应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Poincaré动力学方程Whittaker降阶法*

Q. K. 戈 里

（沙特阿拉伯King Fahd石油矿业大学数学系，1993年7月12日收到）

摘　要

Whittaker降阶法是利用能量积分将一个完整动力系统的Lagrange运动方程降阶。本文论述了据李群理论构造的Poincaré方程所描述的非完整保守系统的相应结果。

关键词　能量　完整系统　非完整系统　李群　Poincaré方程

一、引　　言

设某个非完整保守动力系统在任一时刻t的位形由n个独立坐标x_1，x_2，…，x_n确定。系统受有$n-k$个理想固定非完整约束，按照通常惯例的求和法，写为

$$A_{\alpha p}(x)\dot{x}_p=0 \qquad (p=1,2,\cdots,n;\ \alpha=k+1,\cdots,n) \tag{1.1}$$

如[2,3]中所讨论，考虑非完整系统的同时，我们考虑由除去全部非完整约束(1.1)而得到的连带完整系统。对于此连带完整系统，由关系式

$$\dot{x}_p=\xi^s_p(x)\eta_s \qquad (p,s=1,2,\cdots,n) \tag{1.2}$$

引入Poincaré参数η_1，η_2，…，η_n，并以虚位移参数$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$表示坐标$x_p$的变分$\delta x_p$：

$$\delta x_p=\xi^s_p(x)\omega_s \qquad (p,s=1,2,\cdots,n)$$

对于连带完整系统的实（虚）位移，函数$f(x,t)$的变分，为

$$df\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\eta_p X_p f\right]dt \qquad (\delta f=\omega_p X_p f) \tag{1.3}$$

算子

$$X_p=\xi^s_p(x)\frac{\partial}{\partial x_s} \qquad (p,s=1,2,\cdots,n)$$

构成构形空间上的局部变换群。换位子$[X_p,X_q]$满足关系式

$$[X_p,X_q]=C^r_{pq}X_r \qquad (p,q,r=1,2,\cdots,n) \tag{1.4}$$

并可定义C^r_{pq}，且C^r_{pq}具有反对称性质$C^r_{pq}=-C^r_{qp}$。

在非完整约束(1.1)情况下，算子X_p不构成闭系统。而(1.2)由η可用于约束(1.1)的参数化法。因此，方程(1.1)成为

---

* 钱伟长推荐。
本文原文为英文，由杨砚译为中文，吴承平校。

$$a_{\alpha p}(x)\eta_p=0 \qquad (p=1,2,\cdots n;\ \alpha=k+1,\cdots,n) \tag{1.5}$$

参数ω_p满足

$$a_{\alpha p}(x)\omega_p=0 \qquad (p=1,2,\cdots n;\ \alpha=k+1,\cdots,n) \tag{1.6}$$

最后，我们对在非完整约束(1.5)情况下的非完整保守系统，导出运动方程，并应用Whittaker法[6,7]研究它们的降阶问题。

二、运 动 方 程

对具有k个自由度的非完整系统，参数η_p由$n-k$个方程(1.5)联系。因此，可以用k个独立参数$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$来表示

$$\eta_p=b_{pi}(x)\theta_i \qquad (p=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,k) \tag{2.1}$$

类似地，ω可以用独立参数$\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_k$来表示

$$\omega_p=b_{pi}(x)\Omega_i \tag{2.2}$$

为了得到运动方程，我们给出动力学的基本方程[2]

$$\left(\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L_0}{\partial\eta_p}-C^r_{qp}\eta_q\ \frac{\partial L_0}{\partial\eta_r}-X_pL_0\right)\omega_p=0 \qquad (p,q,r=1,2,\cdots,n)$$

