应用数学和力学，第 15 卷第 8 期（1994年 8 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

完整动力系统的积分不变量*

纳赛尔·艾赫默德

（巴基斯坦古艾德·艾·亚赞大学数学系，1993年10月29日收到）

摘　　要

本文利用 Poincaré 形式研究了一个保守完整动力系统的积分不变量．对异步变分引入了新的参数，给出了Poincaré和Poincaré-Cartan积分不变量的一个推广．

关键词　分析力学　完整动力系统　积分不变量　同步变分　异步变分

一、引　　言

考虑一个具有 n 个自由度的完整动力系统，其任意时刻 t 的位形由一组变量 $x_p(p=1, 2, \cdots, n)$确定．设系统的实（虚）位移由独立的 Poincaré 参数 $\eta_p(\omega_p)$表示．且任意函数 $G(x_p, t)$的变分$dG(\delta G)$由下式定义

$$dG=[X_0G+\eta_pX_pG]dt \qquad (\delta G=\omega_pX_pG)$$
$$(p=1, 2, \cdots, n) \tag{1.1}$$

其中，X_0，X_p为无穷小位移算子，由下式定义

$$X_0=\frac{\partial}{\partial t}+\xi^p_0(x_q)\frac{\partial}{\partial x_p}, \quad X_p=\xi^q_p(x_r)\frac{\partial}{\partial x_q} \tag{1.2}$$

这里，重复指标按通常习惯表示求和，并且在以下讨论中，对于脚标 p，q，r，$s=1, 2, \cdots, n$和λ，μ，$\nu=0, 1, 2, \cdots, n$均遵守这一惯例．

无穷小位移算子X_0，X_p满足如下变换关系

$$(X_0, X_p)=C^q_{0p}X_q, \quad (X_p, X_q)=C^r_{pq}X_r \tag{1.3}$$

其中，C^q_{0p}，C^r_{pq}由 x 和时间 t 决定，并构成一个闭集．

由于系统是完整的，由$d\delta=\delta d$可导出如下形式的实位移参数的变分$\delta\eta_p$[10]

$$\delta\eta_p=\frac{d\omega_p}{dt}+C^p_{0r}\omega_r+C^p_{qr}\eta_q\omega_r \tag{1.4}$$

d'Alembert-Lagrange原理动力系统的一般方程由[9]给出为：

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\eta_p}-C^q_{0p}\frac{\partial L}{\partial\eta_q}-C^r_{qp}\eta_q\frac{\partial L}{\partial\eta_r}-X_pL\right)\omega_p=0 \tag{1.5}$$

其中，$L(\eta_p, x_p, t)$为系统的 Lagrange 函数．

---

* 钱伟长推荐．
本文原文为英文，由杨砚译为中文，吴承平校．

由(1.4)并考虑到(1.3)，可以很容易地建立如下形式的Hamilton原理[10]

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} Ldt=\int_{t_1}^{t_2}\delta Ldt=0,\quad \omega_p(t_1)=0=\omega_p(t_2) \tag{1.6}$$

鉴于虚位移参数ω_p的独立性，由(1.6)及(1.4)可导出 Poincaré 方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\eta_p}-C^q_{0p}\frac{\partial L}{\partial\eta_q}-C^r_{qp}\eta_q\frac{\partial L}{\partial\eta_r}-X_pL=0 \tag{1.7}$$

由关系式

$$y_p=\partial L/\partial\eta_p \tag{1.8}$$

引入变量y_p($p=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)，并由

$$H(x_p,\ y_p,\ t)=y_p\eta_p-L(x_p,\ \eta_p,\ t) \tag{1.9}$$

定义 Hamilton 函数．其中η_p是x，y和时间t的函数．变分方程(1.6)连同(1.4)和(1.8)导出标准形式的运动方程[9]

$$\eta_p=\partial L/\partial y_p,\quad \dot{y}_p=-X_pH+C^q_{0p}y_q+C^r_{qp}\eta_q y_r \tag{1.10}$$

