

用多复变量应力函数计算任意 多连通弹性平面问题

王林江 林佳铨

(南京航空学院)

(钱伟长推荐, 1991年7月25日收到)

摘 要

本文应用弹性力学的复变函数理论, 用多保角变换的方法, 导出了任意多连通无限大弹性板的多复变量应力函数表达式. 在边界上进行复Fourier级数展开, 用待定系数法确定应力函数的未知系数, 从而计算弹性板的应力场. 以含有任意多个任意位置椭圆孔的无限板为例, 编制了相应的多工况运行的FORTRAN77标准化程序, 进行了考题和算例分析, 给出了级数的收敛状况和孔边周向应力的分布图. 结果表明本方法对处理多连通无限大弹性平面问题行之有效.

关键词 孔板 应力分析

一、引 言

在过去的几个多世纪中, 许多学者对含孔板的应力集中进行了研究, 已取得了丰硕成果. 在现有的各种应力集中手册中^[1~4], 含孔板的应力集中是必不可少的重要组成部分. 然而在含有二个或二个以上孔的情况下, 大部分曲线是通过试验得来的, 只有少数几种特殊情况来自理论计算 (例如: 含有二个相同大小圆孔的无限板^[5]、含有二个不同大小圆孔的小无限板^[6]、含有一排无限多个相同大小均匀排列圆孔的无限板、含有一排无限多个相同大均匀排列椭圆孔的无限板^[11]). 在实际工程中常常遇到各种几何参数和各种载荷条件的多孔板, 有的情况在现有的手册中无对应情况可查, 因此对更为一般的含多孔板进行应力计算的理论研究, 并编制相应的计算程序是必要的. 本文研究含有任意多孔无限大弹性板的应力计算.

二、分 析 方 法

穆斯海里什维里首先用保角映射的方法解得了含有一个椭圆孔无限板应力场计算的精确解. 对于具有 K 个一定光滑性的内边界和一个外边界的一般多连体(图1(a)), 两个复应力函数的表达式为^[7]

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{k=1}^K A_k \ln(z-z_k) + \Phi^*(z) \\ \Psi(z) &= \sum_{k=1}^K B_k \ln(z-z_k) + \Psi^*(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

其中 $\Phi^*(z)$ 和 $\Psi^*(z)$ 为在该多连体中为单值的解析函数, Z_k 为边界 S_k 以内的任意一点,

$$A_k = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+Q)}$$

$$B_k = \frac{Q(X_k - iY_k)}{2\pi(1+Q)}$$

如果 $Q=3-4\mu$ 为平面应变, 而 $Q=(3-\mu)/(1+\mu)$ 为平面应力. μ 为板的泊松比, X_k 和 Y_k 是内边界 S_k 上 x 和 y 方向面力的主矢.

现我们把 $\Phi^*(z)$ 和 $\Psi^*(z)$ 分成如下 K 个分别在边界 S_k 之外为解析的单值函数之和

$$\left. \begin{aligned} \Phi^*(z) &= \sum_{k=1}^K \Phi_k^*(z) \\ \Psi^*(z) &= \sum_{k=1}^K \Psi_k^*(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

把 $\Phi_k^*(z)$ 和 $\Psi_k^*(z)$ 以 z_k 为中心在收敛内展开成 Laurent 级数得

$$\left. \begin{aligned} \Phi^*(z) &= \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{kn}(z-z_k)^n \\ \Psi^*(z) &= \sum_{k=1}^K \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_{kn}(z-z_k)^n \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

如果图1(a)中外边界上的每一点都趋于无限远(图1(b)), 设板的无限远处应力为有限值($\sigma_x=P_x$, $\sigma_y=P_y$, $\tau_{xy}=P_{xy}$), 则把(2.3)和(2.1)代入下列应力表达式

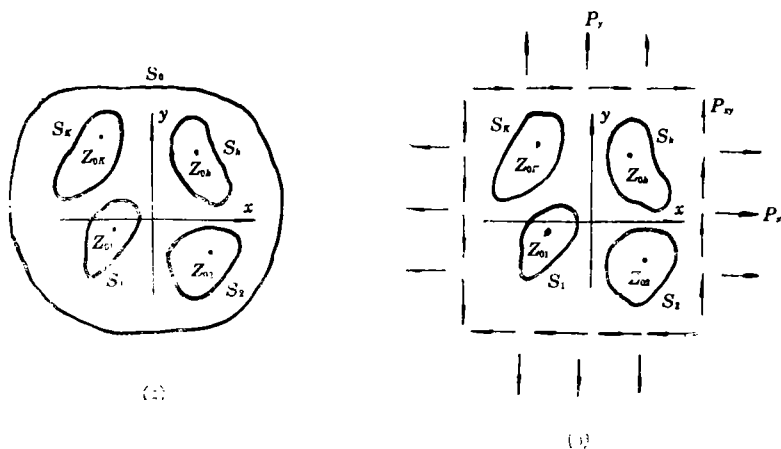


图 1 多连通域

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2[\Phi'(z) + \overline{\Phi'(z)}] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[z\Phi''(z) + \Psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

