqslant\|y\|\|y_{xx}\|\leqslant\frac{v-\varepsilon}{\alpha rL^2\delta}\|y_{xx}\|^2+\frac{\alpha rL^2\delta}{4(v-\varepsilon)}\|y\|^2$$

$$L(y,\varphi)\geqslant v\|y_{xx}\|^2+\alpha r\|y\|^2-\alpha rL^2\delta\|y'_x\|^2+\beta\|y\|^2-\|y\|^2/2-\|f^2/2$$

$$\geqslant\varepsilon\|y_{xx}\|^2+\left\{\alpha r+\beta-\frac{\alpha^2r^2L^4\delta^2}{[4(v-\varepsilon)]}-1/2\right\}\|y\|^2-\|f\|^2/2$$

让δ充分小，r充分大，使

$$\alpha r+\beta-\frac{\alpha^2r^2L^4\delta^2}{[4(v-\varepsilon)]}>1$$

方程(1.1)乘y并在I上积分，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\|y\|^2+\frac{\|y\|^2}{2}-\frac{\|f\|^2}{2}\leqslant\frac{\|y\|^2}{4}+\|F\|^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\|y\|^2+\frac{\|y\|^2}{4}\leqslant\frac{\|F\|^2}{2}+\|F\|^2$$

设$R_2=\|f\|^2/2+\|F\|^2$, $R_3=\sqrt{R_2}$ ，则

$$\|y(x,\ t)\|^2\leqslant\|y_0\|^2\exp(-t/4)+R_2,\ \lim_{t\to\infty}\sup\|y(x,\ t)\|\leqslant R_3$$

$$\|\varphi(x)\|=\left(\int_I\left(\int_{-L/2}^{x}\varphi'(t)dt\right)^2dx\right)^{1/2}\leqslant2\sqrt{r/\delta}\,L=R_4$$

$$R=R_3+R_4$$

因此B_{2R}获得，易证它是吸收集.

定理2.2　若$0\leqslant v\leqslant C_0=7\alpha((4/3)\alpha|\beta|)^{5/3}$，且

$$R_1=\max\{(7\alpha/v)^{2/5}(2R)^{7/5},\ 2^{1/2}[(4|\beta|+2)/v]^{1/4}R\}$$

则$B_{2R}\cap B'_{2R1}$是吸收集，其中$B'_{2R1}=\{u\in D(A)\,|\,\|A^{1/4}u\|\leqslant2R_1\}$.

证明　易证如下不等式

$$\|u\|_\infty\leqslant\|u\|^{1/2}\|A^{1/4}u\|^{1/2},\ \|A^{1/2}u\|\leqslant\|A^{1/4}u\|^{1/2}\|A^{3/4}u\|^{1/2},\ \|A^{1/4}u\|\leqslant\|u\|^{2/3}\|A^{3/4}u\|^{1/3}$$

$$\left|\int_I uu_xu_{xx}dx\right|\leqslant\|u\|_\infty\|A^{1/4}u\|\|A^{1/2}u\|\leqslant\|u\|^{11/6}\|A^{3/4}u\|^{7/6}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|A^{1/4}u\|^2+\frac{2}{3}\|A^{3/4}u\|^2\leqslant\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|A^{1/4}u\|^2+v\|A^{3/4}u\|^2\leqslant\alpha\|u\|^{11/6}\|A^{3/4}u\|^{7/6}$$
$$+|\beta|\|A^{1/4}u\|^2$$

设　$$L(k)=\frac{2}{3}vk-2|\beta|-2\alpha\|u\|^{11/6}k^{7/12}$$

则　$$L'(k)=\frac{2}{3}v-\frac{7}{6}\alpha\|u\|^{11/6}k^{-5/12}$$

若$L'(k)\geqslant0$,

则　$k\geqslant(7\alpha/v)^{12/5}\|u\|^{22/5}=k_2$

设　$\|A^{1/4}u\|\geqslant R'_1=(7\alpha/v)^{1/2}(2R)^{7/5}$, $\|u\|\leqslant2R$　(2.1)

