

# 矩形中厚板和夹层板的后屈曲\*

成振强 王秀喜 黄茂光

(中国科学技术大学近代力学系, 1993年1月4日收到)

## 摘 要

本文研究了矩形Reissner中厚板和夹层板的后屈曲特性。首先将矩形中厚板和夹层板的基本方程和边界条件表述成统一的无量纲形式。对不同的边界条件, 特别是对不对称边界条件, 文中发展了一种应用于非线性分析的混合Fourier级数求解新方法, 获得了级数形式的精确解。非线性偏微分方程化为无穷元非线性代数方程组, 数值计算中截取有限项进行迭代求解。

**关键词** 后屈曲 中厚板 夹层板

## 一、引 言

Kirchhoff 经典板理论的主要缺点是忽略了横向剪切变形。为此, 研究者建立了许多计入剪切变形的改进理论, 最常用的是Reissner<sup>[1]</sup>-Mindlin<sup>[2]</sup>中厚板理论和Reissner<sup>[3]</sup>夹层板理论。利用Mindlin扁壳公式, Pica和Wood<sup>[4]</sup>研究了一些板壳的后屈曲特性。Chen和Doong<sup>[5]</sup>应用Galerkin法求解了厚板的后屈曲问题。Stein<sup>[6,7]</sup>对剪切变形板的后屈曲问题给出了一些结果。He和Cheng<sup>[8]</sup>研究了矩形夹层板的非线性屈曲状态及其稳定性。在这些研究中, 所有的解析求解仅涉及至少一组对边简支的矩形板。

纵观在剪切变形板的非线性动静分析中所得的结果, 不论是能量法或双级数展开法求得的解析解都是基于位移的假设, 然而由于假设的局限性, 除一对边简支这类边界条件外, 解析解要么不能满足全部边界条件, 要么除满足了必要的边界条件外, 还增加了不必要的边界约束。此外, 当中厚板的厚跨比或夹层板的相应参数为零时, Reissner中厚板和夹层板理论可化为Kirchhoff薄板理论。然而, 由于位移假设形式的局限性, 中厚板和夹层板问题的解析解化到Kirchhoff薄板问题的解时却出现了矛盾。由于能量法的近似程度难以估计, 因而解的精度难以保证。现代工业的发展, 要求高精度的分析, 准确预测结构的各种特性。因此, 精确或较为精确形式的解析求解非常必要。

众所周知, Navier级数和Levy级数分别用于求解全简支边界和其中一组对边简支的矩形板问题, 对于其它类型的边界则无能为力。而且, 在线性分析中行之有效的叠加原理却不能用于非线性分析。本文发展了一种用于求解非线性问题的混合Fourier级数展开新方法。混合Fourier级数并非Navier级数和Levy级数的叠加, 尽管其形式是三个级数之和,

\* 刘人怀推荐。

但它的系数是具有非线性内在关系的待定函数和待定常数。本文研究了矩形中厚板和夹层板的后屈曲特性,应用混合Fourier级数求得了Karman型大挠度方程的解。根据不同的边界条件,混合级数的系数可相应地被灵活确定。数值计算中通过迭代求解无穷元联立非线性代数方程组。对级数截取有限项可获得任何期待的精度,在此意义上的解答可说是精确的。据作者所知,在矩形中厚板和夹层板的非线性分析方面,还未见到这样的高精度分析应用于多种边界问题。数值结果绘成曲线作了说明和讨论。

## 二、基本方程和边界条件

考虑一矩形夹层板<sup>[9]</sup>其控制微分方程的无量纲形式为:

$$\mathcal{L}(\Psi_\xi, \Psi_\eta, W)^T = (0 \quad 0 \quad -\varepsilon F)^T \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_1^2 \Psi = -\frac{1-\nu^2}{2} \lambda^2 A \quad (2.2)$$

相应的边界条件为

当 $\xi=0$ 或 $1$ 时,滑动固定

$$W=0, \Psi_\xi=0, \Psi_\eta=0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}=0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}=0 \quad (2.3)$$

