应用数学和力学，第15卷 第7期（1994年7月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

复合材料层合板三维线性理论的完整性*

蒋 友 谅

（北京理工大学，1992年12月18日收到）

摘 要

本文针对文献[1]所述复合材料层合板三维模型，在三维线性弹性理论基本方程和经典变分原理的基础上，通过分块矩阵运算和线性Lagrange乘子法，推导出比文献[1]更全面更系统的基本方程和变分原理，使复合材料层合板三维线性理论臻于完整。

关键词 复合材料 层合板 三维线性弹性理论

一、引 言

文献[1]初步给出了复合材料层合板三维线性理论，为处理界面应力和应变的间断问题，提供了一种新的方法。但是，该文所给基本方程和变分原理，是直接或仅用加权残数法构造出来的，没有从理论的渊源上分析它们同已有的三维线性弹性理论的关系；没有从理论的应用上讨论所给变分原理的广义性和构造有限元模型的可能性。

其实，在三维线性弹性理论基本方程的基础上，可以通过分块矩阵运算，逐次消去某些变量，得到一系列含未消变量的基本方程，而文献[1]所给用全局基本变量表示的基本方程只是这一系列基本方程之一。同样，在三维线性弹性理论经典变分原理的基础上，也可以先通过分块矩阵运算，消去能量密度中的部分变量，得到含未消变量的变分原理，再用Lagrange乘子法解除某些约束条件，得到各种广义变分原理，而文献[1]所给“杂交能”变分原理，实际上只是一种含全局基本变量的不完全广义势能原理。

二、三维线性弹性理论基本方程的分块形式

若记

$$\mathbf{u}=[u\ \ v\ \ w]^T \tag{a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G=[\varepsilon_x\ \ \varepsilon_y\ \ \gamma_{xy}]^T \tag{b}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_G=[\sigma_z\ \ \tau_{xz}\ \ \tau_{yz}]^T \tag{c}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L=[\varepsilon_z\ \ \gamma_{xz}\ \ \gamma_{yz}]^T \tag{d}$$

---

* 樊大钧推荐。
国家自然科学基金资助课题。

$$\boldsymbol{\sigma}_L=[\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}]^T \tag{e}$$

则三维线性弹性理论矩阵方程的分块形式为

$$[\mathbf{L}_G^T\ \mathbf{L}_L^T]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_L\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}+\overline{\mathbf{F}}=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.1}$$

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\varepsilon}_L\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_G\\ \mathbf{L}_L\end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.2}$$

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_L\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2\\ \mathbf{D}_2^T & \mathbf{D}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\varepsilon}_L\end{Bmatrix} \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.3a}$$

或

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\varepsilon}_L\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2\\ \mathbf{S}_2^T & \mathbf{S}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_L\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix} \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.3b}$$

$$[\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_L\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}=\overline{\mathbf{p}} \qquad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \tag{2.4}$$

$$\mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}} \qquad (\text{在}S_u\text{上}) \tag{2.5}$$

其中

$$\mathbf{L}_G=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\end{bmatrix} \tag{f}$$

$$\mathbf{L}_L=\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \eta}\end{bmatrix} \tag{g}$$

$$\mathbf{D}_1=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & 0\\ \nu & 1-\nu & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{h}$$

$$\mathbf{D}_2=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}\nu & 0 & 0\\ \nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{i}$$

$$\mathbf{D}_3=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & 0 & 0\\ 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{j}$$

$$\mathbf{S}_1=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix} \tag{k}$$

$$\mathbf{S}_2=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}-\nu & 0 & 0\\ -\nu & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{S}_3=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2(1+\nu) & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix} \tag{l), (m}$$

$$\mathbf{n}_G=\begin{bmatrix}l & 0 & m\\ 0 & m & l\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{n}_L=\begin{bmatrix}0 & n & 0\\ 0 & 0 & n\\ n & l & m\end{bmatrix} \tag{n),(o}$$

三、层合板三维线性理论的基本方程

由于从（2.3a）或（2.3b）式可得

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_L\\ -\boldsymbol{\varepsilon}_L\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{C}_2^T & \mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix} \tag{3.1}$$

