文章编号: 1000_0887(2004) 02_0181_08

一种修正的求约束总极值的积分_水平集方法*

田蔚文[1], 邬冬华[1,2], 张连生[1], 李善良[3]

(1. 上海大学 理学院 数学系, 上海 200436;
2. 南京大学 数学系, 南京 210093;
3. 复旦大学 管理学院, 上海 200433)

(刘曾荣推荐)

摘要: 对于有约束的全局最优化问题, 在 Chew_Zheng 的《Integral Global Optimization》和邬冬华等的《一种修正的求总极值的积分_水平集方法的实现算法收敛性》的基础上, 给出一种修正的求约束总极值的积分_水平集方法, 它同样具有修正的求总极值的积分_水平集方法的两个特点: 1) 每一步构造一个新函数, 它与原目标函数具有相同的总极值; 2) 避免了郑权算法在一般情况下, 由于水平集不易求得而造成难以求出水平集的困难• 同时给出了其实现算法, 并证明了算法的收敛性•

关 键 词: 约束总极值; 积分_水平集; 收敛性
中图分类号: O221　　文献标识码: A

引　言

考虑有约束的全局最优化问题的模型:

$$c^* = \min_{x \in S} f(x), \tag{1}$$

其中 $S \subset R^n$ 是一个约束集, $f: R^n \to R^1$ 为连续函数, c^* 为 $f(x)$ 在 S 中的总极值•

张连生[1]首先给出了一个求约束总极值问题的积分型算法, 该算法构造一个精确罚函数, 将求约束总极值问题转化为求无约束总极值问题• 在此基础上, 郑权等[2,3]给出了一个求上述问题的非连续罚算法, 其概念性算法为:

算法 1

步 1　取 $c_0 > \min_{x \in S} f(x)$, $\epsilon > 0$, $n := 0$, $\alpha_0 > 0$, $\beta > 1.0$, 令

$$H_0 = \left\{ x \mid f(x) + \alpha_0 p(x) \leqslant c_0 \right\}•$$

步 2　计算均值

$$c_{n+1} = \frac{1}{\mu(H_n)} \int_{H_n} (f(x) + \alpha_n p(x)) \mathrm{d}\mu,$$

* 收稿日期: 2002_05_28; 修订日期: 2003_09_09
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871053); 上海市高校科技发展基金资助项目; 上海市高校青年基金资助项目
作者简介: 田蔚文(1957—), 女, 上海人, 教授, 博士(联系人. Tel: 86_21_66132009(o), 86_21_62573400(h), Fax: 86_21_62134273; E_mail: wwtian@mail.shu.edu.cn).

其中 $H_n = \left\{x \mid f(x) + \alpha_n p(x) \leqslant c_n\right\}$.

步 3 计算均方差

$$v_{n+1} = \frac{1}{\mu(H_n)}\int_{H_n}(f(x) + \alpha_n p(x) - c_n)^2 \mathrm{d}\mu.$$

若 $v_{n+1} \geqslant \epsilon$, 则令 $n := n+1$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n \beta$, 转步 2; 否则, 转步 4.

步 4 令 $c^* = c_{n+1}$, 且 $H^* = H_{n+1}$, 终止.

上述算法中的 $p(x)$ 是罚函数. 文[3] 构造了一个非连续的精确罚函数 $p(x)$, 其定义如下:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \in S, \\ \delta + d(x), & x \notin S, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\delta > 0$, $d(x)$ 是罚函数. 例如: 当

$$S = \left\{x \mid g_i(x) \leqslant 0, \ i = 1, 2, \cdots, r\right\}$$

时, 取

$$d(x) = \sum_{i=1}^{r}\max(g_i(x), 0).$$

同无约束问题一样, 由于水平集 H_n 很难求, 所以在实现算法中, 只能通过 Monte_Carlo 随机取点求得近似水平集. 我们基于文[4] 的思想, 给出一个修正的罚方法, 以及实现算法, 并证明了算法的收敛性.

1 修正的罚方法及其收敛性

我们考虑如下问题:

$$\min_{x \in S} f(x), \tag{3}$$

其中 $S = \left\{x \mid g_i(x) \leqslant 0, i = 1, 2, \cdots, r\right\}$.