则　$\|A^{1/4}u\|\geqslant(7\alpha/v)^{2/5}\|u\|^{7/5}$

且　$\|A^{1/4}u\|^6/\|u\|^4\geqslant(7\alpha/4v)^{12/5}\|u\|^{22/5}=k_2$

$$L(k_1)\geqslant\frac{8}{21}v\|A^{1/4}u\|^6/\|u\|^4-2|\beta|\|A^{1/4}u\|^2\leqslant0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\|A^{1/4}u\|^2+\frac{8}{21}v\frac{\|A^{1/4}u\|^6}{\|u\|^4}-2|\beta|\|A^{1/4}u\|^2\leqslant0\tag{2.2}$$

在条件（2.1）下，$\|A^{1/4}u\|\geqslant(7\alpha/v)^{2/5}\|u\|$，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\|A^{1/4}u\|^2+\frac{8}{21}v\left(\frac{7\alpha}{v}\right)^{8/5}-2|\beta|\geqslant0,\ \lim_{t\to\infty}\sup\|A^{1/4}u\|\leqslant R'_1\tag{2.3}$$

事实上，若（2.3）不成立，由$\|u\|\leqslant2R$，得(2.1)，(2.2)，积分(2.2)，就得矛盾．下面来证明$B_{2R}\cap B'_{2R1}$是吸收集．因为B_{2R}是吸收集，对任意有界集B，存在$t_B>0$，$S_tB\subset B_{2R}$，$t\geqslant t_B$时．设$u(x,\ t)=S_tu_0$，$u_0\in B$．用u乘（1.1）并在I上积分，则

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2+v\|A^{1/2}u\|^2\leqslant|\beta|\|u\|^2\leqslant4|\beta|R^2,\quad t\geqslant t_B\text{时},$$

$$v\int_{t_B}^{t_B+1}\|A^{1/2}u\|^2d\tau\leqslant(4|\beta|+2)R^2$$

因此存在$\tau\in[t_B,\ t_B+1]$，满足

$$\|A^{1/4}u(\tau)\|^2\leqslant\|u(\tau)\|\|A^{1/2}u(\tau)\|\leqslant2([4|\beta|+2]/v)^{1/2}R^2=R_1''^2,\ R_1''>0$$

令 $R_1=\max\{R_1',\ R_2''\}$，$t\geqslant t_B+1$时，

$$\|A^{1/4}u\|\leqslant2R_1,\ S_tu(x,\ t)\subset B_{2R}\cap B'_{2R1},\ B_{2R}\cap B'_{2R1}是吸收集.$$

定理2.3 方程 (1.1)～(1.3) 整体吸引子是$\bigcap_{t>0}S_tB'_{2R1}$.

三、吸引子的几何结构

$A=\partial^4/\partial x^4$，$D(A)=H^4(I)\cap H_0^2(I)$，$A$是自共轭、正稠定算子且具有紧预解式，相应的$A$的特征值$\{\lambda_n\}$满足$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\to\infty$. 特征向量$\{\omega_n\}$. 设$P_N$是从$D(A)$到span$\{\omega_1,\ \cdots,\ \omega_N\}$的投影，$Q_N=I-P_N$是$P_ND(A)$的正交补上投影，因为$B_{2R}\cap B'_{2R1}$是吸收集，则存在$t_0>0$，使

$$B=\bigcup_{t\geqslant t_0}S_t(B_{2R}\cap B'_{2R1})\subset B_{2R}\cap B'_{2R1}.$$

易证B是吸收集且$S_tB\subset B$，$t\geqslant0$.