当 $\xi=0$ 或 $1$ 时,简支

$$W=0, \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \xi}=0, \Psi_\eta=0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2}=0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}=0 \quad (2.4)$$

当 $\eta=0$ 或 $1$ 时,滑动固定

$$W=0, \Psi_\xi=0, \Psi_\eta=0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}=0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}=0 \quad (2.5)$$

当 $\eta=0$ 或 $1$ 时,简支

$$W=0, \Psi_\xi=0, \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta}=0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}=0, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}=0 \quad (2.6)$$

其中微分算子 $\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{L}_1$ 为

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \xi^3} + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\varepsilon} & \frac{1+\nu}{2} \lambda \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} & -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{1+\nu}{2} \lambda \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon} \lambda \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \xi} & \lambda \frac{\partial}{\partial \eta} & \mathcal{L}_1 - \varepsilon R \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \rho \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad (2.8)$$

非线性项 $F$ 和 $A$ 为

$$F = \lambda^2 \mathcal{L}_2(W, \Phi) \quad (2.9)$$

$$A = \mathcal{L}_2(W, W) \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}_2(W, \Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \quad (2.11)$$

上述无量纲参数定义为

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \Psi_\xi = \frac{2a}{h+t_f} \psi_x, \quad \Psi_\eta = \frac{2a}{h+t_f} \psi_y, \quad W = \frac{2}{h+t_f} w,$$

$$R = \frac{a^2}{D} p_x, \quad \rho = \frac{p_y}{p_x}, \quad \Phi = \frac{R}{2\lambda^2} (\eta^2 + \rho\lambda^2\xi^2) + \frac{2t_f}{D} \varphi, \quad \varepsilon = \frac{Dh}{G_2(h+t_f)^2 a^2} \quad (2.12)$$

其中  $x, y$  为直角坐标,  $a, b$  为  $x$  和  $y$  方向上板的边长,  $h, t_f$  为夹层板的夹心和表板厚度,  $\psi_x, \psi_y$  为中面法线转角,  $w$  为挠度,  $\varphi$  为应力函数, 定义如下

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (2.13)$$

$p_x, p_y$  为表层边界单位长度上作用的均布平面压力,  $G_2$  为夹心的剪切刚度,  $D$  为夹层板的弯曲刚度, 表达式为

$$D = \frac{Et_f(h+t_f)^2}{2(1-\nu^2)} \quad (2.14)$$

其中  $E, \nu$  为表板的弹性模量和泊松比。

对于中厚板, 其控制方程和边界条件与夹层板相同, 仅仅无量纲参数有所区别。将 (2.12) 中夹层板的参量  $h+t_f, t_f$  和  $G_2$  分别代以  $h/\sqrt{3}, h/2$  和  $(\sqrt{3}-3/2)\kappa G$ , 就得到了中厚板的无量纲参数表示式。其中  $h$  为中厚板的厚度,  $G$  是剪切刚度,  $\kappa$  是剪切修正因子, 其值在 Reissner 理论中为  $5/6$ , 在 Mindlin 理论中为  $\pi^2/12$ 。

### 三、解析求解

假设中面法线的无量纲转角  $\Psi_\xi, \Psi_\eta$  和挠度  $W$  具有下面混合 Fourier 级数的形式:

$$\begin{bmatrix} \Psi_\xi \\ \Psi_\eta \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=2}^{\infty} G_n(\xi) \sin n\pi\eta \\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\xi) \cos n\pi\eta \\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \sin n\pi\eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} H_m(\eta) \cos m\pi\xi \\ \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\eta) \sin m\pi\xi \\ \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta) \sin m\pi\xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{\xi mn}^* \cos m\pi\xi \sin n\pi\eta \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{\eta mn}^* \sin m\pi\xi \cos n\pi\eta \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^* \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

混合 Fourier 级数不同于通常的 Navier 级数或 Levy 级数, 也不是它们的叠加, 其系数是具有非线性内在关系的未知函数和未知常数, 可以灵活地满足不同的边界条件。