其中

$$\mathbf{C}_1=\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3^{-1}\mathbf{D}_2^T,\ 或\mathbf{S}_1^{-1} \tag{p), (q}$$

$$\mathbf{C}_2=\mathbf{D}_2\mathbf{D}_3^{-1},\ 或-\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_2 \tag{r), (s}$$

$$\mathbf{C}_3=-\mathbf{D}_3^{-1},\ 或\mathbf{S}_2^T\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{S}_2-\mathbf{S}_3 \tag{t), (u}$$

所以把（3.1）式的第一式代入（2.1）和（2.4）式消去$\boldsymbol{\sigma}_L$，把（2.2）式的第二式代入（3.1)式的第二式消去$\boldsymbol{\varepsilon}_L$，便得用全局连续变量表示的基本方程：

$$[\mathbf{L}_G^T\ \mathbf{L}_L^T]\left(\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_L\end{Bmatrix}\right)+\bar{\mathbf{F}}=0 \qquad (在V内) \tag{3.2}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{C}_2^T & -\mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_G\\ \mathbf{L}_L\end{bmatrix}\mathbf{u} \qquad (在V内) \tag{3.3}$$

$$[\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}=\bar{\mathbf{p}} \qquad (在S_\sigma上) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}},\quad (在S_u上) \tag{3.5}$$

如果把（3.3）式的第一式代入（3.3）式的第二式以及（3.2）和（3.4）式的第一式消去$\boldsymbol{\varepsilon}_G$，便得文献[1]所给用基本变量表示的基本方程：

$$[\mathbf{L}_G^T\ \mathbf{L}_L^T]\left(\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{L}_G\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}\right)+\bar{\mathbf{F}}=0 \qquad (在V内) \tag{3.6}$$

$$\mathbf{C}_2^T\mathbf{L}_G\mathbf{u}+\mathbf{C}_3\boldsymbol{\sigma}_G=-\mathbf{L}_L\mathbf{u} \qquad (在V内) \tag{3.7}$$

$$[\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{L}_G\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}=\bar{\mathbf{p}} \qquad (在S_\sigma上) \tag{3.8}$$

$$\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}},\quad (在S_u上) \tag{3.9}$$

四、层合板三维理论的经典变分原理

1. 最小势能原理

由于应变能密度的分块矩阵形式为

$$\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \boldsymbol{\varepsilon}_L^T]\begin{bmatrix}\mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2\\ \mathbf{D}_2^T & \mathbf{D}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\varepsilon}_L\end{Bmatrix} \tag{v}$$

而由（3.1）式的第二式可得

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\varepsilon}_L\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}-\mathbf{I} & 0\\ \mathbf{C}_2^T & \mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\varepsilon}_G\end{Bmatrix}$$

把它代入（v）式，并考虑到(p)、(r)和(t)式便得

$$\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\\ 0 & -\mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix} \tag{w}$$

所以在用全局连续变量表示的最小势能原理中，泛函为

$$\Pi_p=\int_V\left(\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\\ 0 & -\mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}-\overline{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right)dV-\int_{S_\sigma}\overline{\mathbf{p}}^T\mathbf{u}dS \tag{4.1}$$

约束条件为（3.3）和（3.5）式，Euler方程为（3.2）和（3.4）式。

2. 最小余能原理

由于可以证明消去σ_L的余应变能密度为

$$\frac{1}{2}\ \boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\\ 0 & -\mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix} \tag{x}$$

边界应力为

$$\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}=[\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix} \tag{y}$$

所以在用全局连续变量表示的最小余能原理中，泛函为

$$\begin{aligned}\Pi_c=&\int_V\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\\ 0 & -\mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}dV\\ &-\int_{S_u}\overline{\mathbf{u}}^T[\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}dS\end{aligned} \tag{4.2}$$

约束条件为（3.2）和（3.4）式，Euler方程为（3.3）和（3.5）式。

五、层合板三维理论的广义变分原理

1. 不完全广义势能原理

如果用Lagrange乘子法解除（3.3）式的第二式这些部分约束条件，即

$$\Pi_H=\Pi_p+\int_V \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{C}_2^T\boldsymbol{\varepsilon}_G+\mathbf{C}_3\boldsymbol{\sigma}_G+\mathbf{L}_L\mathbf{u})dV \tag{z}$$

那么可由驻值条件$\delta\Pi_H=0$直接解得

$$\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\sigma}_G \tag{A}$$

于是，把（A）式代入（z）式，并考虑到

$$\boldsymbol{\sigma}_G^T(\mathbf{C}_2^T\boldsymbol{\varepsilon}_G+\mathbf{C}_3\boldsymbol{\sigma}_G+\mathbf{L}_L\mathbf{u})=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}0 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{C}_2^T & 2\mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}+\boldsymbol{\sigma}_G^T\mathbf{L}_L\mathbf{u}$$