设 $D \supset S$ 是 R^n 有界闭箱, $p(x)$ 是罚函数如式(2) 所定义, 修正的罚方法叙述如下:

算法 2

步 1 取 $c_0 > \min_{x \in S} f(x)$, $\epsilon > 0$, $k := 0$, $\alpha_0 > 0$, $\beta > 1.0$.

步 2 记 $F(x, \alpha_k) = f(x) + \alpha_k p(x)$; 令

$$H_{c_k} = \left\{x \mid f(x) + \alpha_k p(x) \leqslant c_k\right\};$$

作函数 $F_{c_k}(x, \alpha_k)$, 满足

$$F_{c_k}(x, \alpha_k) = \begin{cases} c_k, & x \in D \setminus H_{c_k}, \\ F(x, \alpha_k), & x \in H_{c_k}; \end{cases}$$

计算均值

$$c_{k+1} = \frac{1}{\mu(D)}\int_D F_{c_k}(x, \alpha_k)\,\mathrm{d}\mu.$$

步 3 计算均方差

$$v_{k+1} = \frac{1}{\mu(D)}\int_D (F_{c_k}(x, \alpha_k) - c_k)^2 \mathrm{d}\mu;$$

若 $v_{k+1} \geqslant \epsilon$, 令 $k := k+1$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k \beta$, 转步 2; 否则, 转步 4.

步 4 令 $c^* = c_{k+1}$, 且 $H^* = H_{c_{k+1}}$, H^* 为 $f(x)$ 在 S 中的近似总极值点集, c^* 为近似总极值. 算法终止.

如果我们在算法中令 $\epsilon = 0$, 则迭代将进行无穷多次• 相应地, 我们得到两无穷序列 $\{c_k\}$、$\{H_{c_k}\}$ 及函数序列 $\{F_{c_k}(x, \alpha_k)\}$ 我们先讨论这些序列的一些基本性质•

定义 1 设 $c_k > c^* = \min_{x \in S} f(x)$, 记 $F(x, \alpha_k) = f(x) + \alpha_k p(x)$; 我们定义

$$M(F_{c_k}; p) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D F_{c_k}(x, \alpha_k) \mathrm{d}\mu, \tag{4}$$

其中

$$F_{c_k}(x, \alpha_k) = \begin{cases} c_k, & x \in D \setminus H_{c_k}, \\ F(x, \alpha_k), & x \in H_{c_k}, \end{cases} \tag{5}$$

$$H_{c_k} = \{x \mid x \in D, F(x, \alpha_k) \leqslant c_k\} \bullet \tag{6}$$

由此, 我们可得

性质 1 设 $c_k > c^*$, 则

$$M(F_{c_k}; p) \leqslant c_k \bullet \tag{7}$$

证明 由定义可知

$$M(F_{c_k}; p) = \frac{1}{\mu(D)} \int_D F_{c_k}(x, \alpha_k) \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{\mu(D)} \int_D c_k \mathrm{d}\mu = c_k,$$

故 $\quad M(F_{c_k}; p) \leqslant c_k \bullet$

性质 2 若 $\{c_k\}$ 单调下降且趋向于 c, $c \geqslant c^* = \min_{x \in S} f(x)$, $\{\alpha_k\}$ 单调上升且趋向于 ∞, 则

$$\lim_{k \to \infty} H_{c_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_{c_k} = H_c \cap S, \tag{8}$$

且

$$\lim_{k \to \infty} \mu(H_{c_k}) = \mu(H_c \cap S) \bullet \tag{9}$$

证明 设 $x \in H_{c_{k+1}}$, 则

$$f(x) + \alpha_{k+1} p(x) \leqslant c_{k+1} \bullet$$

因为 $\alpha_{k+1} \geqslant \alpha_k$ 和 $c_{k+1} \leqslant c_k$, 所以有

$$f(x) + \alpha_k p(x) \leqslant f(x) + \alpha_{k+1} p(x) \leqslant c_{k+1} \leqslant c_k,$$

