应用数学和力学，第15卷第8期（1994年8月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

# 一种描述复杂运动的模型的数值研究*

黄　欣　刘曾荣

（苏州大学数学系，中国科学院力学研究所LNM开放研究实验室）

（戴世强推荐，1993年2月22日收到）

**摘　　要**

为了研究状态为连续系统的动力学的复杂性，我们根据对无穷维动力系统讨论的结论，提出了一种新的映射模型。利用数值方法，对这种模型进行了研究，发现其动力学行为可能是普适语言(universal language)和上下文有关语言(context-sensitive language)。

**关键词**　复杂性　图案的演化　数值研究

## 一、引　　言

S. Wolfram通过对细胞自动机(CA)的研究，发现存在一种比混沌(Chaos)更复杂的运动，并且建议用计算理论来讨论动力学系统的包括这种复杂运动在内的所有动力学行为[1]。按照此开创性理论，一些非线性学者在近年来就复杂性理论提出了许多观点[2~8]。这个方向也已经被列入今后十年非线性科学的一个重要研究方向[9]。

由于细胞自动机系统的状态空间是离散的，而就偏微分方程等无穷维连续动力系统所描述的图案(pattern)动力学，如何反映这种复杂的运动目前还了解不多。我们认为，如果能提出反映偏微分方程等的图案演化的简单模型，进行研究是一件重要的事。为此我们在本文中提出了一种模型，它能反映偏微分方程的惯性流形上相应常微分方程的模态的演化。通过对这种模型进行系统的数值研究，我们发现系统的动力学行为很可能是普适语言和上下文有关语言。

## 二、模 型 的 提 出

近年来以Temam为首的一批学者提出了无穷维动力系统理论[10,11]，我们在此基础上提出了一些新的观点[12]，并对Sine-Gordon方程进行研究。结果发现反映Sine-Gordon方程的动力学行为的常微分方程有如下特点[13]：

1)　常微分方程存在各种解的不变子空间。从力学上讲这些解不变子空间是反映各种模态和模态的组合，因而它反映了系统的图案的演化。

* 国家八、五重大基础项目“非线性科学”和国家自然科学基金资助项目

2)　解在不同不变子空间之间的转化的方式是第一个方程的解以系数形式影响第二个方程，然后第二个方程的解又以反馈形式输入到第一个方程，构成一个耦合方程组．

根据这种结果，我们提出如下映射模型：

$$X_{n+1}=\lambda X_n(1-X_n)+\varepsilon Y_n,\quad Y_{n+1}=(1+3X_{n+1})Y_n(1-Y_n) \tag{2.1}$$

当$Y_n=0$时，(2.1)就把运动限制在不变子空间$\{X_n,0\}$上，$X_n$对$Y_n$的影响反映在$Y_n$的系数上，$Y_n$对$X_n$的影响通过耦合$\varepsilon Y_n$实现．为了便于研究，我们选取$X_n$和$Y_n$上的映射服从于逻辑斯蒂(logistic)映射，系数$(1+3X_{n+1})$的选取是为了确保$Y_n\in[0,1]$．

## 三、(2.1)的动力学的数值分析

为了讨论$X_n$如何驱动$Y_n$以及驱动后的动力学行为，在数值研究中我们作了如下处理：

1)　初始值选取$Y_0=10^{-7}$，即可以认为初始时(2.1)的运动基本上限于$\{X_n,0\}$上．

2)　为了讨论$X_n$在非正规情况下驱动$Y_n$的情况，选取$\lambda=3.57$，这是逻辑斯蒂映射的$\lambda_\infty$点．

数值计算时先以逼辑斯蒂映射迭代$X_n$，迭代5000次，然后令$X_0:=X_{5000}$，$Y_0:=10^{-7}$，对(2.1)进行数值迭代，再进行如下数值分析：

1)　去暂态5000次，取$\{Y_n\}$的30000点．计算$\{Y_n\}$的李雅普诺夫(Lyapunov)指数LE；

2)　去暂态5000次，取$\{Y_n\}$的30000点，计算$\{Y_n\}$的容量维$D_0$，图1(a)，2(a)是$\{Y_n\}$的$\log_2 N(\varepsilon)$对$\log_2(1/\varepsilon)$图；

3)　去暂态34970次，取$\{X_n\}$和$\{Y_n\}$的30点，给出$X_n$-$Y_n$的振幅图(图1(b)，2(b))；

4)　去暂态33976次，取$\{Y_n\}$的1024点，计算$\{Y_n\}$的功率谱，功率谱图见图1(c)，2(c)；

5)　去暂态34800次，取$\{Y_n\}$的200点，给出$\{Y_n\}$的时间-振幅图(图1(d)，2(d))．

图1(a)，1(b)，1(c)，1(d)给出了$\varepsilon=0.18$的结果，图2(a)，2(b)，2(c)，2(d)给出了$\varepsilon=0.20$的结果．

