

抛物线模拔速度场的曲线积分问题

赵德文 刘相华 王国栋

(东北大学)

李桂范

(辽宁大学)

摘 要

文章采用 von Karman 基本假设对模面函数为抛物线 (又称喇叭模) 的拔制问题设定了运动许可速度场, 并经曲线积分与变上限积分得到拔制力的上界解析解。

关键词 抛物线模 拉拔 曲线积分 解析解

一、引 言

对模面函数为直线的楔形模拔制问题, 作者曾在 [1], [2] 中给出连续速度场的相应解析方法。对喇叭模, 因模面函数为抛物线, 速度场的积分会增加更多困难, 目前尚未见连续速度场获得解析解的报道。传统方法是抛物线简化成直线即“以弦代弧”处理。本文主要工作是对上述问题用直角坐标系连续速度场经曲线积分与变上限积分两种手段得到抛物线模拔的上界解析解, 积分中对模面函数将不进行“以弦代弧”简化。

二、模面方程的建立

以抛物线模面进行平面变形拔制如图1。图中弧 \widehat{AB} 为抛物线。采用著名的 von 卡尔曼平面假设, 即假定长, 宽, 高为主方向, 拉拔应力沿断面高向、横向均布, 则图中出口截面高度 $BB' = h$, 出口已知拔制速度为 v_h , 出口秒流量 (单位宽度) 为 $v_h \cdot h = C$, 出口均布拔制应力为 σ_f , 入口截面高度 $AA' = H$, 入口速度为 v_H , 设变形区内距出口截面为 x 处的截面高度为 h_x , 该截面水平速度为 v_x , 按秒流量相等法则有

$$v_h \cdot h = v_x h_x = v_H H = C \quad (2.1)$$

(2.1) 式中 C 为单位宽度秒流量, 在变形内部 C 与 x 无关。

取 y 向为变形区高度方向, x 轴为变形区水平对称轴, z 方向为变形区宽度 (垂直纸面) 即不变方向; 则变形区内任一截面 h_x 的方程为

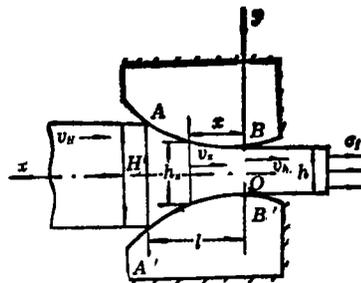


图1 抛物线模拔制

* 钱伟长推荐, 1993年6月7日收到。

$$h_s = h + \frac{\Delta h}{l^2} x^2 \quad (2.2)$$

(2.2) 式即模面 AB 的方程, 式中 $\Delta h = H - h$, 为绝对变形量; l 为变形区接触面 AB 在水平方向的投影. 参照图1, 将 $x=0$ 代入 (2.2), 得 $h_s = h$; 将 $x=l$ 代入 (2.2) 得 $h_s = h + \frac{\Delta h}{l^2} l^2 = h + \Delta h = h + H - h = H$, 可见 (2.2) 满足出、入口高度的已知条件. 若令 $y = \frac{h_s}{2}$, 由高等数学可知, 方程 (2.2) 为抛物线方程.

三、速度场的建立

由 (2.1) 式并将 (2.2) 式代入 (2.1) 得

$$v_x = \frac{C}{h_s} = \frac{C}{h + \frac{\Delta h}{l^2} x^2} = \frac{l^2 C}{l^2 h + \Delta h x^2} \quad (3.1)$$

由柯西方程 (又称几何方程), $\dot{\epsilon}_x = -\frac{\partial v_x}{\partial x}$ (图1中 v_x 增量方向与 x 轴正向相反, 此处求导需加“ $-$ ”号), 由 (3.1) 并注意到平面变形

$$\dot{\epsilon}_x = -\dot{\epsilon}_y = -\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{2l^2 C \Delta h \cdot x}{(l^2 h + \Delta h x^2)^2} \quad (3.2)$$

注意到卡尔曼基本假设, 其它 $\dot{\epsilon}_j = 0$.