其中，$L_0(x,\eta)$为连带完整系统的Lagrange函数。将(2.2)代入上式，鉴于参数Ω_i的独立性，导出Poincaré运动方程

$$b_{pi}\left(\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L_0}{\partial\eta_p}-C^r_{qp}\eta_q\ \frac{\partial L_0}{\partial\eta_r}-X_pL_0\right)=0$$

$$(p,q,r=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,k) \tag{2.3}$$

由(2.1)，当用θ_i取代η_p时，我们用L表示由L_0所得到的函数。即

$$L(x_p,\theta_i)=L_0(x_p,\eta_p).$$

根据(1.3)我们得到关系式

$$X_pL=X_pL_0+\frac{\partial L_0}{\partial\eta_q}\theta_jX_p(b_{qj}),$$

$$b_{pi}X_pL_0=b_{pi}X_pL-\frac{\partial L_0}{\partial\eta_q}\theta_jb_{pi}X_p(b_{qj}),$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta_i}=\frac{\partial L_0}{\partial\eta_p}b_{pi},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial\eta_p}\right)b_{pi}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\theta_i}\right)-\frac{\partial L_0}{\partial\eta_p}\theta_jb_{qj}X_q(b_{pi})$$

$$(p,q=1,2,\cdots,n;\ i,j=1,2,\cdots,k).$$

将这些关系式代入(2.3)，并定义

$$Y_i=b_{pi}X_p,$$

$$K^p_{ji}=Y_i(b_{pj})-Y_j(b_{pi})-C^p_{qr}b_{qj}b_{ri}$$

从而得出方程

$$\frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial\theta_i}-Y_iL+K^q_{ji}\theta_j\ \frac{\partial L_0}{\partial\eta_p}=0 \qquad (p=1,2,\cdots,n;\ i,j=1,2,\cdots,k) \tag{2.4}$$

上式即为在约束(2.1)情况下，由独立参数θ_1，$\theta_2,\cdots,\theta_k$表示的非完整系统的Poincaré方程。

三、广义能量积分

为了证明方程(2.3)具有广义能量积分

$$\frac{\partial L_0}{\partial \eta_p}\eta_p-L_0=h=\text{const}\quad (p=1,2,\cdots,n) \tag{3.1}$$

按照(1.3)对$L_0(x_p,\eta_p)$微分，并利用(2.1)和(2.3)，有

$$\begin{aligned}\frac{dL_0}{dt}&=\frac{\partial L_0}{\partial \eta_p}\dot{\eta}_p+\eta_p X_p L_0\qquad (p=1,2,\cdots,n)\\ &=\frac{\partial L_0}{\partial \eta_p}\dot{\eta}_p+\theta_i b_{pi}X_p L_0\qquad (i=1,2,\cdots,k)\\ &=\frac{\partial L_0}{\partial \eta_p}\dot{\eta}_p+\theta_i b_{pi}\left(\frac{d}{dt}\quad\frac{\partial L_0}{\partial \eta_p}-C^r_{qp}\eta_q\ \frac{\partial L_0}{\partial \eta_r}\right)\qquad (p,q,r=1,2,\cdots,n)\\ &=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \eta_p}\eta_p\right),\end{aligned}$$

借助关系式$C^r_{qp}=-C^r_{pq}$，和$\theta_i b_{pi}C^r_{qp}\eta_q=C^r_{qp}\eta_p\eta_q$为零，进行积分，得到(3.1)。

用类似的方法，我们又可证明方程(2.4)具有广义能量积分

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i}\theta_i-L=\text{const}\qquad (i=1,2,\cdots,k) \tag{3.2}$$

四、Whittaker 降阶法

现在，我们讨论利用广义能量积分(3.1)将方程(2.3)以及(2.4)降阶的Whittaker法[7]的适用性问题。

假设参数集η_1，$\eta_2,\cdots,\eta_n$中，至少有一个广义速度$\dot{x}$。同样参数集$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$中，也至少有一个广义速度，即$\dot{x}_1=\eta_1=\theta_1$。并且对应的算子$X_1$不在换位子$(X_p,X_\alpha)$中，因而$C^1_{p\alpha}=0(p=1,2,\cdots,n;\ \alpha=2,3,\cdots,n)$。在这些条件下，我们证明不仅可以对Poincaré方程系统降阶，而且还可以保持方程的形式。

注意到$b_{1\mu}=0(\mu=2,3,\cdots,n)$，并去掉(2.3)的第一个方程，则方程(2.3)变为

$$b_{\alpha\mu}\left(\frac{d}{dt}\quad\frac{\partial L_0}{\partial \eta_\alpha}-X_\alpha L_0-C^\beta_{q\alpha}\eta_q\frac{\partial L_0}{\partial \eta_\beta}\right)=0$$
$$(q=1,2,\cdots,n;\ \alpha,\beta=2,3,\cdots,n;\ \mu=2,3,\cdots,k) \tag{4.1}$$