将表达式 (3.1) 代入方程 (2.1), 使下面的方程成立:

$$\mathcal{L} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} G_n(\xi) \sin n\pi\eta & \sum_{m=0}^{\infty} H_m(\eta) \cos m\pi\xi & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{\xi mn}^* \cos m\pi\xi \sin n\pi\eta \\ \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\xi) \cos n\pi\eta & \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\eta) \sin m\pi\xi & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_{\eta mn}^* \sin m\pi\xi \cos n\pi\eta \\ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) \sin n\pi\eta & \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta) \sin m\pi\xi & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^* \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon F \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

根据三角函数的正交性, 上述方程可化为常微分方程和线性代数方程, 解答不难求出。再利用边界条件 (2.3) ~ (2.6) 中的前三个就导出了  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$  和  $W$  的表达式。类似的步骤可求得  $\Phi$ 。这些代数运算细节容易用计算机化的符号处理系统来执行, 因而这里未给出。

这样, 基本方程和边界条件就化成为无穷元联立非线性代数方程组。对于任何给定的板参数  $\nu$ ,  $\lambda$ ,  $\varepsilon$ , 以及边界压力参数  $R$  和  $\rho$ , 由这些方程求得未知系数。这些系数一经确定, 板的挠度、弯曲应力和薄膜应力即可确定。通过对边界条件的选择组合, 就得到一些可动边界矩形 Reissner 中厚板和夹层板的后屈曲问题的解。

#### 四、数值计算和结果讨论

数值计算在 VAX8700 计算机上完成。每个求和号截取前七项, 这样的精度足以保证在作图误差的范围内。非线性代数方程组应用迭代步骤求解。规定挠度系数  $W_{mn}$  之一的值, 并给出其它系数的初始猜测。特别给定值的  $W_{mn}$  的选择依赖于板的屈曲模态, 例如对于四边简支方板, 它在  $x$  和  $y$  方向都屈曲成一个正弦半波, 因此  $W_{11}$  系数是主要的, 预先规定其值。有了系数  $W_{mn}$ , 求出一次迭代的其它系数和新的  $W_{mn}$  (除预先规定的  $W_{mn}$  之外) 和  $R$  值。所得  $W_{mn}$  现在又作为新的迭代初值。重复这个过程直到获得期待的精度, 这样就得到了可动边界矩形板后屈曲问题的解答。迭代过程的收敛判据是后屈曲载荷的最终结果与前三次迭代的平均值的误差小于千分之一。只要给出足够好的计算初值, 迭代过程收敛很快, 通常在十次迭代以内。

数值结果绘成曲线形式表示。图2中每条曲线相应的边界条件按顺序  $\xi=0$ ,  $\eta=0$ ,  $\xi=1$ ,  $\eta=1$  标记符号为  $C_L$  (滑动固定),  $S$  (简支)。下面图中相应于  $w_0=0$  的边界压力为临界屈曲

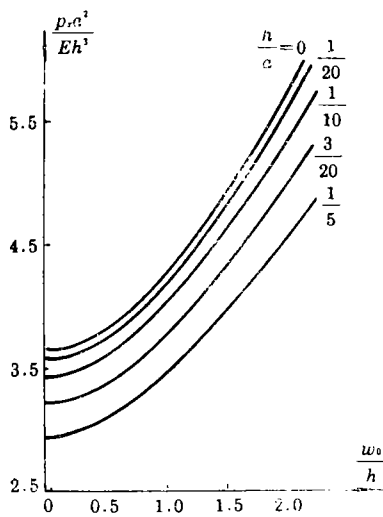


图1 不同厚跨比的四边简支方板在单向压力作用下的载荷-挠度曲线 ( $\nu=0.3$ )