由柯西方程并将 (3.2) 代入下式

$$v_y = \int \dot{\epsilon}_y dy = \int -\frac{2l^2 C \Delta h x}{(l^2 h + \Delta h x^2)^2} dy$$

上式积分得:

$$\left. \begin{aligned} v_y &= -\frac{2l^2 C \Delta h x y}{(l^2 h + \Delta h x^2)^2} \\ \dot{v}_x &= \frac{l^2 C}{l^2 h + \Delta h x^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

将 $x=0$ 代入 (3.3) 的第二式, 得 $v_x = \frac{C}{h} = v_h$; 将 $x=l$ 代入 (3.3) 的第二式得 $v_x =$

$\frac{l^2 C}{l^2 h + \Delta h l^2} = \frac{C}{h + \Delta h} = \frac{C}{H} = v_H$; 将 $y=0$ 代入 (3.3) 的第一式, 得 $v_y = 0$; 注意到 (3.2)

式满足 $\dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z = 0$, 故 (3.2)、(3.3) 为运动许可应变速度场与速度场.

四、变形力计算公式的推导

由 [3], 单位宽度塑性变形功率为

$$\begin{aligned} \dot{W}_i &= 2k \int_v \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dv = 2k \int_v \dot{\epsilon}_x dx dy \\ &= 4k \int_0^{\frac{h_s}{2}} \int_0^l \frac{2l^2 C \Delta h x}{(l^2 h + \Delta h x^2)^2} dx dy \end{aligned}$$

$$= 4k \int_0^l \frac{2l^2 C \Delta h x}{(l^2 h + \Delta h x^2)^2} dx \int_0^{\frac{h_x}{2}} dy$$

注意到 (2.2) 式, 上述积分上限 h_x 仍为 x 的函数, 故为变上限积分问题, 将 (2.2) 代入上式并整理,

$$\begin{aligned} W_s &= 4k \int_0^l \frac{C \Delta h x}{l^2 h + \Delta h x^2} dx \\ &= 2kC \int_0^l \frac{d(l^2 h + \Delta h x^2)}{l^2 h + \Delta h x^2} \\ &= 2kC \cdot \ln(l^2 h + \Delta h x^2) \Big|_0^l \\ &= 2kC \cdot \ln \frac{l^2 h + \Delta h l^2}{l^2 h} \\ &= 2kC \ln \left(1 + \frac{\Delta h}{h} \right) \\ &= 2kC \ln \left(1 + \frac{H-h}{h} \right) \\ &= 2kC \ln \frac{H}{h} \end{aligned} \quad (4.1)$$

(4.1) 为抛物线模拔制时单位宽度变形区内部的塑性变形功率, $\frac{H}{h}$ 称为延伸系数。

由 (3.3) 式, 当 $x=0$ 时, $v_x=0$, 这说明沿出口截面 BB' 切向 (y 方向) 不消耗剪切功率。但当 $x=l$ 时,

$$v_x = -\frac{2l^2 C \Delta h l y}{(l^2 h + \Delta h l^2)^2} = \frac{-2C \Delta h y}{l(h + \Delta h)^2} = \frac{-2C \Delta h y}{lH^2} \quad (4.2)$$

(4.2) 式表明在入口截面 AA' , 沿 y 方向速度 $v_x \neq 0$, 故沿 AA' 切向消耗剪切功率, 注意到 AA' 外侧为刚性区 (刚性区内 $v_x=0$), 故沿 AA' 切向 $\Delta v_x = |0 - v_x| = |-v_x| = \frac{2C \Delta h y}{lH^2}$, 于是沿 AA' 单位宽度剪切功率为:

$$\begin{aligned} W_s &= \int_s \Delta v_x \cdot k \cdot ds = 2k \int_0^{\frac{H}{2}} \frac{2C \Delta h}{lH^2} y dy \\ &= \frac{4kC \Delta h}{lH^2} \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\frac{H}{2}} = \frac{kC \cdot \Delta h}{2l} \end{aligned} \quad (4.3)$$

由图1, 弧面 AB 与 $A'B'$ 为变形区上、下接触面, 其上作用有摩擦力 $\tau_f = mk$ 。沿圆弧 AB 切向速度为 $v_s = v_x / \cos \alpha$, 如图2, 注意到模面不动, 故沿 AB 切向速度不连续量为 $\Delta v_s = |0 - v_s| = |v_s| = v_x / \cos \alpha$ 于是对单位宽度上、下接触面消耗摩擦功率的总和为:

$$\begin{aligned} W_f &= 2 \int_s \tau_f \Delta v_s ds \\ &= \int_0^{\widehat{AB}} mk \cdot |v_s| ds \end{aligned} \quad (4.4)$$