设$0<r\leqslant1$，锥不变性质是指，对B和数$N\in\{1,\ 2,\ \cdots\}$，锥

$$C_N(r)=\{[u,v]\in B\times B\,|\,\|Q_N(u-v)\|\leqslant r\|P_N(u-v)\|\}$$

是严格不变的，即，若 $\|Q_N(u-v)\|=r\|P_N(u-v)\|$，$[u,\ v]\in B\times B$，$u\neq v$，则有

$$\|Q_N(S_tu-S_tv)\|<r\|P_N(S_tu-S_tv)\|,\qquad t\geqslant0$$

凝聚性质指存在常数$\beta>0$，使

$$\|S_tu-S_tv\|\leqslant\|u-v\|e^{-\beta t}$$

其中，$\qquad [u,\ v]\in B\times B,\ [S_tu,\ S_tv]\overline{\in}C_N(r),\qquad t\geqslant0$

定理3.1 若A的特征值λ_N满足$\lambda_{N+1}^{1/4}-\lambda_N^{1/4}>M_0$，$v>C_1$，

$$M_0=\max\left\{\frac{3}{v}(C_1+C_2)R_5,\frac{3\sqrt{2}}{vr},\ |\beta|,|\beta|\ ,\ (1+C_2R^{1/2})^2\left[\frac{1}{v}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{r}\right)\right]\right\}$$

$$C_1=\frac{1}{2\lambda_1}\left\{-\frac{8}{7}\beta+\left[\left(\frac{8}{7}\beta\right)^2+4\lambda_1(\alpha R_1)^4\right]^{1/2}\right\},\qquad C_2=2^{3/2}\alpha/r$$

则(1)$C_N(r)$是严格不变的，(2)$B\times B\backslash C_N(r)$是指数凝聚的.

证明 首先证明：

设u_1^0，$u_2^0\in B$，$u_1(t)=S_tu_1^0$，$u_2(t)=S_tu_2^0$，$t\geqslant0$，则

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|\leqslant\|u_1(0)-u_2(0)\|e^{-\rho t},\qquad t\geqslant0$$

其中，$\qquad \rho=7\lambda_1v/8+2\beta-7(\alpha R_1)^{8/7}/8v$

设$L(u,\ v)=uv_x$，$Y=u_1-u_2$，则

$$\frac{\partial Y}{\partial t}+vAY+\frac{\partial^3Y}{\partial x^3}+\alpha L\left(\frac{u_1+u_2}{2},\ Y\right)+\alpha L\left(Y,\ \frac{u_1+u_2}{2}\right)+BY=0\tag{3.1}$$

用Y乘（3.1）并在I上积分，再估计运算后，有

$$\frac{\partial}{\partial t}\|Y\|^2+\left\{\frac{7}{4}v\lambda_1+2\beta-\frac{7}{4v}(\alpha R_1)^4\right\}\|Y\|^2\leqslant 0$$

因为$v\geqslant C_1$，则

$$\rho=\frac{7}{4}v\lambda_1+2\beta-\frac{7}{4v}(\alpha R_1)^4>0$$

则　$$\|u_1(t)-u_2(t)\|\leqslant\|u_1(0)-u_2(0)\|e^{-\rho t},\qquad t\geqslant 0$$

第二，证明

若　$[u_1(t),\ u_2(t)]\in B\times B$，$0<r\leqslant 1$，$[S(\tau)u_1,\ S(\tau)u_2]\overline{\in}C_N(r)$，$\tau\in(0,\ t)$

且　$$\lambda_{N+1}>\max\{1,1/v^4,\ (\sqrt{2}/r+C_2R-\beta)^4\}\tag{3.2}$$

则　$$\|S(\tau)u_1-S(\tau)u_2\|\leqslant\|u_1-u_2\|\exp(-v\lambda_{N+1}-|\beta|)\tau$$

事实上

$$[u_1(t),\ u_2(t)]\overline{\in}C_N(r),\quad \|Y\|^2\leqslant 2\|q_N\|^2/r^2$$

$$\left|\int_I\frac{\partial^3 q_N}{\partial x^3}Ydx\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{r}\|q_N\|\|A^{3/4}q_N\|$$

上述　$p_N=P_N(S_tu_1-S_tu_2)$，$q_N=Q_N(S_tu_1-S_tu_2)$，$Y=u_1-u_2$

用q_N乘（3.1）并在I上积分，则

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|q_N\|^2+\left\{v\lambda_{N+1}+\beta-\frac{\sqrt{2}}{r}\lambda_{N+1}^{3/4}-C_2R^{1/2}\lambda_{N+1}^{1/4}\right\}\|q_N\|^2\leqslant 0\tag{3.3}$$