故 $x \in H_{c_k}$, 即 $H_{c_{k+1}} \subset H_{c_k}$• 于是, $\lim_{k \to \infty} H_{c_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} H_{c_k}$• 又设 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} H_{c_k}$, 则有 $\forall k$, $x \in H_{c_k}$ 且

$$f(x) + \alpha_k p(x) \leqslant c_k \leqslant c_1, \tag{10}$$

若 $x \notin S$, 则 $p(x) > 0$• 于是, 当 $k \to \infty$ 时, $\alpha_k p(x) \to \infty$, 这与式(10) 矛盾• 所以, $x \in S$• 于是有 $f(x) + \alpha_k p(x) = f(x) \leqslant c_k$, $\forall k$ 成立• 即 $x \in H_c$• 从而

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} H_{c_k} \subset H_c \cap S \bullet$$

反之, 若 $x \in H_c \cap S$, 则

$$f(x) + \alpha_k p(x) = f(x) \leqslant c_k, \qquad \forall k,$$

即 $x \in H_{c_k}$, $\forall k$, 从而

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} H_{c_k} \supset H_c \cap S \bullet$$

因此 $\quad \bigcap_{k=1}^{\infty} (H_{c_k}) = H_c \cap S \bullet$

此外, 由测度的连续性可知: $\lim_{k \to \infty} \mu(H_{c_k}) = \mu(H_c \cap S)$•

性质 3 若 $\{c_k\}$ 单调下降且趋向于 c, $c \geqslant c^* = \min_{x \in S} f(x)$, $\{\alpha_k\}$ 单调上升且趋向于 ∞, 则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\mu(H_{c_k})}\int_{\mu(H_{c_k})}(f(x)+\alpha_k p(x))\,\mathrm{d}\mu=\frac{1}{\mu(H_c\cap S)}\int_{H_c\cap S}f(x)\,\mathrm{d}\mu. \tag{11}$$

证明　见文[3] p. 49.

性质 4　若 $\{c_k\}$ 单调下降且趋向于 c, $c\geqslant c^*=\min_{x\in S}f(x)$, $\{\alpha_k\}$ 单调上升且趋向于 ∞, 则

$$\lim_{c_k\to c}M(F_{c_k};p)=M(F_c;p). \tag{12}$$

证明

$$M(F_{c_k};p)=\frac{1}{\mu(D)}\int_D F_{c_k}(x,\alpha_k)\,\mathrm{d}\mu=$$

$$\frac{1}{\mu(D)}\left[\int_{D\setminus H_{c_k}}c_k\,\mathrm{d}\mu+\int_{H_{c_k}}(f(x)+\alpha_k p(x))\,\mathrm{d}\mu\right]=$$

$$\frac{1}{\mu(D)}\left[c_k(\mu(D)-\mu(H_{c_k}))+\int_{H_{c_k}}(f(x)+\alpha_k p(x))\,\mathrm{d}\mu\right],$$

$$\lim_{x\in S}M(F_{c_k};p)=\frac{1}{\mu(D)}\left[c(\mu(D)-\mu(H_c))+\int_{H_c\cap S}f(x)\,\mathrm{d}\mu\right]=$$

$$\frac{1}{\mu(D)}\int_D F_c(x,\alpha)\,\mathrm{d}\mu=M(F_c;p),$$

其中

$$F_c(x,\alpha)=\begin{cases}c, & x\in D\setminus H_c\cap S,\\ f(x), & x\in H_c\cap S.\end{cases}$$

由性质 1、性质 2 可知, 算法产生的序列 $\{c_k\}$ 及集合序列 $\{H_{c_k}\}$ 必定收敛, 记为

$$c=\lim_{k\to\infty}c_k,\quad H=\lim_{k\to\infty}H_{c_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}H_{c_k}. \tag{13}$$

由此可知, 我们有下述结果

定理 1　若由算法产生的序列 $\{c_k\}$, 集列 $\{H_{c_k}\}$ 满足 $c=\lim_{k\to\infty}c_k$, $H=\lim_{k\to\infty}H_{c_k}$, 且 $\{\alpha_k\}$ 单调上升且趋向于 ∞, 则有

1) c 为问题(1)的全局极小值.

2) H 为问题(1)的全局极小点集.