可知在不完全广义势能原理[2]中，泛函为

$$\Pi_L=\int_V\left(\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{C}_2^T & \mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}+\boldsymbol{\sigma}_G^T\mathbf{L}_L\mathbf{u}-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\right)dV-\int_{S_\sigma}\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{u}dS \tag{5.1}$$

约束条件为（3.3）式的第一式和（3.5）式，Euler方程为（3.3）式的第二式以及（3.2）和（3.4）式。这就是文献[1]所给的“杂交能”变分原理。

2. 完全广义势能原理

如果再用Lagrange乘子法解除（3.3）式的第一式和（3.5）式这些尚未解除的约束条件，即

$$\Pi_{Gp}=\Pi_L-\int_V\boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{\varepsilon}_G-\mathbf{L}_G\mathbf{u})dV-\int_{S_u}\boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS \tag{B}$$

那么可由驻值条件$\delta\Pi_{Gp}=0$，并考虑到Green公式

$$\int_V\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{L}_G\delta\mathbf{u}dV=-\int_V(\mathbf{L}_G^T\quad\boldsymbol{\lambda})^T\delta\mathbf{u}dV+\int_S(\mathbf{n}_G\quad\boldsymbol{\lambda})^T\delta\mathbf{u}dS \tag{C}$$

$$\int_V\boldsymbol{\sigma}_G^T\mathbf{L}_L\delta\mathbf{u}dV=-\int_V(\mathbf{L}_L^T\quad\boldsymbol{\sigma}_G)^T\delta\mathbf{u}dV+\int_S(\mathbf{n}_L\quad\boldsymbol{\sigma}_G)^T\delta\mathbf{u}dS \tag{D}$$

直接解得Lagrange乘子

$$\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{C}_1\boldsymbol{\varepsilon}_G+\mathbf{C}_2\boldsymbol{\sigma}_G \tag{E}$$

$$\boldsymbol{\mu}=\mathbf{n}_G(\mathbf{C}_1\boldsymbol{\varepsilon}_G+\mathbf{C}_2\boldsymbol{\sigma}_G)+\mathbf{n}_L\boldsymbol{\sigma}_G \tag{F}$$

于是，把（E）和（F）式代入（B）式，再考虑到

$$\begin{aligned}&(\mathbf{C}_1\boldsymbol{\varepsilon}_G+\mathbf{C}_2\boldsymbol{\sigma}_G)^T(\boldsymbol{\varepsilon}_G-\mathbf{L}_G\mathbf{u})\\&\quad=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}2\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{C}_2^T & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}-[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\\ \mathbf{C}_2^T & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{L}_G\\ \mathbf{L}_L\end{Bmatrix}\mathbf{u}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_G^T\mathbf{L}_L\mathbf{u}=[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{L}_G\\ \mathbf{L}_L\end{Bmatrix}\mathbf{u}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{n}_G(\mathbf{C}_1\boldsymbol{\varepsilon}_G+\mathbf{C}_2\boldsymbol{\sigma}_G)+\mathbf{n}_L\boldsymbol{\sigma}_G\\&\quad=[\mathbf{n}_G\ \ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

可知在完全广义势能原理[2]中，泛函为

$$\Pi_{Jp}=\int_V\left(\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\quad\boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}-\mathbf{C}_1 & 0\\ 0 & \mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}+[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\\ \mathbf{C}_2^T & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{L}_G\\ \mathbf{L}_L\end{bmatrix}\mathbf{u}\right.$$

$$-\bar{\mathbf{F}}^T\mathbf{u}\Big)dV-\int_{S_\sigma}\bar{\mathbf{p}}^T\mathbf{u}dS-\int_{S_u}(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})^T[\mathbf{n}_G\quad\mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}dS \tag{5.2}$$

Euler方程为(3.2)～(3.5)式.