令 $z \rightarrow \infty$, 并略去对应力无影响的常数项 (下同) 可得

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= A_0 z + \sum_{k=1}^K \left[A_k \ln(z-z_k) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} (z-z_k)^{-n} \right] \\ \Psi(z) &= B_0 z + \sum_{k=1}^K \left[B_k \ln(z-z_k) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{kn} (z-z_k)^{-n} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{4} (P_x + P_y) \\ B_0 &= \frac{1}{2} (P_y - P_x + 2iP_{xy}) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

引进 K 个复变量 $\zeta_k (k=1, 2, 3, \dots, K)$, 函数

$$z - z_k = F_k(\zeta_k) = \sum_{n=1}^N e_{kn} \zeta_k^{-n} \quad (k=1, 2, \dots, K) \quad (2.7)$$

把 ζ_k 平面上的单位圆及其外部单叶地保角映射到 z 平面上的边界 S_k 及其外部, 而

$$\zeta_k = W_k(z - z_k) = \sum_{n=1}^N f_{kn} (z - z_k)^{-n} \quad (k=1, 2, \dots, K) \quad (2.8)$$

把 z 平面上的边界 S_k 及其外部单叶地保角映射到 ζ_k 平面上的单位圆及其外部。

把 (2.7) 式代入 (2.5) 式可求得如下的多复变量应力函数表达式

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= A_0 z + \sum_{k=1}^K \left[A_k \ln \zeta_k + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{km} \zeta_k^{-m} \right] \\ \Psi(z) &= B_0 z + \sum_{k=1}^K \left[B_k \ln \zeta_k + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{km} \zeta_k^{-m} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中 ϕ_{km} 和 ψ_{km} 为 Laurent 级数的未知系数。

板的应力边界条件的复变函数表达式为

$$[\Phi(z) + z\overline{\Phi'(z)} + \Psi'(z)]_s = \int (iX - Y) ds \quad (2.10)$$

其中 X 和 Y 分别为边界上 x 和 y 方向的面力分量。

令 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 满足 j 孔的边界条件, 把 (2.9) 式代入 (2.10) 式并进行移项整理得

$$\sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{\infty} [\phi_{km} \zeta_k^{-m} - \overline{\phi_{km} m z \zeta_k^{-m-1} W'_k} + \overline{\psi_{km} \zeta_k^{-m}}]_{sj} = f_j \quad (2.11)$$

其中

$$f_j = \int (iX - Y) ds - \left\{ 2A_0 z + \overline{B_0 z} + \sum_{k=1}^K [A_k \ln \zeta_k + z \overline{A_k W'_k / \zeta_k} + \overline{B_k \ln \zeta_k}] \right\} \quad (2.12)$$

在 j 孔边界上有 $\zeta_j = \sigma = \cos\theta + i\sin\theta$, 故从(2.7)(2.8)两式可得

$$z = \sum_{n=-1}^N e_{jn} \sigma^{-n} + z_j \quad (2.13)$$

$$\zeta_k = \sum_{i=-1}^N f_{ki} \left(\sum_{n=-1}^N e_{jn} \sigma^{-n} + z_j - z_k \right)^{-i} \quad (2.14)$$

$$W' = - \sum_{i=-1}^N i f_{ki} \left(\sum_{n=-1}^N e_{jn} \sigma^{-n} + z_j - z_k \right)^{-i-1} \quad (2.15)$$

把 ζ_k^{-m} , $mz\zeta_k^{-m-1}W'_k$, f_j 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成复Fourier级数得

$$\left. \begin{aligned} \zeta_k^{-m} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{jkmn} \sigma^n \\ mz\zeta_k^{-m-1}W'_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{jkmn} \sigma^n \\ f_j &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{jn} \sigma^n \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} C_{jkmn} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta_k^{-m} \exp[-n\theta i] d\theta \\ D_{jkmn} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} mz\zeta_k^{-m-1}W'_k \exp[-n\theta i] d\theta \\ a_{jn} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j \exp[-n\theta i] d\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