证明　根据算法可知:

$$c_{k+1}=M(F_{c_k};p),$$

由性质 4 可知

$$\lim_{k\to\infty}M(F_{c_k};p)=M(F_c;p),$$

所以

$$c=M(F_c;p). \tag{14}$$

若设 c 不是原问题(1) 的全局极小值, 其全局极小值为 c, 则 $c-c=2\eta>0$.

$$M(f_c;p)=\frac{1}{\mu(D)}\int_D F_c(x,\alpha)\,\mathrm{d}\mu=\frac{1}{\mu(D)}\left[\int_{D\setminus H_c\cap S}c\,\mathrm{d}\mu+\int_{H_c\cap S}f(x)\,\mathrm{d}\mu\right]=$$

$$\frac{1}{\mu(D)}\left[c(\mu(D)-\mu(H_c\cap S))+\int_{H_c\cap S\setminus H_{c+\eta}\cap S}f(x)\,\mathrm{d}\mu+\right.$$

$$\left.\int_{H_{c+\eta}\cap S}f(x)\,\mathrm{d}\mu\right]\leqslant$$

$$\frac{1}{\mu(D)}\left[c(\mu(D)-\mu(H_c\cap S))+c(\mu(H_c\cap S)-\right.$$

$$\mu(H_{c+\eta}\cap S))+(c+\eta)\mu(H_{c+\eta}\cap S)]=$$
$$c-\frac{\eta\mu(H_{c+\eta}\cap S)}{\mu(D)},$$

这与(14)式矛盾,所以,1)成立。由性质2可知

$$\lim_{k\to\infty}H_{c_k}=H_c\cap S,$$

所以 $H=H_c\cap S=\{x\mid f(x)=c,x\in S\}$,故2)成立。

定理2 设算法中 $\{c_k\}$ 为单调下降且趋于 c,$\{\alpha_k\}$ 单调上升且趋向于 ∞,则

$$v_{k+1}\to 0\qquad(k\to\infty). \tag{15}$$

证明

$$v_{k+1}=\frac{1}{\mu(D)}\int_D(F_{c_k}(x,\alpha_k)-c_k)^2\mathrm{d}\mu=$$
$$\frac{1}{\mu(D)}\int_{H_{c_k}}(f(x)+\alpha_kp(x)-c_k)^2\mathrm{d}\mu=$$
$$\frac{1}{\mu(D)}\left[\int_{H_{c_k}\setminus H_c\cap S}(f(x)+\alpha_kp(x)-c_k)^2\mathrm{d}\mu+\int_{H_c\cap S}(f(x)-c_k)^2\mathrm{d}\mu\right],$$

由于 $H_{c_k}\to H_c\cap S$, $c_k\to c$, 当 $k\to\infty$ 时,以及(13)、(14)及积分的绝对连续性可知

$$v_{k+1}\to\infty\qquad(k\to\infty).$$

2 实现算法及其收敛性

类似于文[4],我们利用一致分布点集列代替Monte_Carlo投点构造修正的罚方法的实现算法。由于对有界闭箱 $D\in R^n$ 中的任意点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,可表为 $x_i=a_i+(b_i-a_i)t_i$, $i=1,2,\cdots,n$。而 $t=(t_1,\cdots,t_n)\in G_n$, G_n 是单位闭箱,故不妨设 $D=G_n$。现将实现算法表述如下:

算法3

步1 取 $x_0\in G_n$,给定一充分小正数 δ, $\alpha_0>0$, $\beta>1.0$;令 $\hat{c}_0=f(x_0)+\alpha_0p(x_0)$, $k=0$, $l_0=0$。

步2 记 $F(x,\alpha_k)=f(x)+\alpha_kp(x)$;令

$$H_{\hat{c}_{k,l_k}}=\{x\mid x\in G_n,F(x,\alpha_k)\leqslant\hat{c}_k\};$$

作函数 $F_{\hat{c}_{k,l_k}}(x,\alpha_k)$,满足:

$$F_{\hat{c}_{k,l_k}}(x,\alpha_k)=\begin{cases}\hat{c}_{k,l_k}, & x\in G_n\setminus H_{\hat{c}_{k,l_k}},\\ F(x,\alpha_k), & x\in H_{\hat{c}_{k,l_k}};\end{cases}$$