当λ_{N+1}满足(3.2)，就得(3.3)，且

$$\|S(\tau)u_1-S(\tau)u_2\|\leqslant\|u_1-u_2\|\exp(-v\lambda_{N+1}-|\beta|)\tau,\qquad \tau\in(0,\ t)$$

第三，证明

$$v_{N+1}=v\lambda_{N+1}+\beta-\frac{\sqrt{2}}{r}\lambda_{N+1}^{3/4}-C_2R_1\lambda_{N+1}^{1/4}>\mu_N$$

$$=v\lambda_N-\beta+(r^2+1)^{1/2}\lambda_{N+1}^{3/4}+C_3R_1\lambda_N^{1/4}$$

$$C_3=2\alpha(r^2+1)^{1/2}$$

由条件$\lambda_{N+1}^{1/4}-\lambda_N^{1/4}\geqslant M_0$得第三。

第四，若$C_N(r)$不是严格不变的，由$[u_1,\ u_2]\in C_N(r)$，$[S_tu_1,\ S_tu_2]\in\partial C_N(r)$，即，

$$\|q_N\|^2=r^2\|p_N\|^2,\quad \|S_tu_1-S_tu_2\|=(r^2+1)^{1/2}\|p_N\|=\|Y\|$$

利用第二步中办法，则

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|p_N\|^2\geqslant-\mu_N\|p_N\|^2$$

$$0<\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\|q_N\|^2-r^2\|p_N\|^2)\leqslant-(v_{N+1}-\mu_N)\|q_N\|^2<0$$

矛盾．本定理得证。

四、耗散孤立波方程的参数扰动

当$v\to k_0$，$k_0>0$，方程(1.1)～(1.3)的吸引子趋于新的吸引子，特别，当$v\to 0^+$时，方

程(1.1)～(1.3)是否存在吸引子？在[5]中，我们已经知道方程(1.1)在周期边界条件下，当$v=0$时存在吸引子．一般地，不是周期边界条件，$v=0$是否存在吸引子，这是一个未解决的问题．本文得出，对于方程(1.1)～(1.3)，若$v=0$时吸引子$A(0)$存在，则$v\to 0^+$时，$A(v)$吸引子趋于$v=0$时的吸引子$A(0)$．

设H是Banach空间，范数$\|\cdot\|$，半群$S_t:H\to H$，$t\geqslant 0$．$\{S_t(\lambda)\}$连续依赖于参数λ．$\lambda\in R$，R是Banach空间，$K\subset H\times R_0$，R_0是R中紧集，K是闭不变集，K中半群$\{S_t(\lambda)\}$且

$$S_t(K\cap\{\lambda=\lambda_0\})\subset K\cap\{\lambda=\lambda_0\},\qquad 对任意\lambda_0\in R_0 \tag{4.1}$$

设$P_1:H\times R_0\to H$是投影，$P_1(u,\ \lambda)=u$，$(u,\ \lambda)\in H\times R_0$．则

$$S_t(\lambda_0)u=P_1S_t(u,\ \lambda_0),\qquad u\in K(\lambda_0) \tag{4.2}$$

若$\lambda_0\in R_0$，$S_t(\lambda_0):K(\lambda_0)\to K(\lambda_0)$，$B_0$称为一致吸收集，若对任意有界集$B$，存在$t_B$，$S_t(\lambda_0)(K(\lambda_0)\cap B)\subset B_0$，当$t\geqslant t_B$时，任意$\lambda_0\in R_0$．

命题4.1　设半群$\{S_t\}_{t\geqslant 0}$满足下列条件：(1) $S_t:H\to H$(或$K\to K$)，$t\geqslant 0$．(2) $\{S_t\}$有吸收集B_0且它在H中紧．(3) $\{S_t\}$是连续的，即，$S_tu_n\to S_tu_0$，当$u_n\to u_0$时．则$\{S_t\}$在H中有吸引子．