以上Fourier级数系数 C_{jkmn} , D_{jkmn} , a_{jn} 用手算是困难的, 我们借助电子计算机用数值积分的方法就可方便地求得。

把(2.16)式代入(2.11)式得

$$\sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\phi_{km} C_{jkmn} \sigma^n - \overline{\phi_{km}} D_{jkmn} \sigma^n + \overline{\psi_{km}} C_{jkmn} \sigma^{-n}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{jn} \sigma^n \quad (2.18)$$

对(2.18)式左右两边取共轭得

$$\sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\overline{\phi_{km}} C_{jkmn} \sigma^{-n} - \phi_{km} D_{jkmn} \sigma^{-n} + \psi_{km} C_{jkmn} \sigma^n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_{jn}} \sigma^{-n} \quad (2.19)$$

令 $j=1, 2, \dots, K$, 即 $\Phi(z)$ 和 $\Psi(z)$ 满足所有孔的边界条件, 则可得 K 对如式(2.18)和(2.19)的方程组。实际计算时 n 正负各取 M 项, m 也取 M 项, 由方程组两边 σ 同次幂前的系数相等可得如下由矩阵表示的复系数线性方程组

$$[A]\{R\}=\{a\} \quad (2.20)$$

其中 $[A]$ 为由 C_{jkmn} 和 D_{jkmn} 以及它们的共轭组成的 $4KM \times 4KM$ 阶方阵, $\{R\}$ 为由 ϕ_{km} 和 ψ_{km} 以及它们的共轭组成的 $4KM \times 1$ 阶列阵, $\{a\}$ 为由 a_{jn} 以及它的共轭组成的 $4KM \times 1$ 阶列阵。

解复系数线性方程组 (2.20) 就可确定未知系数 ϕ_{km} 和 ψ_{km} , 从而板内和边界上任一点的应力可由 (2.4) 式求得。

孔边的周向和法向正应力以及剪切应力由下列应力转换公式求得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\tau} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \sigma_N &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau_{\tau N} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

其中 α 为边界点的切向角。

上式中的 σ_N 和 $\tau_{\tau N}$ 应和已知的边界条件一致, 因此可用它们来检验结果的正确性。

对于位移边界条件可类似求解。

三、例 子

对于如图 2 所示的含有 K 个椭圆孔的无限板, 每个孔的大小、位置和孔边作用的载荷均为任意指定, 板的无限远处作用有 P_x , P_y 和 P_{xy} 。孔的参数方程为

$$z = a_k \cos \theta + ib_k \sin \theta + z_{0k} \quad (3.1)$$

其中 z_{0k} 表示 k 孔的中心位置, a_k 和 b_k 分别为 k 孔的两个半轴。

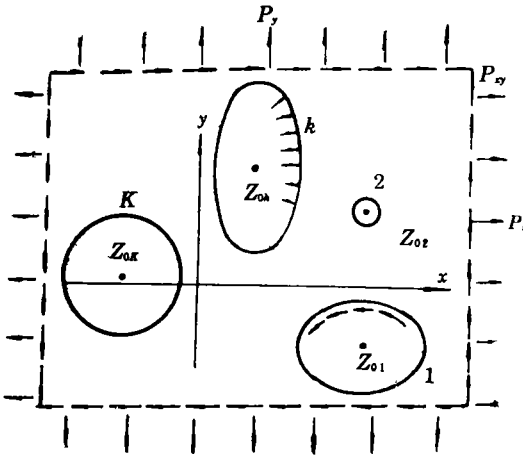


图 2 含有多个椭圆孔的无限板

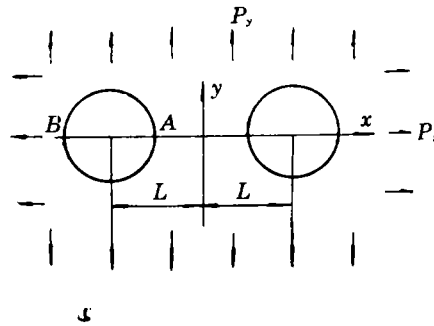


图 3 含有两个相同大小圆孔双向受拉的无限板

选 $z_k = z_{0k}$, 公式 (2.7) 和 (2.8) 的具体形式为:

$$z - z_{0k} = \frac{a_k + b_k}{2} \zeta_k + \frac{a_k - b_k}{2} \frac{1}{\zeta_k} \quad (3.)$$

$$\zeta_k = \frac{z - z_{0k} + \sqrt{(z - z_{0k})^2 - a_k^2 + b_k^2}}{a_k + b_k} \quad (3.3)$$