由高等数学可知上述积分为沿抛物线 \widehat{AB} 的曲线积分, 其中 $v_i^2 = v_x^2 + v_y^2$,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \text{ 由 (3.3) 式,}$$

$$\text{当 } y = \frac{h_x}{2} = \frac{l^2 h + \Delta h x^2}{2l^2} \text{ 时,}$$

$$v_y = -\frac{C \Delta h x}{l^2 h + \Delta h x^2} \quad (4.4)'$$

由 (2.2) 令 $y = \frac{h_x}{2}$, 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \Delta h x \cdot 2l^2}{(2l^2)^2} = \frac{\Delta h \cdot x}{l^2} \quad (a)$$

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta h x}{l^2}\right)^2} dx \quad (b)$$

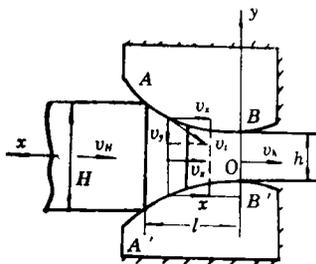


图 2 横面 AB 切线方向速度

将 (3.1)、(4.1) 与 (4.4)' 式代入曲线积分 ($s=0$ 时, $x=0$; $s=\widehat{AB}$ 时 $x=l$)

$$\begin{aligned} W_f &= 2mk \int_0^{\widehat{AB}} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta h x}{l^2}\right)^2} dx \\ &= 2mk \int_0^l \sqrt{\left(\frac{l^2 C}{l^2 h + \Delta h x^2}\right)^2 + \left(-\frac{C \Delta h x}{l^2 h + \Delta h x^2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta h x}{l^2}\right)^2} dx \\ &= 2mk \int_0^l \frac{l^2 C}{l^2 h + \Delta h x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta h x}{l^2}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta h x}{l^2}\right)^2} dx \\ &= 2mk \int_0^l \frac{l^2 C}{l^2 h + \Delta h x^2} \left[1 + \left(\frac{\Delta h x}{l^2}\right)^2\right] dx \\ &= 2mk \int_0^l \frac{l^2 C}{l^2 h + \Delta h x^2} dx + 2mk \int_0^l \frac{C \Delta h^2 x^2}{l^4 h + l^2 \Delta h x^2} dx \quad (A) \end{aligned}$$

由数学手册^[4], 上式第一项积分参照下式

$$\int \frac{1}{ax^2 + c} dx = \frac{1}{\sqrt{ac}} \operatorname{arctg}\left(x \sqrt{\frac{a}{c}}\right) \quad (a > 0, c > 0)$$

注意到 $\Delta h > 0$, $l^2 h > 0$, 故第一项积分结果为

$$\begin{aligned} &2mk \int_0^l \frac{l^2 C}{l^2 h + \Delta h x^2} dx \\ &= 2mkl^2 C \left[\frac{1}{\sqrt{l^2 h \Delta h}} \operatorname{arctg}\left(x \sqrt{\frac{\Delta h}{l^2 h}}\right) \right]_0^l \\ &= 2mkl^2 C \cdot \left[\frac{1}{l \sqrt{h \Delta h}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right] \\ &= \frac{2mklC}{\sqrt{h \cdot \Delta h}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \quad (c) \end{aligned}$$

参照[5]中下式

$$\int \frac{x^2}{ax^2 + c} dx = \frac{x}{a} - \frac{c}{a} \int \frac{dx}{ax^2 + c}$$