引入新参数

$$\eta'_\alpha=\frac{\eta_\alpha}{\eta_1},\ \theta'_\mu=\frac{\theta_\mu}{\eta_1}\qquad (\alpha=2,3,\cdots,n;\ \mu=2,3,\cdots,k) \tag{4.2}$$

于是，由(2.1)得

$$\eta'_\alpha=b_{\alpha i}\theta'_i\quad (\eta'_1=\theta'_1=1),\qquad (i=1,2,\cdots,k) \tag{4.3}$$

在函数L_0中，用$\eta_1\eta'_\alpha$替换η_α，并用$K(x_p,\eta_1,\eta'_\alpha)$表示代换所产生的函数。于是由方程$L_0(x_p,\eta_p)=K(x_p,\eta_1,\eta'_\alpha)$有

$$\frac{\partial L_0}{\partial \eta_1}=\frac{\partial K}{\partial \eta_1}-\frac{\eta_\alpha}{\eta_1^2}\frac{\partial K}{\partial \eta'_\alpha},\qquad \frac{\partial L_0}{\partial \eta_\alpha}=\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial K}{\partial \eta'_\alpha},$$
$$X_pL_0=X_pK\qquad (p=1,2,\cdots,n;\ \alpha=2,3,\cdots,n)\tag{4.4}$$

由关系式(4.4)的前两个方程得出

$$\frac{\partial K}{\partial \eta_1}=\frac{\partial L_0}{\partial \eta_1}+\frac{\eta_\alpha}{\eta_1}\frac{\partial L_0}{\partial \eta_\alpha}=\frac{\eta_p}{\eta_1}\frac{\partial L_0}{\partial \eta_p}\qquad (p=1,2,\cdots,n;\ \alpha=2,3,\cdots,n)\tag{4.5}$$

在能量积分(3.1)中，我们用$\eta_1\eta'_\alpha$替换η_α，则由该方程又可得出x_p和η'_α的函数η_1

$$\eta_1=f(x_p,\eta'_\alpha)\tag{4.6}$$

将(4.6)代入(4.5)，并用L'_0表示由此而得的$\dfrac{\partial K}{\partial \eta_1}$的表达式

$$L'_0(x_p,\eta'_\alpha)=\frac{\partial K}{\partial \eta_1}=\frac{\eta_p}{\eta_1}\frac{\partial L_0}{\partial \eta_p}\tag{4.7}$$

由上式，能量积分(3.1)可写成

$$\dot{\eta}_1\frac{\partial K}{\partial \eta_1}-K=h$$

有

$$\frac{\partial K}{\partial \eta'_\alpha}=\eta_1\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\alpha},\qquad X_pK=\eta_1X_pL'_0\tag{4.8}$$

由(4.4)和(4.8)，得

$$\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\alpha}=\frac{\partial L_0}{\partial \eta_\alpha},\qquad X_pL'_0=\frac{1}{\eta_1}X_pL_0$$

将上述关系式代入Poincaré方程(4.1)，得到

$$b_{\alpha\mu}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\alpha}-\eta_1X_\alpha L'_0-C^\beta_{q\alpha}\eta_1\eta'_q\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\beta}\right)=0\tag{4.9}$$

用$\eta_1=\dot{x}_1$除上式两端，得到

$$b_{\alpha\mu}\left(\frac{d}{dx_1}\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\alpha}-X_\alpha L'_0-C^\beta_{q\alpha}\eta'_q\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\beta}\right)=0$$
$$(q=1,2,\cdots,n;\ \alpha,\beta=2,3,\cdots,n;\ \mu=2,3,\cdots,k)\tag{4.10}$$

根据(4.3)，在函数L'_0中，用θ'_μ替换η'_α，并用L'表示由此而得的函数。鉴于(1.3)和(4.3)，则方程

$$L'(x_p,\theta'_\mu)=L'_0(x_p,\ \eta'_\alpha)$$

给出关系式

$$X_\alpha L'=X_\alpha L'_0+\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\beta}\theta'_i X_\alpha(b_{\beta i})$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \theta'_\mu}=\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\alpha}b_{\alpha\mu},\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \theta'_\mu}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\alpha}\right)b_{\alpha\mu}+\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\alpha}\eta_1 b_{qi}\theta'_i X_q(b_{\alpha\mu})$$