以一致分布的数值积分求水平值:

$$\hat{c}_{k+1,l_{k+1}}=\frac{1}{l_{k+1}}\sum_{s=1}^{l_{k+1}}F_{\hat{c}_{k,l_k}}(P(s),\alpha_k),$$

其中 $P(s)$, $s=1,2,\cdots,l_{k+1}$ 为佳点集,且 $l_1<l_2<\cdots<l_{k+1}$; l_i, $1\leqslant i\leqslant k+1$, 为正整数序列,当 $k\to\infty$ 时, $l_k\to\infty$。

步3 计算均方差

$$V=\frac{1}{l_k}\sum_{s=1}^{l_k}(F_{\hat{c}_{k,l_k}}(P(s),\alpha_k)-\hat{c}_{k,l_k})^2.$$

步4 若 $V \geqslant \epsilon$, 则令 $k := k+1$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k \beta$, 取近似离散水平集

$$\tilde{H}_{\hat{c}_{k+1, l_{k+1}}} = \Big\{ x \mid x = P(s) \in G_n, F(P(s), \alpha_{k+1}) \leqslant \hat{c}_{k+1, l_{k+1}}, s = 1, 2, \cdots, l_{k+1}, x \in H_{\hat{c}_{k, l_k}}, F(x, \alpha_{k+1}) \leqslant \hat{c}_{k+1, l_{k+1}} \Big\}$$

及水平集

$$H_{\hat{c}_{k+1, l_{k+1}}} = \Big\{ x \mid x \in G_n, \ F(x, \alpha_{k+1}) \leqslant \hat{c}_{k+1, l_{k+1}} \Big\},$$

转步2; 否则, 转步5•

步5 若 $l_{k+1} \geqslant M(|f|)/\delta$, 则算法有限步终止, 转步6; 否则, 取 $l_{k+1} = [M(|f|)/\delta] + 1$, 转步3• 其中 $M(|f|)$ 为函数 $|f(x)|$ 在 S 上的一个正上界•

步6 令 $f^* = \hat{c}_{k+1, l_{k+1}}$, 且 $\tilde{H} = \tilde{H}_{\hat{c}_{k+1, l_{k+1}}}$, $\tilde{H}$ 为 $f(x)$ 在 S 中的近似总极值点集, f^* 为近似总极值•

为证明修正的罚方法的实现算法收敛性, 我们得先证明下述定理:

定理3 设 $H_c \cap S = \Big\{ x \mid x \in S, f(x) \leqslant c \Big\}$, 若 $\mu(H_c \cap S) = 0$, 则 c 为 S 上的全局极小值, $H_c \cap S$ 为 S 上的全局极小值点集•

证明 设 c 不是 S 上的全局极小值, 不妨设 $\hat{c}$ 是 S 上的全局极小值, 且令

$$c - \hat{c} = 2\eta > 0•$$

设 $K \cap S = \Big\{ x \mid x \in S, f(x) < c - \eta \Big\}$, 由于 $f(x)$ 是连续的及 $c - \eta > \hat{c}$, 故 $K \cap S$ 为非空且开的, 因此有

$$\varnothing \neq H_{\hat{c}} \cap S \subset K \cap S \subset H_c \cap S•$$

由测度性质可知:

$$\mu(H_c \cap S) \geqslant \mu(K \cap S) > 0,$$

此与已知条件矛盾, 故 c 为 S 上的全局极小值, $H_c \cap S$ 为全局极小值点集•

定理4 设 $f, g_i \in L_n$, $i = 1, 2, \cdots, r$, $\Big\{ \hat{c}_{k, l_k} \Big\}$ 是实现算法所产生的序列, $\Big\{ c_k \Big\}$ 为修正罚方法产生的序列, 若 $\lim\limits_{k \to \infty} c_k = c$, $\Big\{ \alpha_k \Big\}$ 单调上升且趋向于 ∞, 则

$$\hat{c}_{k, l_k} \to c \qquad (k \to \infty)• \tag{16}$$

证明 由定理1可知: 若 $\lim\limits_{k \to \infty} c_k = c$, 则 c 为 $f(x)$ 在 S 上的全局极小值• 由算法3可知, 序列 $\Big\{ \hat{c}_{k, l_k} \Big\}$ 为一单调有界序列, 故 $\lim\limits_{k \to \infty} \hat{c}_{k, l_k} = \hat{c}$•