原式第二项积分为

$$\begin{aligned}
 & 2mkC\Delta h^2 \int_0^l \frac{x^2}{l^4h + l^2\Delta hx^2} dx \\
 &= 2mkC\Delta h^2 \left[\frac{x}{l^2\Delta h} - \frac{l^4h}{l^2\Delta h} \int_0^l \frac{dx}{l^2\Delta hx^2 + l^4h} \right]_0^l \\
 &= 2mkC\Delta h^2 \left\{ \frac{x}{l^2\Delta h} - \frac{l^4h}{l^2\Delta h} \left[\frac{1}{\sqrt{l^2\Delta h \cdot l^4h}} \arctg \left(x \sqrt{\frac{l^2\Delta h}{l^4h}} \right) \right] \right\}_0^l \\
 &= 2mkC\Delta h^2 \left\{ \frac{x}{l^2\Delta h} - \frac{l^2h}{\Delta h} \left[\frac{1}{l^3\sqrt{\Delta h \cdot h}} \arctg \left(x \frac{\sqrt{\Delta h}}{l\sqrt{h}} \right) \right] \right\}_0^l \\
 &= 2mkC\Delta h \left\{ \frac{x}{l^2} - h \left[\frac{1}{l\sqrt{\Delta h \cdot h}} \arctg \left(x \frac{\sqrt{\Delta h}}{l\sqrt{h}} \right) \right] \right\}_0^l \\
 &= 2mkC\Delta h \left\{ \frac{1}{l} - h \left[\frac{1}{l\sqrt{\Delta h \cdot h}} \arctg \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right] - 0 + 0 \right\} \\
 &= 2mkC\Delta h \left[\frac{1}{l} - \frac{h}{l\sqrt{h \cdot \Delta h}} \arctg \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right] \tag{d}
 \end{aligned}$$

将(c)、(d)代入原式(A)有

$$\begin{aligned}
 W_f &= \frac{2mklC}{\sqrt{h \cdot \Delta h}} \arctg \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} + \frac{2mkC\Delta h}{l} - \frac{2mkC\sqrt{h \cdot \Delta h}}{l} \arctg \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \\
 &= 2mkC \cdot \arctg \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \cdot \left(\frac{l}{\sqrt{h \cdot \Delta h}} - \frac{\sqrt{h \cdot \Delta h}}{l} \right) + \frac{2mkC \cdot \Delta h}{l} \\
 &= 2mkC \left[\frac{\Delta h}{l} + \left(\frac{l}{\sqrt{h \cdot \Delta h}} - \frac{\sqrt{h \cdot \Delta h}}{l} \right) \arctg \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right] \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

(4.5) 式即为以曲线积分得到的上、下接触面单位宽度摩擦功率解析解。对(4.4)也可按下述方法积分：注意到 $|v_s| = v_s$ ，则

$$W_f = 2 \int_0^{\widehat{AB}} mkv_s ds = 2 \int_0^{\widehat{AB}} mk \cdot v_s \cos \alpha \cdot \frac{ds}{\cos \alpha}$$

注意到 $v_s \cos \alpha = v_x$ ， $ds \cdot \cos \alpha = dx$ ， $ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$ ，且 $x=0$ 时， $s=0$ ， $x=l$ 时， $s = \widehat{AB}$ ，上述

积分为

$$W_f = 2mk \int_0^l v_x \frac{dx}{\cos^2 \alpha} = 2mk \int_0^l v_x \sec^2 \alpha dx$$

由[6]： $\sec^2 \alpha = 1 + \tg^2 \alpha$ ，于是

$$W_f = 2mk \int_0^l v_x (1 + \tg^2 \alpha) dx$$

由图2， $\tg \alpha = \frac{v_y}{v_x}$ ，由速度场(3.3)并注意到(4.4)'

$$\tg \alpha = \frac{-C\Delta hx}{l^2h + \Delta hx^2} \cdot \frac{l^2h + \Delta hx^2}{l^2C} = -\frac{\Delta hx}{l^2} = -\frac{dy}{dx} \tag{a}'$$

比较(a')与(a)得到： $\frac{v_y}{v_x} = -\frac{dy}{dx}$ ，即 $v_x dx = -v_y dy$ 或

$$v_x dx + v_y dy = 0 \tag{d}'$$

上式恰恰验证了所设速度场的合理性(满足体积不变条件),将(a)'与(3.3)代入前式

$$\begin{aligned} W_f &= 2mk \int_0^l \frac{l^2 C}{l^2 \bar{h} + \Delta h x^2} \left[1 + \left(\frac{-\Delta h x}{l^2} \right)^2 \right] dx \\ &= 2mk \int_0^l \frac{l^2 C}{l^2 \bar{h} + \Delta h x^2} dx + 2mk \int_0^l \frac{C \Delta h^2 x^2}{l^4 \bar{h} + l^2 \Delta h x^2} dx \end{aligned} \quad (A)'$$