这些方程须由如下方程补充：

$$\dot{x}_p=X_0x_p+\eta_qX_qx_p \tag{1.11}$$

(1.11)是(1.1)取$G=x_p$而得到的．字母顶上的点“·”表示对时间t的导数．

积分不变量在力学研究中起着重要的作用，它是分析动力学研究的基础[2]．文[3，5，6，7]从不同角度对各种动力系统讨论了积分不变量．下面，我们将从微分方程的Poincaré理论的观点，对一组变量研究积分不变量[12]，获得保守完整动力系统Poincaré-Cartan和Poincaré 线性积分不变量的一个推广．该动力系统的运动由 Poincaré-Hamilton 系统 P-H系统）方程(1.10)及(1.11)确定．

二、同步变分和异步变分

设确定完整系统位形的，n个关于时间t的函数

$$x_p=x_p(t)\qquad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.1}$$

定义系统的实际轨迹，并无限接近邻曲线

$$x^*_p(t)=x_p(t)+\delta x_p \tag{2.2}$$

的实际轨迹，而任一∞^n构形与约束相一致．(2.2)中的变分δx_p为时间t的任意可微函数，是变量x_p的变分．

借助较一般的变分法，用变量$x_p(t)$定义在实际（实）运动中系统的位形．并由函数$x^*_p(t+\Delta t)$确定在各种运动中，系统无限接近的位形．微分

$$x^*_p(t)-x_p(t)=\delta x_p \tag{2.3}$$

是变量x_p的同步（同时的或同时发生的）变分，用符号δ表示．计及一阶小量，有

$$x^*_p(t+\Delta t)=x^*_p(t)+\dot{x}^*_p\Delta t=x_p(t)+\delta x_p+\dot{x}_p\Delta t \tag{2.4}$$

从而

$$x^*_p(t+\Delta t)-x_p(t)=\Delta x_p=\delta x_p+\dot{x}_p\Delta t \tag{2.5}$$

由以上关系式定义变量x_p的异步变分，用符号Δ表示．它可用于x和时间的任意函数F：

$$\Delta F=\delta F+\dot{F}\Delta t \tag{2.6}$$

当$F=\dot{x}_p$时，有

$$\Delta \dot{x}_\nu = \delta \dot{x}_\nu + \ddot{x}_\nu \Delta t = d(\delta x_\nu)/dt + \ddot{x}_\nu \Delta t \tag{2.7}$$

在关系式(2.5)中，Δt为时间 t 的任意函数，该函数无穷小，并且可微．因此

$$(\Delta F)^{\cdot} = (\delta F)^{\cdot} + \ddot{F}\Delta t + \dot{F} d(\Delta t)/dt \tag{2.8}$$

所以

$$d(\Delta x_\nu)/dt = d(\delta x_\nu)/dt + \ddot{x}_\nu \Delta t + \dot{x}_\nu d(\Delta t)/dt \tag{2.9}$$

因此，对于x和时间 t 的任意函数，‘δ’和‘d’可交换，而‘Δ’和‘d’不可交换．但应注意到，对于独立变量t，关系式 $d(\Delta t) = \Delta(dt)$ 总是成立的．此外，分别对(2.3) 和(2.5)取Δ和δ-变分，并代换所得结果，可导出δ和Δ是可以互相交换的．

现在，我们把这些结果转换为 Poincaré 形式．为此，在(2.6)中，我们取$F=G$，并利用(1.1)给出的G和δG，得

$$\Delta G = (\Delta T) X_0 G + (\omega_\nu + \eta_\nu \Delta t) X_\nu G \tag{2.10}$$

为了使符号统一，记 $x_0 = t$，$\eta_0 = \dot{x}_0 = 1$，并考虑$(n+1)$个变量 x_0，x_1，…，x_n 的空间，定义无穷小位移算子的关系式(1.2)，可用简单的形式写为

$$X_\mu = \xi_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad \xi_0^0 = 1, \quad \xi_\nu^0 = 0 \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \cdots, n) \tag{2.11}$$

我们记

$$\omega_0 = \Delta, \quad \Delta x_0 = \Delta t = \Omega_0 \tag{2.12}$$

并由关系式[1]

$$\Omega_\mu = \omega_\mu + \eta_\mu \Omega_0 \tag{2.13}$$

引进与异步变分对应的新参数，利用(2.10)～(2.13)，(1.1)式可写为如下形式：

$$dG = [\eta_\mu X_\mu G] dt, \qquad (\Delta G = \Omega_\mu X_\mu G) \tag{2.14}$$