下面用反证法证明: $\hat{c} = c$• 若 $\hat{c} \neq c$, 则令 $\hat{c} - c = 2\eta > 0$• 由此可知: 存在充分大的正整数 K, 当 $k \geqslant K$ 时

$$\hat{c}_{k, l_k} - c_k > \eta,$$

其中 $$\hat{c}_{k+1, l_{k+1}} = \frac{1}{l_{k+1}} \sum_{s=1}^{l_{k+1}} F_{\hat{c}_{k, l_k}}(P(s), \alpha_k)•$$

又由于

$$\int_{G_n} F_{\hat{c}_{k, l_k}}(x, \alpha_k) \, \mathrm{d}\mu = \int_{G_n \setminus H_{\hat{c}_{k, l_k}}} F_{\hat{c}_{k, l_k}}(x, \alpha_k) \, \mathrm{d}\mu + \int_{H_{\hat{c}_{k, l_k}} \setminus H_{c_k + \eta}} F_{\hat{c}_{k, l_k}}(x, \alpha_k) \, \mathrm{d}\mu + \int_{H_{c_k + \eta}} F_{\hat{c}_{k, l_k}}(x, \alpha_k) \, \mathrm{d}\mu \leqslant$$

$$\hat{c}_{k,l_k}(1-\mu(H_{\hat{c}_{k,l_k}}))+\hat{c}_{k,l_k}(\mu(H_{\hat{c}_{k,l_k}})-\mu(H_{c_k+\eta}))+(c_k+\eta)\mu(H_{c_k+\eta})=$$
$$\hat{c}_{k,l_k}-(\hat{c}_{k,l_k}-c_k-\eta)\mu(H_{c_k+\eta}),$$

故

$$\hat{c}_{k+1,l_{k+1}}+\int_{G_n}F_{\hat{c}_{k,l_k}}(x,\alpha_k)\mathrm{d}\mu-\frac{1}{l_{k+1}}\sum_{s=1}^{l_{k+1}}F_{\hat{c}_{k,l_k}}(P(s),\alpha_k)\leqslant$$
$$\hat{c}_{k,l_k}-(\hat{c}_{k,l_k}-c_k-\eta)\mu(H_{c_k+\eta}). \tag{17}$$

由定理假设 $f, g_i\in L_n$, $i=1,2,\cdots,r$, 于是对 $i=1,\cdots,r$,

$$|\max(g_i(x),0)-\max(g_i(y),0)|=$$
$$\left|\frac{g_i(x)+|g_i(x)|}{2}-\frac{g_i(y)+|g_i(y)|}{2}\right|\leqslant$$
$$\frac{|g_i(x)-g_i(y)|}{2}+\frac{||g_i(x)|-|g_i(y)||}{2}\leqslant$$
$$\frac{|g_i(x)-g_i(y)|}{2}+\frac{|g_i(x)-g_i(y)|}{2}=$$
$$|g_i(x)-g_i(y)|. \tag{18}$$

所以 $\max(g_i(x),0)\in L_n$. 从而对每个 α_k, $F(x,\alpha_k)=f(x)+\alpha_k p(x)\in L_n$. 再根据 $F_{\hat{c}_{k,l_k}}(x,\alpha_k)=\min(F(x,\alpha_k),\hat{c}_{k,l_k})$, 类似于(18)式可得 $F_{\hat{c}_{k,l_k}}(x,\alpha_k)\in L_n$. 这样, 对(17)式令 $k\to\infty$, 由文[4]的定理2.1, 定理2.2, 以及性质2和上述的讨论, 可知:

$$\hat{c}+0\leqslant\hat{c}-(\hat{c}-c-\eta)\mu(H_{c+\eta}\cap S),$$

即

$$-\frac{(\hat{c}-c)}{2}\mu(H_{c+\eta}\cap S)\geqslant 0.$$

由定理3可知: $\mu(H_{c+\eta}\cap S)>0$, 故与假设矛盾. 命题得证.