命题4.2　若半群$\{S_t(\lambda)\}$满足条件(4.1)且对半群$S_t(\lambda_0)$，任意$\lambda_0\in R_0$，存在H中一致吸收紧集B_0，假设算子S_t在K中相应于$H\times R_0$中拓扑连续，则$\{S_t\}$在$H\times R$中有吸引子$A(K)$．

命题4.1，4.2的证明见[7]．

命题4.3　(i)若$K\subset H\times R_0$，半群$S_t:K\to K$有吸引子A且条件(4.1)满足，则$A(\lambda_0)=P_1(A\cap\{\lambda=\lambda_0\})$是$K(\lambda_0)$中相应半群$\{S_t\}$的限制$\{S_t(\lambda_0)\}$的吸引子，其中$K(\lambda_0)=P_1(K\cap\{\lambda=\lambda_0\})$．

(ii)设$K\subset H\times R_0$是紧集，则$K(\lambda_1)=P_1(K\cap\{\lambda=\lambda_1\})\to K(\lambda_0)=P_1(K\cap\{\lambda=\lambda_0\})$即，$\mathrm{dist}(K(\lambda),\ K(\lambda_0))\to 0$，其中$\mathrm{dist}(X,\ Y)=\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{y\in Y}\|x-y\|$．

(iii)若(i)中条件成立且半群$\{S_t(\lambda),\ \lambda\in R_0\}$有一致吸收集$B_1\subset H_1$，其中$H_1\subset H$，$H_1$是$H$中的紧集，则$\{S_t(\lambda)\}$的吸引子$A(\lambda)$趋于$\{S_t(\lambda_0)\}$的吸引子$A(\lambda_0)$，当$\lambda\to\lambda_0$时，即$\mathrm{dist}(A(\lambda),\ A(\lambda_0))\to 0(\lambda\to\lambda_0)$．

证明　(i) $A(\lambda_0)$的紧及不变性由吸引子A的性质得到．只需证明吸收性质，对任意有界集$B\subset K(\lambda_0)$，任意$\varepsilon>0$，存在$\delta_1>0$，$t_0>0$，且使$S_t(\lambda)B\subset O_\varepsilon(A(\lambda_0))$，$t\geqslant t_0$时，$\|\lambda-\lambda_0\|<\delta_1$，其中$O_\varepsilon(A(\lambda_0))$是$H$中$A(\lambda_0)$的$\varepsilon$邻域．

考虑开集$O'_\varepsilon\subset H\times R_0$，$O(\lambda_0,\varepsilon,\delta)=O'_\varepsilon(A(\lambda_0)\times\{\lambda:\|\lambda-\lambda_0\|<\delta\})$，其中$O'_\varepsilon$是$H\times R_0$中的$\varepsilon$邻域．因为$A\backslash O'_\varepsilon\subset H\times R$是紧集，不交于平面$\lambda=\lambda_0$，并且$H\times R_0$中到平面$\lambda=\lambda_0$的距离为$\delta$，等于$\delta_0>0$，则有紧集$A\backslash O'_\varepsilon$的有限复盖$O(\lambda_j,\ \varepsilon,\ \delta_0/4)$．这些邻域与邻域$O(\lambda_0,\ \varepsilon,\ \delta)$的并是开集$O$，复盖$A$．由于$A$是吸引子，存在$t_0>0$，使$S_t((B\times R_0)\cap K)\subset O$，$t\geqslant t_0$时．所以，若$O(\lambda_j,\ \varepsilon,\ \delta/4)\cap\{(u,\ \lambda):\|\lambda-\lambda_0\|<\delta/4\}=\phi$，则成立

$$S_t(B\times\{\lambda:\|\lambda-\lambda_0\|<\delta_0/4\})\subset O(\lambda_j,\ \varepsilon,\ \delta),\qquad j\neq 0$$

(ii)假设不成立，则存在$x_k\in K(\lambda_k)$，$\mathrm{dist}((x_k,\ \lambda_k),\ K(\lambda_0))\geqslant\delta>0$，当$\lambda_k\to\lambda_0$时，矛盾．