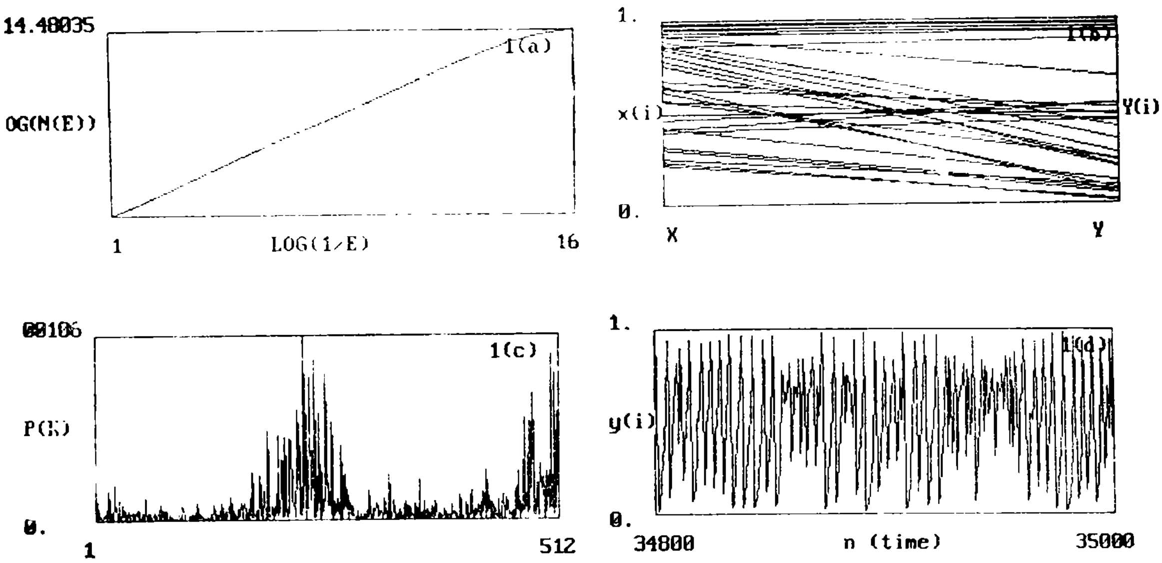


图 1

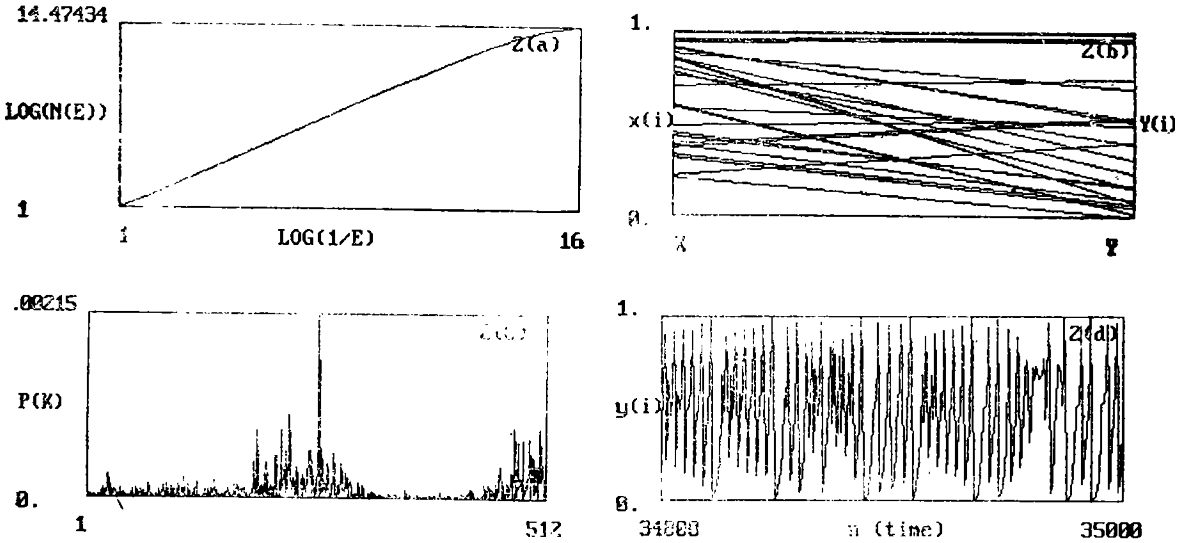


图 2

从这些图中，我们可以看出如下几点：

1) 它们都具有分维结构，($\varepsilon=0.18$，$D_0=0.9437$；$\varepsilon=0.20$，$D_0=0.9429$) 因而它们应该是奇异的；