其中参数$\Omega_\mu (\mu = 0, 1, 2, \cdots, n)$设为$C^2$类函数．

在(2.6)式中，如果令$F = \eta_\nu$，可得到

$$\Delta \eta_\nu = \delta \eta_\nu + \dot{\eta}_\nu \Omega_0 \tag{2.15}$$

其中，$\delta\eta_\nu$(已由(1.4)式给出)和$\Delta\eta_\nu$为实位移参数的同步和异步变分．为了得到异步变分(1.4)形式的变换关系，我们将最后结果代入(1.4)式，并利用关系式(2.3)得

$$\Delta \eta_\nu = \dot{\Omega}_\nu - \eta_\nu \dot{\Omega}_0 + C_{q r}^{\nu} \eta_q \Omega_r + C_{0 q}^{\nu} \Omega_q \tag{2.16}$$

上式即为用可能位移的新参数Ω表示的实位移参数的异步变分 $\Delta\eta_\nu$．下面，我们将应用这些结果来得出所需的推广．

我们知道[10]，对完整动力系统，δ-变分和积分过程可互换，而由上述分析，运算‘Δ’和微分‘d’的不可交换性又意味着运算‘Δ’和积分的不可交换性．具体来说，甚至通常对完整系统，

$$\Delta \int_{t_1}^{t_2} (\quad) dt \neq \int_{t_1}^{t_2} \Delta(\quad) dt \tag{2.17}$$

现在我们证明如下引理：

引理 设J为一个由积分

$$J = \int_0^t f dt \tag{2.18}$$

定义的函数，其中f是分量η_ν，x_ν的任意函数，也可能是时间 t 的任意函数，则函数J的异步变分ΔJ由下式给出

$$\Delta J=\Delta\int_0^t fdt=\int_0^t\left(\Delta f+f\frac{d}{dt}\Omega_0\right)dt \tag{2.19}$$

证明 为证明这一结论，根据(2.6)的定义，我们取变量x_p和时间t的函数J，进行Δ-变分得

$$\Delta J=\Delta\int_0^t fdt=\delta J+\dot{J}\Omega_0$$

或

$$\Delta\int_0^t fdt=\delta\int_0^t fdt+f\Big|_0^t\Omega_0 \tag{2.20}$$

其中，δJ是J的同步变分。

现在考察

$$\int_0^t\Delta fdt=\int_0^t(\delta f+f\Omega_0)dt=\int_0^t(\delta f)dt+\int_0^t\left(\frac{df}{dt}\Omega_0\right)dt$$

由分部积分，得

$$\int_0^t\Delta fdt=\int_0^t\delta fdt+f\Big|_0^t\Omega_0-\int_0^t f\frac{d}{dt}(\Omega_0)dt \tag{2.21}$$

由于δ-运算和积分的可交换性，从(2.21)和(2.20)可导出所需的结果(2.19)。

三、广义 Poincaré-Cartan 积分不变量

在这一节，我们将通过Poincaré参数来探讨保守完整动力系统的积分不变量，该系统由Lagrange函数$L(x_p,\ \eta_p,\ t)$表示，其运动由方程(1.10)与(1.11)的PH-系统决定。

考虑系统沿着P_1和P_2两点间的实（实际的）轨迹运动，P_1和P_2两点分别对应时间t的初始时刻t_1和终止时刻t_2。我们假设由Δ-变分确定不同的路径，该变分在运动的初始时刻和终止时刻，不仅坐标不相同而且时间t也不相同。我们定义作用

$$S=\int_{t_1}^{t_2}Ldt \tag{3.1}$$

其积分上限和下限随时间而变。设 Lagrange 函数已定义，并对所有自变量是连续的。将(3.1)式写为如下形式

$$S=\int_0^{t_2}Ldt-\int_0^{t_1}Ldt$$

若按照(2.14)进行Δ-变分，并利用引理(2.18)及$f=L$，由于函数L的连续性，则最终结果可设为

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}(\Delta L+L\dot{\Omega}_0)dt \tag{3.2}$$