3. 完全广义余能原理

为了在用Lagrange乘子法时由变分驻值条件直接解得其乘子，这里用逆代入法[8]使最小余能原理的泛函增加u这一变量，即

$$\Pi'_C=\int_V\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\\ 0 & -\mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}dV-\int_{S_u}\mathbf{u}^T[\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}dS \tag{G}$$

而约束条件增加 (3.5) 式，这样

$$\Pi_{GC}=\Pi'_C+\int_V\boldsymbol{\lambda}^T\Big\langle[\mathbf{L}_G^T\quad\mathbf{L}_L^T]\Big(\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}\Big)+\bar{\mathbf{F}}\Big\rangle dV$$

$$+\int_{S_\sigma}\boldsymbol{\mu}^T\Big([\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}-\bar{\mathbf{p}}\Big)dS+\int_{S_u}\boldsymbol{\nu}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dS \tag{H}$$

其中Lagrange乘子可由其驻值条件$\delta\Pi_{G_C}=0$直接解得

$$\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{u},\quad \boldsymbol{\mu}=-\mathbf{u} \tag{I),(J}$$

$$\boldsymbol{\nu}=[\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix} \tag{K}$$

于是，把(I)～(K)式代入 (H) 式，可知在完全广义余能原理[2]中，泛函为

$$\Pi_{JC}=\int_V\Big\langle\frac{1}{2}[\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\ \boldsymbol{\sigma}_G^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\\ 0 & -\mathbf{C}_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}$$

$$+\mathbf{u}^T\Big([\mathbf{L}_G^T\ \mathbf{L}_L^T]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}+\bar{\mathbf{F}}\Big\rangle dV$$

$$-\int_{S_\sigma}\mathbf{u}^T\Big([\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}-\bar{\mathbf{p}}\Big)dS$$

$$-\int_{S_u}\bar{\mathbf{u}}^T[\mathbf{n}_G\ \mathbf{n}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_G\\ \boldsymbol{\sigma}_G\end{Bmatrix}dS \tag{5.3}$$

Euler方程为(3.2)～(3.5)式.

六、层合板三维理论的广义杂交元模型

1. 几个假定和积分记号：

在单元内假定[4]

$$\mathbf{u}=\mathbf{N}\mathbf{q},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_G=\mathbf{P}_\varepsilon\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{\sigma}_G=\mathbf{P}_\sigma\boldsymbol{\beta} \tag{L),(M),(N}$$

其中q为单元节点位移，α和β为单元非节点参数；N、$\mathbf{P}_\varepsilon$和$\mathbf{P}_\sigma$为相应的插值函数。

为了统一进行分析，这里先规定几个积分记号

$$\mathbf{H}_{\varepsilon}=\int_{V}\mathbf{P}_{\varepsilon}^{T}\mathbf{C}_{1}\mathbf{P}_{\varepsilon}dV,\quad \mathbf{H}_{\sigma}=\int_{V}\mathbf{P}_{\sigma}^{T}\mathbf{C}_{3}\mathbf{P}_{\sigma}dV \tag{O), (P}$$

$$\mathbf{G}_{\varepsilon}=\int_{V}\mathbf{P}_{\varepsilon}^{T}\mathbf{C}_{1}(\mathbf{L}_{G}\mathbf{N})dV,\quad \mathbf{E}_{\varepsilon}=\int_{V}(\mathbf{L}_{G}^{T}\mathbf{C}_{1}\mathbf{P}_{\varepsilon})^{T}\mathbf{N}dV \tag{Q), (Q)'}$$

$$\mathbf{G}_{\sigma}=\int_{V}\mathbf{P}_{\sigma}^{T}\mathbf{C}_{2}^{T}(\mathbf{L}_{G}\mathbf{N})dV,\quad \mathbf{E}_{\sigma}=\int_{V}(\mathbf{L}_{G}^{T}\mathbf{C}_{2}\mathbf{P}_{\sigma})^{T}\mathbf{N}dV \tag{R), (R)'}$$

$$\mathbf{K}=\int_{V}(\mathbf{L}_{G}\ \mathbf{N})^{T}\mathbf{C}_{1}(\mathbf{L}_{G}\ \mathbf{N})dV \tag{S}$$

$$\mathbf{W}=\int_{V}\mathbf{P}_{\sigma}^{T}((\mathbf{L}_{L}\ \mathbf{N})dV,\ \mathbf{V}=\int_{V}(\mathbf{L}_{L}^{T}\ \ \mathbf{P}_{\sigma})^{T}\mathbf{N}dV \tag{T), (T)'}$$