性质5 设 $b\geqslant a>0$, 则

$$a^2\leqslant(a-b)^2+b^2. \tag{19}$$

令

$$\sigma^2_{k,l_k}=\frac{1}{l_k}\sum_{s=1}^{l_k}(F_{\hat{c}_{k,l_k}}(P(s),\alpha_k)-\hat{c}_{k,l_k})^2. \tag{20}$$

则有

定理5 若 $\hat{c}_{k,l_k}\to c\ (k\to\infty)$, 则

$$\sigma^2_{k,l_k}\to 0\qquad(k\to\infty). \tag{21}$$

证明 由于

$$c\leqslant F_{\hat{c}_{k,l_k}}(P(s),\alpha_k)\leqslant\hat{c}_{k,l_k},$$

故

$$0\leqslant F_{\hat{c}_{k,l_k}}(P(s),\alpha_k)-c\leqslant\hat{c}_{k,l_k}-c.$$

由(20)及性质5可知

$$\sigma^2_{k,l_k}=\frac{1}{l_k}\sum_{s=1}^{l_k}(F_{\hat{c}_{k,l_k}}(P(s),\alpha_k)-\hat{c}_{k,l_k})^2\leqslant$$
$$\frac{1}{l_k}\left(\sum_{s=1}^{l_k}(F_{\hat{c}_{k,l_k}}(P(s),\alpha_k)-c)^2+\sum_{s=1}^{l_k}(\hat{c}_{k,l_k}-c)^2\right)\leqslant$$
$$2(\hat{c}_{k,l_k}-c)^2.$$

由已知条件可知:

$$\sigma^2_{k,l_k} \to 0 \qquad (k \to \infty)\cdot$$

故定理得证•

[参 考 文 献]

[1] ZHANG Lian_sheng. An approach to finding a global minimization with equality and inequality constraints [J]. Journal of Computational Mathematics, 1988, **6**(4): 375—382.

[2] 郑权, 蒋百川, 庄松林. 一个求总极值的方法[J]. 应用数学学报, 1978, **2**(1): 164—174.

[3] CHEW Soo_hong, ZHENG Quan. Integral Global Optimization [M]. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 298, Springer_Verlag, 1988.

[4] 邬冬华, 田蔚文, 张连生, 等. 一种修正的求总极值的积分_水平集方法的实现算法收敛性[J]. 应用数学学报, 2001, **24**(1): 100—110.

[5] 华罗庚, 王元. 数论在近似分析中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1978.

[6] 张连生, 田蔚文, 姚奕荣. 积分_水平集总极值算法的另一实现途径[J]. 运筹学杂志, 1996, **15**(1): 60—64.

[7] 邬冬华, 田蔚文, 黄伟. 求总极值的一个实现算法[J]. 上海大学学报(自然科学版), 1998, **4**(5): 482—486.

[8] 邬冬华, 田蔚文, 张连生. 一个求总极值的实现算法及其收敛性[J]. 运筹学学报, 1999, **3**(2): 82—89.

[9] WU Dong_hua, TIAN Wei_wen, ZHANG Lian_sheng. Optimality condition for solving global optimization[J]. Or Transactions, 2000, **4**(1): 33—42.

Modified Integral_Level Set Method for the Constrained Solving Global Optimization

TIAN Wei_wen[1], WU Dong_hua[1,2], ZHANG Lian_sheng[1], LI Shan_liang[3]

(1. Department of Mathematics, School of Science, Shanghai University, Shanghai 200436, P.R. China;

2. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P.R. China;

3. School of Management, Fudan University, Shanghai 200433, P.R. China)

Abstract: The constrained global optimization problem being considered, a modified integral_level set method was illustrated based on Chew_Zheng's paper on Integral Global Optimization and Wu's paper on Implementable Algorithm Convergence of Modified Integral_Level Set Method for Global Optimization Poblem. It has two characters: 1) each phase must construct a new function which has the same global optimal value as that of primitive objective function; 2) comparing it with Zheng's method, solving level set procedure is avoided. An implementable algorithm also is given and it is proved that this algorithm is convergent.

Key words: constrained global optimization; integral_level set; convergence