其余积分步骤与(A)式一致。

令出口单位宽度施加外功率为 $W_{外} = \sigma_f v_h \cdot h = \sigma_f \cdot C = W_t + W_s + W_f$, 将(4.1)、(4.3)与(4.5)式代入该式并整理

$$\begin{aligned} \sigma_f \cdot C &= 2kC \ln \frac{H}{h} + \frac{kC \cdot \Delta h}{2l} + 2mkC \left[\frac{\Delta h}{l} + \left(\frac{l}{\sqrt{h \cdot \Delta h}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sqrt{h \cdot \Delta h}}{l} \right) \arctg \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right] \\ \frac{\sigma_f}{2k} &= \ln \frac{H}{h} + \frac{1}{4} \frac{\Delta h}{l} + m \left[\frac{\Delta h}{l} + \left(\frac{l}{\sqrt{h \cdot \Delta h}} - \frac{\sqrt{h \cdot \Delta h}}{l} \right) \arctg \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.6)式即本文以变上限积分与曲线积分得到的模面为抛物线时拉拔应力的上界解析解,该解表明拉拔应力为屈服切应力 k , 常摩擦因子 m , 延伸系数 H/h , 与绝对加工量 Δh 及模面水平投影 l 的函数。常数 k 由实验测定, 常摩擦因子 m 由实验测定或建议用下式^[7]

$$m = f \left[1 + \frac{1}{4} \frac{l}{h} (1-f) (f) \frac{1}{4} \right] \quad (4.7)$$

式中 f 为滑动摩擦系数; l 为接触弧面水平投影, $\bar{h} = \frac{H+h}{2}$ 。

五、极限道次加工率

当 $\sigma_f = 2k$ 时, 即达到极限拉拔应力, 按此, 由(4.6)式极限道次加工率应按下式确定:

$$\ln \frac{H}{h} + \frac{1}{4} \frac{\Delta h}{l} + m \left[\frac{\Delta h}{l} + \left(\frac{l}{\sqrt{h \cdot \Delta h}} - \frac{\sqrt{h \cdot \Delta h}}{l} \right) \arctg \sqrt{\frac{\Delta h}{h}} \right] \leq 1 \quad (5.1)$$

六、结 论

1. 模面为抛物线的平面变形拉拔问题, 直角坐标运动许可速度场满足本文(3.2)、(3.3)式, 上述速度场由(d)'式验证满足体积不变条件。
2. 按上述速度场经变上限积分与曲线积分可得到变形力的上界解析解, 该解表明拉拔应力 σ_f 为 k , m , $\frac{H}{l}$, Δh 及 l 的函数。
3. 按本文解析解(4.6)式确定极限道次加工率的计算式满足本文(5.1)式
4. 本文(4.6), (5.1)式可供喇叭模拉拔确定变形力与工艺设计参数时参考
5. 本文摩擦功率的积分方法可供曲线模挤压、拉拔确定摩擦功率时参考

参 考 文 献

- [1] 赵德文, 平面变形拉拔挤压的变上限积分与上界解析解, 应用数学和力学, 11(8) (1990), 713—718.
- [2] Zhao De-wen et al., Integral as a function of the upperlimit to solve axial symmetrical rod drawing and extrusion, *Chin. J. Met. Technol. Sci.* 6(1990), 281-288.
- [3] 赵志业, 《金属塑性变形与轧制理论》, 冶金工业出版社, (1980), 248.
- [4] 《数学手册》编写组, 《数学手册》, 人民教育出版社, 北京, (1979), 257.
- [5] 《数学手册》编写组, 《数学手册》, 人民教育出版社, 北京, (1979), 258.
- [6] 《数学手册》编写组, 《数学手册》, 人民教育出版社, 北京, (1979), 38.
- [7] Тарновский И. Я., Контактные надрыжения при деформаций, Издательство «Металлургия», Стр., (1986), 15.

The Curvilinear Integral Problems to Velocity Field for Drawing Through Parabolic Dies

Zhao De-wen Liu Xiang-hua Wang Guo-dong

(Northeast University, Shenyang)

Li Gui-fan

(Liao Ning University, Shenyang)

Abstract

In this paper with Von Karman's basic assumptions a kinematically admissible continuous velocity field has been established to draw through parabolic dies (or called trumpet dies). Then using the curvilinear integral and the integral as a function of the upper limit, an upper bound analytical solution of the drawing stress is obtained

Key words parabolic die, drawing, curvilinear integral analytical solution