应用公式(2.14)和(2.15)，我们得

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial\eta}(\delta\eta_p+\dot{\eta}_p\Omega_0)+\Omega_\mu X_\mu L+L\dot{\Omega}_0\right]dt$$

鉴于(1.4)，上式变为

$$\Delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial\eta_p}\dot{\omega}_p+L\dot{\Omega}_0\right)dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\left[\Omega_\mu X_\mu L+\frac{\partial L}{\partial\eta_p}\left(\dot{\eta}_p\Omega_0+C_{0p}^{q}\omega_q+C_{qr}^{p}\eta_q\omega_r\right)\right]dt$$

对最终结果右边部分的第一积分进行分部积分，并应用关系式(2.13)，我们求得

$$\Delta S=\frac{\partial L}{\partial \eta_\nu}\Omega_\nu+\Omega_0\left(L-\eta_\nu\frac{\partial L}{\partial \eta_\nu}\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left[\omega_\nu\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_\nu}+\Omega_0\frac{dL}{dt}\right.$$

$$\left.-\Omega_\mu X_\mu L-\frac{\partial L}{\partial \eta_\nu}\left(\dot{\eta}_\nu\Omega_0+C_{0r}^{\nu}\omega_r+C_{qr}^{\nu}\eta_q\omega_r\right)\right]dt \tag{3.3}$$

考虑到关系式(1.8)、(1.9)及(2.13)，该式简化为

$$\Delta S=(y_\nu\Omega_\nu-H\Omega_0)\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \eta_\nu}-C_{0\nu}^{r}\frac{\partial L}{\partial \eta_r}-C_{q\nu}^{r}\eta_q\frac{\partial L}{\partial \eta_r}-X_\nu L\right)dt$$

对于系统的实际运动，由方程(1.7)的有效性，函数S的变分ΔS可表示为：

$$\Delta S=(y_\nu\Omega_\nu-H\Omega_0)\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{3.4}$$

其中Hamilton函数H，沿系统的实际轨迹求解．如用$-y_0$表示，则函数S的异步变分ΔS，可以写成更简洁的形式

$$\Delta S=y_\mu\Omega_\mu\Bigg|_{t_1}^{t_2}\qquad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.5}$$

在公式(2.14)中，如果取$G=x_\nu$，可得

$$\Delta x_\nu=\Omega_\mu X_\mu x_\nu\qquad (\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.6}$$

借助(2.10)，我们很容易看出Ω_μ是Δx_μ的线性组合，即

$$\Omega_\mu=\zeta_\nu^\mu\Delta x_\nu \tag{3.7}$$

这里$\|\zeta_\mu^\nu(x_\lambda)\|$是矩阵$\|\xi_\nu^\mu(x_\lambda)\|$的逆阵．鉴于式(3.6)和(3.7)，变分方程(3.5)变为

$$\Delta S=y_\nu^*\Delta x_\nu\Bigg|_{t_1}^{t_2} \tag{3.8}$$

其中，$y_\nu^*=\zeta_\nu^\mu y_\mu$．方程(3.8)以简单的形式给出了在$(2n+1)$个变量$(x_1,\ \cdots,\ x_n;\ y_1,\ \cdots,\ y_n;\ t)$的扩充相空间中，函数$S$的变分．该式可应用于这种类型的任何函数．

现在我们讨论在该空间中，由$(2n+1)$个变量$(x_1,\ \cdots,\ x_n;\ y_1,\ \cdots,\ y_n;\ t)$确定其构形的系统的运动．注意到在初始时刻$t_1$，对应于$x$和$y$不同的初始值，可获得一个初始点集．通过每一点又可导出满足条件(3.5)的适当实路径，并给出末时刻t_2各实路径末端的终点集的增长．如果初始点集构成一个闭曲线C_1，那么相应地终点集也将构成一个闭曲线C_2，给出管状实轨迹．

于是(3.5)沿着从C_1到C_2的闭曲线C(即C_1上的初始点在任意时刻t的轨迹）积分，得

$$0=\oint_C\Delta S=\oint_C\left\{(y_\nu\Omega_\nu)\Bigg|_{t_1}^{t_2}\right\}=\oint_C[y_\nu^2\Omega_\nu^2-y_\nu^1\Omega_\nu^1]$$