在 j 孔边界上有

$$z = a_j \cos \theta + i b_j \sin \theta + z_{0j} \quad (3.4)$$

令 $G_k = \sqrt{(a_j \cos \theta + i b_j \sin \theta + z_{0j} - z_{0k})^2 - a_k^2 + b_k^2}$

则 $\zeta_k = \frac{a_j \cos \theta + i b_j \sin \theta + z_{0j} - z_{0k} + G_k}{a_k + b_k}$ (3.5)

$$W'_k = \frac{a_j \cos \theta + i b_j \sin \theta + z_{0j} - z_{0k} + G_k}{(a_k + b_k) G_k} \quad (3.6)$$

把(3.4)~(3.6)式代入(2.12)和(2.17)式就可求得Fourier级数系数。

如果孔边仅受均布压力 P_{j0} 和逆时针方向的均布剪力 T_{j0} ，则 α_{jn} 有下列简单的表达式

$$\alpha_{jn} = \begin{cases} -\frac{1}{2} [(2A_0 + P_{j0} - iT_{j0})(a_j + b_j) + \bar{B}_0(a_j - b_j)] & (n=1) \\ -\frac{1}{2} [(2A_0 + P_{j0} - iT_{j0})(a_j - b_j) + \bar{B}_0(a_j + b_j)] & (n=-1) \\ 0 & (n > 1 \text{ 或 } n < -1) \end{cases} \quad (3.7)$$

对于以上方法我们编制了相应的 FORTRAN77 标准化程序，可方便地进行应力计算和参数变化研究，在 VAX 微机上进行了下列考题和算例分析。

例1 含有二个相同大小圆孔双向受拉的无限板(图3)，台湾学者林致平1948年用双极坐标的方法求得了封闭解^[6]。计算时取孔的半径 $r=1$ ， $P_x=P_y=1$ ，表1列出了孔边 A 、 B 两点周向应力在不同的孔距下随级数项数的收敛状况，从中可以看出孔距越大收敛速度越快。

表 1 A、B 两点周向应力在不同的孔距下随级数项数的收敛状况

L/r	M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	文[5]
1.5	σ_{TA}	2.637	2.495	2.636	2.763	2.835	2.868	2.881	2.886	2.887	2.887
	σ_{TB}	1.775	2.387	2.238	2.246	2.264	2.249	2.258	2.254	2.255	2.225
2.0	σ_{TA}	2.368	2.254	2.321	2.373	2.397	2.406	2.409	2.410	2.411	2.411
	σ_{TB}	1.810	2.230	2.151	2.155	2.160	2.157	2.158	2.158	2.158	2.158
3.0	σ_{TA}	2.206	2.110	2.133	2.148	2.153	2.154	2.154	2.155	2.155	2.155
	σ_{TB}	1.860	2.107	2.080	2.079	2.081	2.080	2.080	2.080	2.080	2.080
5.0	σ_{TA}	2.112	2.040	2.045	2.048	2.049	2.049	2.049	2.049	2.049	2.049
	σ_{TB}	1.909	2.040	2.033	2.033	2.033	2.033	2.033	2.033	2.033	2.033
8.0	σ_{TA}	2.067	2.016	2.017	2.018	2.018	2.018	2.018	2.018	2.018	2.018
	σ_{TB}	1.941	2.016	2.014	2.014	2.014	2.014	2.014	2.014	2.014	2.014
100	σ_{TA}	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000
	σ_{TB}	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000	2.000

例2 图4(a)为一椭圆孔($a=1$, $b=2$, $z_0=L$)附近有一左边受余弦分布载荷($P_N = \cos \theta$)的圆孔($r=1$, $z_0=0$)的无限板；取 $\mu=0.3333$ ， $M=30$ ，表2列出了在不同的 L 下两孔周向最大和最小应力的位置和大小，计算所得的边界应力和边界条件的误差不大于 10^{-3} ，从表中可以看出，在 $L=2$ 时两孔的最大应力基本相等， $L < 2$ 时最大应力在椭圆孔边上，而 $L > 2$ 最大