2) 从$\{Y_n\}$随$n$变化的图形，以及功率谱分布来看，$\{Y_n\}$的演化既不是周期的，也不是拟周期的；

3) 它们的李雅普诺夫指数可正可负．($\varepsilon=0.18$，$\mathrm{LE}=-0.02238$；$\varepsilon=0.20$，$\mathrm{LE}=0.02005$)

上述结果告诉我们这种非周期运动的动力学行为既是奇异的，又可能不一定是混沌的．

## 四、复 杂 性 的 讨 论

利用[2]和[3]的方法，我们对(2.1)去掉5000次暂态，取30000个点计算它的复杂性．对[2]的复杂性 (complexity)(我们记它为$C_0$)，[3]中第一级复杂性$C_1$和第二级复杂性 $C_2$ 进行计算得到的结果见表1．

表 1

| 复杂性 \ $\varepsilon$ | 0.04 | 0.10 | 0.14 | 0.18 | 0.20 |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_0$ | 0.457087 | 0.607301 | 0.625148 | 0.673732 | 0.683647 |
| $C_1$ | 0.449887 | 0.549330 | 0.592658 | 0.626141 | 0.637137 |
| $C_2$ | 0.146313 | 0.217996 | 0.312181 | 0.360936 | 0.402802 |

由于$C_0$和$C_1$的定义都是以随机为标准，对于纯随机序列这两种复杂性都应该是 1．上表的结果告诉我们(2.1)给出的动力学都不是随机的，因而是奇异的．

由于 $C_2$ 是反映了$\{Y_n\}$给出的符号动力系统中新的禁止字成长的指数率，这种新的禁止字的出现是与有限自动机结点的生成必然联系起来的，所以表中$C_2\neq 0$就告诉我们(2.1)的动力学很可能是反映了普适语言与上下文有关语言，因此 (2.1) 可能是研究具有比混沌更复杂

动力学行为的简单模型。

## 参 考 文 献

[1] Wolfram, S., Computation theory of cellular automata, *Commun. Math. Phys.* 96 (1984), 15—57.
[2] Lempel, A. and J. Ziv, On the complexity of finite sequences, *IEEE, Trans. Inform. Theory*, 22(1) (1976), 75—81.
[3] D'Alessandro, G. and A. Peleti, Hierachical approach to complexity with applications to dynamical systems, *Phys. Rev. Lett.*, 64(14) (1990), 1609—1612.
[4] Grassberger, P., Toward a quantitative theory of self-generated complexity, *Int. J. Theor. Phys.*, 25(9) (1986), 907—939.
[5] Schuster, H. G., Information content of chaotic singnals, *Physica Soripta*, 40 (1989), 367—372.
[6] Crutchfield, J. P. and K. Young, Inferring statistical complexity, *Phys. Rev. Lett.*, 63(2) (1989), 105—108.
[7] Auerbach, D. and I. Procaccia, Grammatical complexity of strange sets, *Phys. Rev.*, A41(12) (1990), 6602—6614.
[8] Urias, J., An algebraic measure of complexity, *Physica*, D47 (1991), 498—508.
[9] Hao Bai-lin, Symbolic dynamics and characterization of complexity, *Physica*, D51 (1991), 161—176.
[10] Teman, R., *Infinite Dimensional Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag (1988).
[11] 刘曾荣、徐振源、谢惠民，无穷维动力系统中的惯性流形和吸引子，力学进展，21(4)(1991)，421—429.
[12] 刘曾荣、徐振源，从具体例子看惯性流形概念的推广，力学学报，24(4) (1992)，438—445.
[13] 刘曾荣、徐振源，Sine-Gordon方程的广义惯性流形和动力学行为，《全国一般力学和现代数学方法学术会文集》，科学出版社 (1992)，18—25.

# Numerical Studies for a Model Describing Complexity

Huang Xin    Liu Zeng-rong

*(Dept. of Math., Suzhou University, Suzhou, Jiangsu)*
*(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing)*

**Abstract**

A simple model based on the discussion for infinite dimensional system is introduced to investigate the dynamical complexity for continuous system. By using numerical methods, we show the dynamical behaviors of the model appear to correspond to universal language and context-sensitive language.

**Key words** complexity, evolution of pattern, numerical method