(iii)因为$A(\lambda_1)$是吸引子，则由(ii)易得结果．

引理4.1　若$0\leqslant v\leqslant v_0$，$v_0$为有限正数，则存在参数$v$的一致吸收集．

证明 由定理2.1，$R=\max\{1,\ \|F\|^2+2\sqrt{r/\delta}L\}\leqslant\max\{1,\ v_0\|\varphi^{(iv)}\|+\|\alpha\varphi\varphi'+\varphi'''+\beta\varphi\|+2\sqrt{r/\delta}L=C_6$，且$B_{2C_6}=\{u\in D(A)\,|\,\|u\|\leqslant 2C_6\}$是(1.1)～(1.3)的吸收集。因为$C_6$与$v$无关，则$B_{2C_6}$是一致吸收集。

定理4.1 (1)方程(1.1)～(1.3)存在吸引子$A(v)$。(2)若$R_0=\{v\,|\,0\leqslant v\leqslant v_0\}$，$v_0$是有限正数，当$v\in R_0$，$v\to k_0>0$，则有$A(v)\to A(k_0)$，即$\mathrm{dist}(A(v),\ A(k_0))\to 0(v\to k_0)$。特别，若存在$v=0$下方程(1.1)～(1.3)的吸引子$A(0)$，则$A(v)\to A(0)$，当$v\to 0^+$时。

证明 该定理的证明由命题4.2，4.3及引理4.1易得。

五、吸引子的分形维估计

设X是半群$\{S_t\}_{t\geqslant 0}$的吸引子。本节符号与[3]第Ⅱ节相同，对$\xi\in H$，$\phi(x)$是式(1.1)的初值ξ线性形式的解：

$$\phi_t+vA\phi+\alpha\phi\varphi_x+\alpha\phi_x\varphi+\varphi_{xxx}+\beta\phi=0 \tag{5.1}$$

$$\phi(0)=\xi \tag{5.2}$$

其中，$\varphi=\varphi(t)=S_tu_0$

X的分形维$d_M(X)=\lim\ \sup[\log[n_x(\varepsilon)]]/[\log(1/\varepsilon)]$（见[3]）。

定理5.1 若$v>|\beta|/\lambda_1$(λ_1是$A=\partial^4/\partial x^4$的最小特征值)，则$d_M(X)\leqslant 4/3$。

证明 设ϕ_1，…，ϕ_m是式(5.1)在初值$\phi_j(0)=\xi_j$，$\xi_j\in H$，$|\xi_j|\leqslant 1$，$1\leqslant j\leqslant m$下的解。

记$E(u)\phi=v\phi_{xxxx}+\alpha\phi_xu+\alpha\phi u_x+\phi_{xxx}+\beta\phi$，$B(u,\ v)=uv_x$，$Q_m=Q_m(t,\ \xi_1,\ \cdots,\ \xi_m)$是$H$到$\mathrm{span}\{\phi_1(t),\ \cdots,\ \phi_m(t)\}$的投影，则

$$\mathrm{Tr}Eu(\tau)\cdot Q_m=\sum_{j=1}^m v\|A^{1/2}\psi_j\|^2+\sum_{j=1}^m\beta\|\psi_j\|^2+\alpha\sum_{j=1}^m(B(\psi_j,\ u(\tau)),\ \psi_j)$$

$$\geqslant(v\lambda_1+\beta)\|\rho(\cdot,\tau)\|^2-|\alpha|\,\|\rho(\cdot,\tau)\|\,\|\nabla u(\cdot,\tau)\|$$

$$-\frac{1}{t}\int_0^t\mathrm{Tr}Eu(\tau)\cdot Q_m(\tau)d\tau\leqslant-(v\lambda_1+\beta)K^2(t)+\alpha\gamma(t)K(t)$$

上式中

$$\rho(x,\ \tau)=\sum_{j=1}^m|\psi_j(x,\ \tau)|^2,\quad K(t)=\left(\frac{1}{t}\int_0^t\|\rho(\cdot,\tau)\|\,d\tau\right)^{1/2}$$

$$\gamma(t)=\left(\frac{1}{t}\int_0^t\|\nabla u(\cdot,\tau)\|^2d\tau\right)^{1/2}$$