表 2 周向最大和最小应力随孔距的变化

L		2.2	2.5	3	4	5	6	8	10	∞
圆孔	σ_{\max}	4.637	2.139	1.189	0.812	0.716	0.674	0.640	0.627	0.614
	θ	37	49	59	83	86	87	87	87	87
	σ_{\min}	-1.357	-0.834	-0.234	-0.088	-0.067	-0.055	-0.045	-0.041	-0.036
	θ	0	0	0	180	180	180	180	180	180
椭圆孔	σ_{\max}	6.065	2.639	1.190	0.511	0.310	0.218	0.133	0.094	0.000
	θ	180	180	180	180	180	180	180	180	180
	σ_{\min}	-2.536	-1.181	-0.883	-0.656	-0.521	-0.430	-0.316	-0.248	0.000
	θ	155	142	107	102	99	97	95	94	

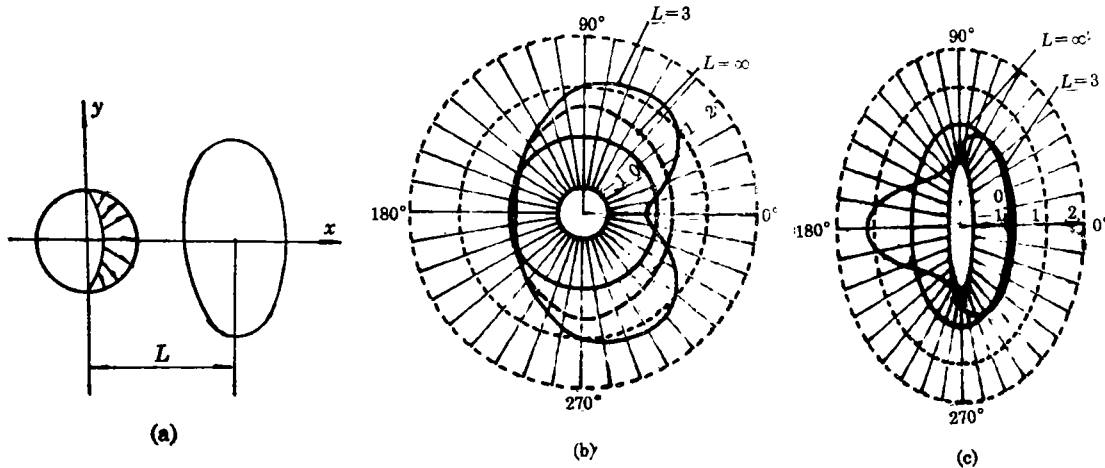


图 4 含二孔板和孔周应力分布

应力则位于圆孔边上, L 越小则相邻部分的应力变化越剧烈, 图4(b) 和图4(c) 给出了 $L=3$ 和 ∞ 时两孔的周向应力分布情况, 从中可以看出两者差异很大。

对于任意其它的多孔情况, 只要输入相应的材料参数, 几何参数和载荷参数就能方便地计算出板内和边界上任意点的应力。

参 考 文 献

- [1] 西田正孝, 《应力集中》(李安定等译), 机械工业出版社, 北京(1986).
- [2] Г. H. 萨文, B. И. 杜尔契, 《应力集中手册》(张正国译), 黑龙江科学技术出版(1983).
- [3] 黄炎, 《局部应力及其应用》, 机械工业出版社, 北京(1986).
- [4] 航空工业部科学技术委员会, 《应力集中系数手册》, 高等教育出版社, 北京(1990).
- [5] Lin Chih-Bing, On the Stresses in a plate containing two circular holes, *J. of Applied Physics*, 19, (1), (1948), 77—81.
- [6] Ukadgaonker, V. G., Stress analysis of a plate containing two circular holes having tangential stresses, *AIAA Journal*, 18, (1)(1980), 125—128.
- [7] 穆斯海里什维里, 《数学弹性力学的几个基本问题》(赵惠元译, 王柔怀校), 科学出版社, 北京(1958).
- [8] 徐芝纶, 《弹性力学》(第二版), 人民教育出版社, 北京(1978).
- [9] 杜庆华, 余寿文, 姚振汉, 《弹性理论》, 科学出版社, 北京(1986).
- [10] 樊大均, 《数学弹性力学》, 新时代出版社(1983).

The Calculation of the Multiply-Connected Elastic Plane Problems by Means of Stress Functions of Multiple Complex Variables

Wang Lin-jiang Lin Jia-keng

(Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing)

Abstract

On the basis of the mathematical elastic theory, the stress functions of multiple complex variables are derived in an infinite multiply-connected plate by using multiple conformal representations. The functions are developed in Fourier Series on unit circles, the unknown coefficients of the functions are determined by comparing coefficient method, then the stresses in the plate can be calculated. A plate containing multiple elliptical holes is discussed, the corresponding FORTRAN 77 program is finished. Two examples are given, they show that this method is very effective and convenient.

Key words holes, stress calculation, analytical method