2. 不完全广义势能杂交元

由于这里只推导单元应变/力向量和单元刚度矩阵，所以可不计边界项和载荷项.另外，为了使泛函只含 $\mathbf{u}$ 和 σ_G 这两类全局基本变量，可用直接代入法解除不完全广义势能原理中（3.3）式的第一式这些约束条件. 基于这两点考虑，我们把（5.1）式改变成便于推导的形式

$$\Pi_{L}=\int_{V}\Big[\frac{1}{2}(\mathbf{L}_{G}\ \mathbf{u})^{T}\mathbf{C}_{1}(\mathbf{L}_{G}\ \mathbf{u})+\sigma_{G}^{T}\mathbf{C}_{2}^{T}(\mathbf{L}_{G}\ \mathbf{u})$$
$$+\frac{1}{2}\sigma_{G}^{T}\mathbf{C}_{3}\sigma_{G}+\sigma_{G}^{T}\mathbf{L}_{L}\mathbf{u}\Big]dV \tag{6.1}$$

把（L）和（N）式代入（6.1）式，并考虑到（P）和(R)～(T)式可得

$$\Pi_{L}=\frac{1}{2}\mathbf{q}^{T}\mathbf{K}\mathbf{q}+\beta^{T}\mathbf{G}_{\sigma}\mathbf{q}+\frac{1}{2}\beta^{T}\mathbf{H}_{\sigma}\beta+\beta^{T}\mathbf{W}\mathbf{q} \tag{U}$$

由于可由$\partial\Pi_{L}/\partial\beta=0$得到

$$\beta=-\mathbf{H}_{\sigma}^{-1}(\mathbf{G}_{\sigma}+\mathbf{W})\mathbf{q} \tag{V}$$

所以把（V）式代入（N）式便得全局连续的单元应力向量

$$\sigma_{G}=-\mathbf{P}_{\sigma}\mathbf{H}_{\sigma}^{-1}(\mathbf{G}_{\sigma}+\mathbf{W})\mathbf{q} \tag{6.2}$$

把（V）式代入（U）式便得用节点位移表示的单元泛函

$$\Pi_{L}=\frac{1}{2}\mathbf{q}^{T}\mathbf{K}_{L}\mathbf{q} \tag{6.3}$$

其中单元刚度矩阵

$$\mathbf{K}_{L}=\mathbf{K}-(\mathbf{G}_{\sigma}+\mathbf{W})^{T}\mathbf{H}_{\sigma}^{-1}(\mathbf{G}_{\sigma}+\mathbf{W}) \tag{6.4}$$

3. 完全广义势能杂交元

同样略去边界项和载荷项，使（5.2）式变成方便的形式

$$\Pi_{J_{P}}=\int_{V}\Big[-\frac{1}{2}\varepsilon_{G}^{T}\mathbf{C}_{1}\varepsilon_{G}+\frac{1}{2}\sigma_{G}^{T}\mathbf{C}_{3}\sigma_{G}+\varepsilon_{G}^{T}\mathbf{C}_{1}(\mathbf{L}_{G}\mathbf{u})$$
$$+\sigma_{G}^{T}(\mathbf{C}_{2}^{T}\mathbf{L}_{G}\mathbf{u}+\mathbf{L}_{L}\mathbf{u})\Big]dV \tag{6.5}$$

把 (L) ～ (N) 式代入 (6.5) 式，并考虑到(O)～(R)和(T)式可得

$$\Pi_{J\gamma}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{H}_\varepsilon\boldsymbol{\alpha}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{H}_\sigma\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{G}_\varepsilon\mathbf{q}+\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{G}_\sigma+\mathbf{W})\mathbf{q} \tag{W}$$

由于可分别由$\partial\Pi_{J\gamma}/\partial\boldsymbol{\alpha}=0$和$\partial\Pi_{J\gamma}/\partial\boldsymbol{\beta}=0$得到

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}\mathbf{G}_\varepsilon\mathbf{q} \tag{X}$$

$$\boldsymbol{\beta}=-\mathbf{H}_\sigma^{-1}(\mathbf{G}_\sigma+\mathbf{W})\mathbf{q} \tag{Y}$$

所以分别把(X)和(Y)式代入(M)和 (N) 式，便得全局连续的单元应变向量和单元应力向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G=\mathbf{P}_\varepsilon\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}\mathbf{G}_\varepsilon\mathbf{q} \tag{6.6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_G=-\mathbf{P}_\sigma\mathbf{H}_\sigma^{-1}(\mathbf{G}_\sigma+\mathbf{W})\mathbf{q} \tag{6.7}$$