式中，y_ν^1，y_ν^2，Ω_ν^1，Ω_ν^2分别是y和Ω在时刻t_1和时刻t_2的值．由于运动的连续性，最终结果可写为

$$\oint_{C_1}y_\nu\Omega_\nu=\oint_{C_2}y_\nu\Omega_\nu$$

由上式导出沿闭围道C的积分

$$I=\oint_C(y_\nu\Omega_\nu-H\Omega_0)$$

该积分在系统变形的任意位移时，保留不变量．这样我们已证明了如下定理：

定理1 沿任意闭曲线C的线积分

$$I=\oint_C(y_\nu\Omega_\nu-H\Omega_0) \tag{3.9}$$

在由方程(1.10)与(1.11)所共同确定的保守完整动力系统运动的实轨迹管路曲线C发生任意

变形的情况下，保留不变量。

我们注意到，积分(3.9)是Poincaré-Cartan积分不变量的广义形式。由于这些积分的不变性，可导出它们与Hamilton系统的关系，所以这些积分在分析动力学的研究中是十分重要的。

四、Hamilton 系统与 Poincaré-Cartan 积分不变量

在下文中，我们将讨论积分(3.9)的不变量性质的重要性，证明在上节建立定理的逆定理。值得一提的是我们省却了繁琐的参数符号，并应用在第二节中得出的异步变分的性质。

现在，我们考虑在变量(x_p, y_p, t)的相空间中，动力系统的运动.假设广义 Poincaré-Cartan积分相对于系统的实轨迹管路是不变的，该系统的运动由如下方程确定

$$\eta_p=\psi_p(x_q, y_q, t) \tag{4.1}$$

$$\dot{y}_p=\phi_p(x_q, y_q, t) \tag{4.2}$$

其中ψ_p和ϕ_p为已知任意函数。

根据(2.14)，沿实轨迹管路积分(3.9)的不变性，意味着

$$dI=0 \tag{4.3}$$

由运动方程(4.1)～(4.2)，有

$$\begin{aligned}0&=d\oint_C(y_p\Omega_p-H\Omega_0)\\&=\oint_C(dy_p\Omega_p+y_pd\Omega_p-dH\Omega_0-Hd\Omega_0)\end{aligned}$$

考虑关系式(2.16)后，整理上式各项，调整重复指标，上式成为

$$\begin{aligned}0=\oint[&\{dy_p-(C^q_{0p}y_r-C^r_{qp}\eta_py_r)dt\}\Omega_p+(y_p\Delta\eta_p)dt\\&+y_p\eta_pd\Omega_0-\Omega_0dH-Hd\Omega_0]\end{aligned} \tag{4.4}$$

由关系式$d(\Delta t)=\Delta(dt)$和(2.12)，有

$$Hd\Omega_0=Hd(\Delta t)=H\Delta(dt)=\Delta(Hdt)-\Delta Hdt$$

和

$$y_p\eta_pd\Omega_0=y_p\eta_pd(\Delta t)=y_p\eta_p\Delta(dt)=\Delta(y_p\eta_pdt)-\Delta(y_p\eta_p)dt$$

将以上两结果代入(4.4)中，并将获得的结果化简，可得

$$\begin{aligned}0=\oint_C\Big[&\{dy_p+(X_pH-C^q_{0p}y_q-C^r_{qp}\eta_qy_r)dt\}\Omega_p\\&+\{-dH+(X_0H-C^q_{0p}\eta_py_q)dt\}\Omega_0+\Big\{\Big(\frac{\partial H}{\partial y_p}\\&-\eta_p\Big)dt\Big\}\Delta y_p\Big]+\oint_C\Delta\{(y_p\eta_p-H)dt\}\end{aligned}$$

由于运动用完全任意的闭曲线C描述，故最后的积分等于零。考虑到(4.1)～(4.2)，得

$$\begin{aligned}0=\oint_C[&(\phi_p+X_pH-C^q_{0p}y_q-C^r_{qp}\eta_qy_r)\Omega_p+\Big(\frac{\partial H}{\partial y_p}\\&-\psi_p\Big)\Delta y_p+(-\dot{H}+X_0H-C^q_{0p}\eta_py_p)\Omega_0]dt\end{aligned}$$