将以上关系式代入(4.9)，该方程又变换为以下形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \theta'_\mu}-\eta_1Y_\mu L'+K^i_{\beta\mu}\eta_1\theta'_i\frac{\partial L'_0}{\partial \eta'_\beta}=0$$

取$\eta_1=\dot{x}_1$，上式可写成

$$\frac{d}{dx_1}\frac{\partial L'}{\partial\theta'_\mu}-Y_\mu L'+K^\beta_{i\mu}\theta'_i\frac{\partial L'_0}{\partial\eta'_\beta}=0$$

$$(i=1,2,\cdots,k;\ \mu=2,3,\cdots,k;\ \beta=2,3,\cdots,n) \qquad (4.11)$$

方程(4.11)与(4.3)一起，构成关于$\eta'_2,\eta'_3,\cdots,\eta'_n$和$\theta'_2,\theta'_3,\cdots,\theta'_k$的$n+k-2$个方 程的方程组。方程(4.10)和(4.11)分别称为Poincaré方程(2.3)和(2.4)的Whittaker形式。

如果我们取$\eta_p=\dot{x}_p(p=1,2,\cdots,n)$，那么$X_p$变为$\partial/\partial x_p$，并且所有的$C^r_{iq}$为零。于是方程(2.3)和 (2.4) 与 Maggi 方程[4]一致，且方程 (4.10) 和(4.11) 成为由Šalaev[6]所给出的Whittaker方程。如果我们限定η_p为拟速率$\dot{\pi}_p$，那么X_p成为$\frac{\partial}{\partial\pi_p}$，$C^r_{pq}$简化为Boltzmann三指标形式$\gamma_{prq}$，我们重又获得Diukic在[1]中所给的非完整系统的Whittaker方程。

五、实　　例

作为Whittaker法的实例，我们研究Chaplygin雪撬在水平面上的运动。通过此实例说明应用本文方法的优点和怎样选择好一组合适的Poincaré参数。

设x，y为滑撬在水平面上的坐标，ϕ为滑撬的旋转角，a,b为固定在滑撬上坐标系中滑撬质量中心的坐标，k为旋转半径。假设物体具有单位质量。则约束方程为

$$\dot{y}-\dot{x}\tan\theta=0$$

取

$$x_1=\phi,\ x_2=x,\ x_3=y;\ \eta_1=\dot{\phi},\ \eta_2=\dot{x},\ \eta_3=\dot{y}$$

有

$$X_1=\frac{\partial}{\partial\phi},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial y}$$

因而所有的$C^r_{pq}=0(p,q,r=1,2,3)$，且约束方程成为

$$\eta_3-\eta_2\tan\phi=0$$

由以下关系式

$$\eta_1=\theta_1=\dot{\phi},\ \eta_2=\theta_2\cos\phi,\ \eta_3=\theta_2\sin\phi \qquad (5.1)$$

引入Poincaré独立参数θ_1，θ_2，有$b_{11}=1$，$b_{22}=\cos\phi$，$b_{32}=\sin\phi$，$b_{12}=b_{21}=b_{31}=0$。

物体的动能T_0由下式给出

$$2T_0=2K=[\eta^2_2-\dot{\phi}(a\sin\phi+b\cos\phi)]^2$$
$$+[\eta^2_3-\dot{\phi}(a\cos\phi-b\sin\phi)]^2+k^2\dot{\phi}^2$$

由于$L_0=T_0$，故能量积分是

$$T_0=h=\text{const} \qquad (5.2)$$

令

$$\eta'_2=\frac{\eta_2}{\dot{\phi}},\quad \eta'_3=\frac{\eta_3}{\dot{\phi}},\ \theta'_2=\frac{\theta_2}{\dot{\phi}} \qquad (5.3)$$

由方程(5.1)得

$$\eta'_2=\theta'_2\cos\theta,\ \eta'_3=\theta'_2\sin\phi \qquad (5.4)$$

并且T_0的表达式成为

$$2T_0=\dot{\phi}^2[\eta'^2_2-2\eta'_2(a\sin\phi+b\cos\phi)+\eta'^2_3+2\eta'_3(a\cos\phi-b\sin\phi)+\delta^2] \qquad (5.5)$$