记$\gamma=\lim\ \sup\gamma(t)$，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_m\|^2+2\mathrm{Tr}Eu\cdot Q_m\|\phi_1\wedge\cdots\wedge\phi_m\|^2=0$$

用[3]式(5.13)，$d_M(X)\leqslant m\{1+\max(q_k/(-q_m))\}$。

$$m=\int_I\rho(x,\ t)dx\leqslant|I|^{1/2}\left(\int_I\rho^2(x,\ \tau)dx\right)^{1/2},\quad m\leqslant|I|^{1/2}K(t)$$

当$n>3\gamma\alpha|I|^{1/2}/(v\lambda_1+\beta)\geqslant n-1$时，且$m\geqslant n$，有

$$-(v\lambda_1+\beta)K^2(t)+2\gamma\alpha K(t)=(v\lambda_1+\beta)K(t)[-K(t)+2\gamma\alpha/(v\lambda_1+\beta)]$$
$$\leqslant-\gamma K(t)\leqslant-3\gamma\alpha/(v\lambda_1+\beta)$$

若$m<n$，则$-(v\lambda_1+\beta)K^2(t)+2\gamma\alpha K(t)\leqslant\gamma^2\alpha/(v\lambda_1+\beta)$

$$d_M(X)\leqslant\frac{4}{3}+4\gamma\alpha|I|^{1/2}/(v\lambda_1+\beta)$$

用u乘(1.1)并在I上积分，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2+2v\lambda_1^{1/2}\|A^{1/4}u\|^2\leqslant2\beta\|A^{1/4}u\|^2/\sqrt{\lambda_1} \tag{5.3}$$

记$C_7=v\lambda_1^{1/2}-|\beta|\lambda_1^{-1/2}$，积分(5.3)，则

$$C_8\frac{1}{t}\int_0^t\|A^{1/4}u(\tau)\|^2d\tau\leqslant\|u_0\|^2/t$$

令$t\to\infty$，$\gamma=\lim\sup\frac{1}{t}\int_0^t\|A^{1/4}u(\tau)\|^2d\tau=0$

所以$d_M(X)\leqslant4/3$。

参考文献

[1] 谷超豪等，《孤立子及应用》，浙江科技出版社（1990）.

[2] Foias, C., G. Sell and R. Teman, Inertial manifold for dissipative PDE's, *J. Diff. Eq.*, 73 (1988), 309—353.

[3] Foias, C., O. Manley and R. Teman, Attractors for the Bénard problem: Existence and physical bounds on their fractal dissipative, *Nonli. Anal. TMA*, 11(8) (1987), 939—967.

[4] Constain, P., C. Foias and R. Teman, Attractors representing turbulent flows, *Memmoirs Amer. Math. Soc.*, 53(314) (1985).

[5] Ghidaglia, J., Weakly damped fored kortewegde vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time, *J. Diff. Eq.*, 74 (1988), 369—390.

[6] Sell, G. and Y. You, Inertial manifolds: The non-self-adjoint case, *J. Diff. Eq.*, 96 (1992), 203—255.

[7] Hale, J., Asymptotic behaviour and dynamics in infinite dimensions, *Nonli. Diff. Eq., Research Notes in Math.*, 5 (1985).

Attractors of Dissipative Soliton Equation

Tian Li-xin

(Department of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu)

Xu Zhen-yuan

(Wuxi Light Industry Institute, Wuxi, Jiangsu)

Liu Zeng-rong

(Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou, Jiangsu)
(Laboaratory for Nonlinear Mechanics of Continuous Media, Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, we study longtime dynamic behavior of dissipative soliton equation: existence of attractor, geometrical structure of attractor, dynamic behavior under the parametric perturbation of dissipative soliton equation, estimate of fractal dimension of attractor.

Key words attractor, uniform absorbing set, fractal dimension, dissipative soliton equation, squeezing property and invariant cone property