为了使方程(4.1)～(4.2)对任意Ω_0，Ω_p和Δy_p总能满足异步变分，那么它们每一个的系数都必须为零。即

$$\psi_p=\frac{\partial H}{\partial y_p},\ \ \phi_p=-X_pH+C_{0p}^q y_q+C_{qp}^r\eta_q y_r \tag{4.5}$$

和

$$-\dot{H}=-X_0H+C_{0p}^q\eta_p y_p=-\frac{\partial H}{\partial t}-\xi_0^p(x_q)\frac{\partial H}{\partial x_p}+C_{0p}^q\eta_p y_q \tag{4.6}$$

上式的最后结果，利用了(1.2)式.

重要的是应注意，确定系统位形的一组变量x_1，x_2，…，x_n，受以下形式的完整关系约束

$$u_i=u_i(x_p,\ t) \tag{4.7}$$

其中$u_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是Lagrange坐标，实位移参数$\eta_p$由非齐次关系[4]定义：

$$\eta_p=A_{pq}\dot{x}_p+A_{p0} \tag{4.8}$$

其中，系数A_{pq}和A_{p0}取决于x和时间t. 如[1]所论，显而易见ξ_0^q由以下关系给出

$$\xi_0^q=-A_{p0}\xi_p^q(x_r,\ t) \tag{4.9}$$

这里，$\xi_p^q(x_r,\ t)$为矩阵$\|A_{pq}\|$的逆.

根据以上分析，可以得出，保守完整动力系统的Hamilton函数不总是等于总能量. 从关系式(4.6)可看出，由于在变换方程(4.7)及关系式(4.9)中时间的显式存在，显然，系统的Lagrange函数及Hamilton函数都包含时间t. 因此，Hamilton函数H不是系统运动的常量. 为了使Hamilton函数H成为一个恒定能量，需要以下条件：

a.关系式(4.7)必须不显含时间t.

b.关系式(4.8)必须是齐次的[12]，并且系数A_{pq}必须仅是x_p的函数，就是说ξ_q^p也与时间无关，并且对所有的p

$$A_{p0}=0 \tag{4.10}$$

在上述条件下，我们可得

$$\xi_0^q=0,\ \ X_0=\frac{\partial}{\partial t},\ \ (X_0,\ X_p)=0=C_{0p}^q X_q \tag{4.11}$$

即是所有的C_{0q}^q为零.

于是，由关系式(4.6)可得出，只要满足条件(a)和(b)，Hamilton 函数就是保守完整系统运动的恒量. 上述讨论可总结为如下定理：

定理2 如果沿实轨迹管路任意闭曲线C变形下线积分(3.9)不变，只要关系式(4.10)和(4.11)成立，那么,保守的完整系统的运动即由Poincaré-Hamilton方程(1.10)和(1.11)共同确定.

值得注意的是：定理 1 和定理 2 提供了积分不变量理论与 Hamilton 系统理论相结合的必要和充分条件. 如[2, 14]所说，在分析动力学中，在为Hamilton动力学提供又一基础的意义上，这些积分是非常重要的.

五、Poincaré 线性积分不变量的推广

现在，如上节建立结果的特殊情况一样，着手进行著名的Poincaré定理[11]的推广. 为了达到此目的,我们假设在研究中的变分是同步的,就是说$\Omega_0=\Delta t\equiv 0$.根据(2.13)和(2.15)，得出$\Omega_p=\omega_p$和$\Delta\eta_p=\delta\eta_p$. 从而$\Delta\equiv\delta$，所以$d\delta=\delta d$成立. 在该条件下，我们可以重新陈述定

理1如下：

定理3 沿由系统的同时状态组成的任何闭曲线C的线积分

$$I_1=\oint_C y_\nu\omega_\nu \tag{5.1}$$

不随保守完整动力系统的实轨迹管路曲线的变形而变化，该系统由Poincaré-Hamilton方程(1.10)与(1.11)所描述.

定理的证明与第三节和第四节所讨论的方法类似，并且不需要第二节中的引理. 积分(5.1)的不变量可在$2n$个变量(x_ν, y_ν)的相空间运动的动力系统的同时状态下获得. 同时还要用到以下条件；与关系式(2.17)相反，δ-运算和积分可相互交换，并且关系式(1.14)成立.