把(X)和(Y)式代入(W)式便得用节点位移表示的单元泛函

$$\Pi_{J\gamma}=\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}_{J\gamma}\mathbf{q} \tag{6.8}$$

其中单元刚度矩阵

$$\mathbf{K}_{J\gamma}=\mathbf{G}_\varepsilon^T\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}\mathbf{G}_\varepsilon-(\mathbf{G}_\sigma+\mathbf{W})^T\mathbf{H}_\sigma^{-1}(\mathbf{G}_\sigma+\mathbf{W}) \tag{6.9}$$

4. 完全广义余能杂交元

同样略去边界项和载荷项，使 (5.3) 式变成方便的形式

$$\Pi_{JG}=\int_V\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_G^T\mathbf{C}_1\boldsymbol{\varepsilon}_G-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_G^T\mathbf{C}_3\boldsymbol{\sigma}_G+\mathbf{u}^T[\mathbf{L}_G^T(\mathbf{C}_1\boldsymbol{\varepsilon}_G+\mathbf{C}_2\boldsymbol{\sigma}_G)+\mathbf{L}_L^T\boldsymbol{\sigma}_G]\right\}dV \tag{6.10}$$

把(L)～(N)式代入 (6.10) 式，并考虑到(O)、(P)、(Q)′、(R) 和(T)′式可得

$$\Pi_{JG}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{H}_\varepsilon\boldsymbol{\alpha}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{H}_\sigma\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{E}_\varepsilon\mathbf{q}+\boldsymbol{\beta}^T(\mathbf{E}_\sigma+\mathbf{V})\mathbf{q} \tag{Z}$$

由于可分别由$\partial\Pi_{JG}/\partial\boldsymbol{\alpha}=0$和$\partial\Pi_{JG}/\partial\boldsymbol{\beta}=0$得到

$$\boldsymbol{\alpha}=-\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}\mathbf{E}_\varepsilon\mathbf{q} \tag{a$'$}$$

$$\boldsymbol{\beta}=\mathbf{H}_\sigma^{-1}(\mathbf{E}_\sigma+\mathbf{V})\mathbf{q} \tag{b$'$}$$

所以分别把(a) 和(b) 式代入(M)和 (N) 式，便得全局连续的单元应变向量和单元应力向量

$$\boldsymbol{\varepsilon}_G=-\mathbf{P}_\varepsilon\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}\mathbf{E}_\varepsilon\mathbf{q} \tag{6.11}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_G=\mathbf{P}_\sigma\mathbf{H}_\sigma^{-1}(\mathbf{E}_\sigma+\mathbf{V})\mathbf{q} \tag{6.12}$$

把(a)′和(b)′式代入(Z)式便得用节点位移表示的单元泛函

$$\Pi_{JG}=\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}_{JG}\mathbf{q} \tag{6.13}$$

其中单元刚度矩阵

$$\mathbf{K}_{JG}=(\mathbf{E}_\sigma+\mathbf{V})^T\mathbf{H}_\sigma^{-1}(\mathbf{E}_\sigma+\mathbf{V})-\mathbf{E}_\varepsilon^T\mathbf{H}_\varepsilon^{-1}\mathbf{E}_\varepsilon \tag{6.14}$$

参 考 文 献

[1] 黄黔，杂交能变分原理及层合板三维理论的基础——分析复合材料层间应力的新方法，应用数学和力学，9(7)(1988)，599—608.
[2] 钱伟长，《变分法及有限元》（上册），科学出版社 (1980)，433—465.
[3] 蒋友谅，新的非线性广义变分原理的统一泛函，《现代数学和力学(MMM)-V》，中国矿业大学出版社 (1993)，59～65.
[4] 陈万吉，广义杂交元，力学学报，6(1981)，582—591.

On the Completeness for a 3-D Linear Theory of Composite Laminate

Jiang You-liang

(*Beijing Institute of Technology, Beijing*)

Abstract

In ref [1], a model of 3-D composite laminate theory was described. In the present paper, based on the basic equations about 3-D linear elasticity and classical variational principles, by the block matrix operation and the Lagrange's method of multipiers, a series of basic equations and variational principles are obtained, which are more complete and more systematic than that in ref[1].

Key words composite materials, composite laminate, 3-D linear-elasticity