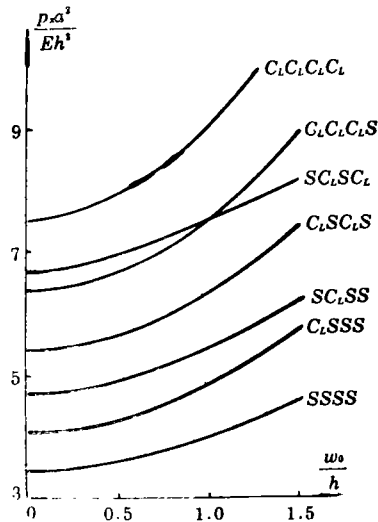


图2 不同边界条件下中厚方板在单向压力作用下的载荷-挠度曲线 ( $\nu=0.3$ ,  $h/a=1/10$ )

载荷。

图 1 绘出了在  $x$  方向压力作用下不同厚跨比的四边简支方板的中心挠度与后屈曲载荷的关系曲线。对于相同的无量纲中心挠度, 随着厚跨比的减小, 无量纲后屈曲载荷逐渐增加。厚跨比为零时的结果退化为薄板理论结果。由此可以看出, 随着厚跨比的增大, 横向剪切变形的影响也逐步增大。

图 2 绘出了在  $x$  方向压力作用下不同可动边界中厚方板的中心挠度与后屈曲载荷的关系曲线。对于相同的中心挠度, 四边滑动固定中厚方板的后屈曲载荷最大, 四边简支中厚方板的后屈曲载荷最小, 其它几种边界的后屈曲载荷介于两者之间。

## 五、结 论

本文研究了矩形中厚板和夹层板的后屈曲问题。对于不同的可动边界条件, 特别是不对称边界条件, 发展了一种应用于非线性分析的混合 Fourier 级数求解新方法, 获得了混合级数形式的精确解, 截取有限项可逼近任何期待的精度。本文结果化为 Kirchhoff 薄板结果的不出现矛盾。研究表明, 横向剪切变形对中厚板和夹层板的后屈曲特性具有明显的影响。夹层板的数值算例未在这里给出, 通过无量纲参数的转换, 容易由中厚板结果化出夹层板结果。

## 参 考 文 献

- [1] Reissner, E., The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 12(1945), A69-A77.
- [2] Mindlin, R.D., Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18(1951), 31-38.
- [3] Reissner, E., Finite deflections of sandwich plates, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 15(7)(1948), 435-440; 17(2)(1950), 125-135.
- [4] Pica, A. and R.D. Wood, Postbuckling behavior of plates and shells using a Mindlin shallow shell formulation, *Computers & Structures*, 12(5)(1980), 759-768.
- [5] Chen, L.W. and J. L. Doong, Postbuckling behavior of a thick plate, *AIAA Journal*, 21 (8)(1983), 1157-1161.
- [6] Ssein, M., Nonlinear theory for plates and shells including the effects of transverse shearing, *AIAA Journal*, 24(9)(1986), 1537-1544.
- [7] Stein, M., Effects of transverse shearing flexibility on postbuckling of plates in shear, *AIAA Journal*, 27(5)(1989), 652-655.
- [8] He, L.W. and C.J. Cheng, Nonlinear buckled states of rectangular sandwich plates and their stabilities, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 27 (3)(1992), 423-435.
- [9] Cheng, Z.Q., Nonlinear bending, stability and vibration of rectangular moderately thick plates and sandwich plates, Ph. D Thesis, University of Science and Technology of China (May, 1991).

## Postbuckling Behavior of Rectangular Moderately Thick Plates and Sandwich Plates

Cheng Zhen-qiang Wang Xiu-xi Huang Mao-guang

*(Department of Modern Mechanics,  
University of Science and Technology of China, Hefei)*

### Abstract

Postbuckling behavior is investigated for rectangular Reissner's moderately thick plates and sandwich plates. The fundamental equations and boundary conditions are expressed in unified dimensionless form for rectangular moderately thick plates and sandwich plates. Exact solutions of series form with a number of different boundary conditions, especially with unsymmetrical boundary conditions, are obtained by developing a new technique of mixed Fourier series in nonlinear analysis. The nonlinear partial differential equations are reduced to an infinite set of simultaneous nonlinear algebraic equations, which are truncated by iteration in numerical computations.

**Key words** postbuckling, moderately thick plates, sandwich plates