其中，$\delta^2=a^2+b^2+k^2$。由(5.2)和(5.5)，有

$$\delta^2=\sqrt{2h}[\eta'^2_2-2\eta'_2(a\sin\phi+b\cos\phi)+\eta'^2_3$$
$$+2\eta'_3(a\cos\phi-b\sin\phi)+\delta^2]^{-1/2} \qquad (5.6)$$

函数T'_0和T'为

$$T'_0=\{2h[\eta'^2_2-2\eta'_2(a\sin\phi+b\cos\phi)+\eta'^2_3+2\eta'_3(a\cos\phi-b\sin\phi)+\delta^2]\}^{1/2}$$

$$T'=\{2h(\theta'^2_2-2b\theta'_2+\delta^2)\}^{1/2}$$

在方程(4.11)中，代换T'_0和T'，并记

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial\phi},\ Y_2=\cos\phi\ \frac{\partial}{\partial x}+\sin\phi\ \frac{\partial}{\partial y},$$

$$K^1_{12}=\sin\phi,\ K^2_{12}=-\cos\phi,\ K^2_{12}=K^3_{12}=0$$

我们得到一个方程，经简化为

$$\frac{d\theta'_2}{\theta'^2_2-2b\theta'_2+\delta^2}=\frac{ad\phi}{a^2+k^2}$$

对上式积分，有

$$\theta'_2=b+\sqrt{a^2+k^2}\tan\frac{a\phi+c}{\sqrt{a^2+k^2}} \tag{5.7}$$

C是任意常数。利用θ'_2，由(5.3)和(5.4)可得到η_2和η_3。η_2，η_3均为ϕ的函数。接下来，又可得出ϕ的函数$\dot{x}$和$\dot{y}$。对$\dot{x}$和$\dot{y}$积分，得

$$x=b\sin\theta+\sqrt{a^2+k^2}\int\cos\phi\tan\frac{a\phi+c}{\sqrt{a^2+k^2}}d\phi$$

$$y=-b\cos\phi+\sqrt{a^2+k^2}\int\sin\phi\tan\frac{a\phi+c}{\sqrt{a^2+k^2}}d\phi$$

考虑到(5.4)和(5.7)，(5.6)式右边是ϕ的函数，积分后得

$$t=\frac{1}{\sqrt{2h}}\ \frac{a^2+k^2}{a}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a\phi+c}{2\sqrt{a^2+k^2}}\right)+d$$

$d=\text{const}$

我们所讨论问题的解式与[4]中由Chaplygin降阶定理及Hamilton-Jacob法所获解式一致。

参 考 文 献

[1] Djukic, D. S., Whittaker's equations of nonholonomic mechanical systems, *Atti Accad Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 56(8)(1974), 55—61.

[2] Ghori, Q. K. and M. Hussain, Poincaré's equations of nonholonomic dynamical systems, *Z. Angew. Math. Mech.*, 53(1973), 391—396.

[3] Guen, Fam, On the equations of motion of a nonholonomic mechanical system in Poincaré-Chetaev variables, *J. Appl. Math. Mech.*, 31(1967), 274—281.

[4] Neimark, Ju. I. and N. A. Fufaev, Dynamics of nonholonomic systems, *Transl. Math. Monographs*, 33(1972).

[5] Pars, L. A., *A Treatise on Analytical Dynamics*, Ox Bow Press, Connecticut (1979).

[6] Šalaev, V. G., On the applicability of Whittaker's method to the dynamical equations of Maggi, *Naucn. Trudy Taškent. Gos. Univ.*, (222)(1963), 73—78.

[7] Whittaker, E. T., *A Treatise on Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, 4th Edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge(1937).

Whittaker's Reduction Method for Poincaré's Dynamical Equations

Q. K. Ghori

(Department of Mathematical Sciences, King Fahd University of Petroleum and Minerals Dhahran, Saudi Arabia)

Abstract

Whittaker's reduction method invokes the energy integral to reduce the order of Lagrange's equations of motion of a holonomic dynamical system. This paper treats the corresponding result for a nonholonomic conservative system described by Poincaré's equations which are constructed from the standpoint of the theory of Lie groups.

Key words energy, holonomic, nonholonomic, Lie group, Poincaré equations