根据同步变分的条件，我们可得到定理3的逆定理如下：

定理4 如果(5.1)给出的线积分I_1，在保守完整动力系统的同时状态下构成的沿实轨迹管路的任何闭曲线C任意变形时，保留不变量，只要关系式(4.10)和(4.11)成立，那么系统的运动即由Poincaré-Hamilton方程(1.10)与(1.11)确定.

为了说明以上四个定理中表述的结果的重要性，作为定理的特殊情况，我们给出一些熟知的结果.

(i)假设所有的x均为Lagrange坐标，并且η是广义速度. 在此情况下，关系式(2.3)可简化为Vujanovic在[13]中所给结果，同时X_ν变为$\partial/\partial x_\nu$，从而所有的$C^{\delta}_{0\nu}$和$C^{\nu}_{\gamma q}$均为零. 由此导出了与Cantmacher，Pars和Whittaker在[8]，[11]和[14]中所给的相同结果.此外，关系式(2.13)也变为Vujanovic在[13]中所给出的关系式.

(ii)如果这组变量是拟变量（非完整坐标）π，那么，η就成为不可积的广义速度线性组合，因而X_ν取为$\partial/\partial\pi_\nu$形式，且所有的$C^{\nu}_{\delta\nu}$取为Hamel-Boltzmann三指标的形式$\gamma^{\nu}_{\gamma q}$. 这时，本文定理又包括了Dobronravove在[6]中所给出的结果.

致谢 作者感谢大学联合会(Association of Commonwealth Universities)为本人提供了联合王国，科芬特里，瓦立克大学(University of Warwick, Coventry, U. K.)数学研究所非线性系统实验室工作的机会. 并衷心感谢研究所及研究所全体同事对作者工作的支持及帮助.

参考文献

[1] Ahmed, N., Some problems in the dynamics of nonholonomic systems, Ph. D. Thesis, Quadi-i-Azam University, Islamabad, Pakistan (1986).

[2] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Glasical Mechanics*, Springer-Verlag, New York Inc. (1978).

[3] Benavent, R., Poincaré-Cartan integral invariant for constrained system, *Ann. Phys.*, **118**(2) (1979), 476—489.

[4] Cetaev, N. G., On the equations of Poincaré, *Prikl. Mat. Meh.*, **5** (1941), 253—262.

[5] Djukic', Dj. S., Integral invariants in classical nonconservative mechanics, *Acta Mechanica*, 23(3) (1975), 291—296.

[6] Dobronravove, V. V., Integral-invariants of the analytical mechanics in nonholonomic coordinates, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, XLVI (1945), 196—199.

[7] Duan, L. and L. Young, About basic integral variants of holonomic nonconservative dynamical systems, *Acta Mechanica Sinica*, 7(2) (1991), 178—185.

[8] Gantmacher, F. R., *Lectures in Analytical Mechanics*, Mir Publishers, Moscow (1970).

[9] Ghori, Q. K. and M. Hussain, Generalization of Hamilton-Jacobi theorem, *Z. Angew. Math. Phys.*, **25** (1974), 536—540.

[10] Ghori, Q. K. and N. Ahmed, Hamilton's principle for nonholonomic systems, *Z. Angew. Math Mech.*, **74**(2) (1994), 137—140.

[11] Pars, L. A., *A Treatise on Analytical Dynamics*, Heinemann London (1968).

[12] Poineré, H., Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **123** (1901), 369—371.

[13] Vujanovic, B., Conservation laws of dynamical systems via d'Alember's principle, *Int. J. Non-Linear Mech.*, **13** (1978), 185—197.

[14] Whittaker, E. T., *A Treatise on Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge University Press (1927).

Integral Invariants of a Holonomic Dynamical System

Naseer Ahmed

(*Mathematics Department, Quaid-i-Azam University, Islamabad, Pakistan*)

Abstract

This paper uses Poincaré's formalism to study the integral invariants of a conservative holonomic dynamical system. Introducing new parameters for the asynchronous variation, a generalization of the Poincaré and Poincaré-Cartan integral invariants is presented.

Key words analysis mechanics, holonomic dynamical system, integral invariants, synchronous, asynchronous