

# 非定常沿岸波流的有限单元分析(I) ——数学模型\*

吴伟雄

(上海 同济大学结构理论研究所, 1994年3月6日收到)

## 摘 要

本文提出了一个预测由风和波流相互作用所产生的非定常近海波流的数学模型, 其基础方程组中除了传统的连续性方程、动量方程、能量方程外, 还引进了色散方程及折射方程。同时, 在基础方程组中本文还分析了横向剪应力、风的应力、辐射应力及海底摩擦应力的作用, 因而期望它能较全面和较精确地反映波流相互作用的规律。在(I)中将给出二步显含有限单元法及几个计算例子。

**关键词** 数学模型 有限元法 非定常波流 近海波流

## 一、引 言

近年来, 随着海洋资源的开发利用, 以及随之而来对环境的影响, 人们迫切需要能预测波流及海底沉淀物迁移规律的方法, 建立有关数学模型及进行实际的计算机模拟就是解决这个问题的重要方法之一, 这对于海洋运输, 码头及水上设施的建设, 海底资源的开发以及海洋污染的防治等方面都具有重要的意义。正因为如此, 海岸线较长的国家, 如日本, 对这一工作都给予高度的重视。

至今已有不少学者提出了多种数值计算模型。Birkemeier 及 Dalrymple<sup>[1]</sup>采用有限差分法来预测风和波所引起的近海环流, Nada<sup>[2]</sup>等人基于波角及波能的方程, 提出了定常的沿岸流有限差分法, 最近, Kawahara<sup>[3]</sup>等人提出了一种有限单元法, 能同时分析波、流及泥沙的迁移。

本文提出了另一种数学模型, 能同时分析海风、波流及沉淀物的迁移, 除了Kawahara等人的方法中所包含的基础方程外, 本文还考虑了波的折射及色散的影响, 因而藕合了折射方程及色散方程。同时, 在动量方程中除了考虑波的辐射应力外, 还包括了海风在波的表面所产生的应力, 底部的摩擦应力以及湍流波动的横向剪应力。以上的努力是企图得到一个更为全面及精确的数学模型。所得出的模型已经用有限元方法实现, 并编成 Fortran 语言的计算机程序, 对若干例子计算的结果能清楚地说明观察的现象。

\* 吴家龙推荐。

1987年3月27日第一次收到。

## 二、基础方程式

### 1. 连续性方程

如图1所示,若 $\eta$ ,  $h$ ,  $H$ 分别表示水位、水深及波高,当对波的一个周期进行时间平均及对深度从 $z=-h(x, y, t)$ 到 $z=\eta(x, y, t)$ 平均后,则由质量守恒定律,可得如下的二维连续性方程:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uD) + \frac{\partial}{\partial y}(vD) = 0 \quad (2.1)$$

其中 $D=\eta+h$ , 而 $u$ ,  $v$ 分别表示水流速度的 $x$ ,  $y$ 分量。

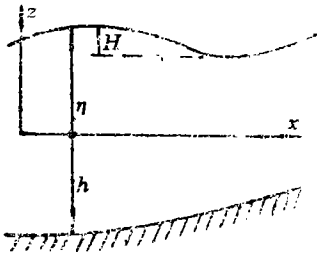


图1 波流方程的几何表示

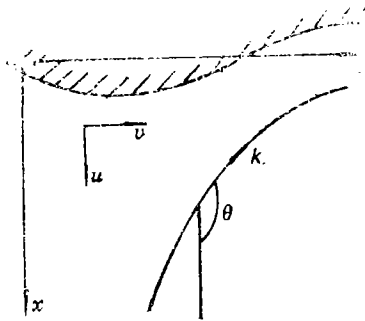


图2 波角 $\theta$ 及波数向量 $k$ 定义图

### 2. 动量方程

在对水深的积分及对一个波周期的时间平均的假定下, $x$ 及 $y$ 的水平动量方程分别为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{1}{\rho D} \left( \frac{\partial s_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yy}}{\partial y} \right) \\ + \frac{1}{\rho D} \tau_{wx} - \frac{1}{\rho D} \tau_{bx} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{1}{\rho D} \left( \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial s_{yx}}{\partial y} \right) \\ + \frac{1}{\rho D} \tau_{wy} - \frac{1}{\rho D} \tau_{by} \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中, $\rho$ 为水的密度, $g$ 为重力加速度。

上面二式中的 $\tau_x$ ,  $s_{ij}$ ,  $\tau_{wi}$ ,  $\tau_{bi}$ 分别和横向剪应力、辐射应力、风的应力及底部摩擦应力有关。

#### (1) 辐射应力

Longuet-Higgins<sup>[4]</sup>曾经指出,对于线性的小振幅的前进波,其辐射应力可由下式表示:

$$\left. \begin{aligned} s_{xx} &= E \left\{ \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \cos^2 \theta + \left( n - \frac{1}{2} \right) \sin^2 \theta \right\} \\ s_{yy} &= E n \cos \theta \sin \theta \\ s_{xy} &= E \left\{ \left( 2n - \frac{1}{2} \right) \sin^2 \theta + \left( n - \frac{1}{2} \right) \cos^2 \theta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中 $E$ 为波的能量,  $\theta$ 为波角. 若 $k$ 表示波数向量(见图2), 则 $n$ 可表示如下:

$$n = \{1 + 2kh/\sinh(2kh)\}/2 \quad (2.5)$$

### (2) 风的应力

当我们考虑风在波的表面所产生的应力时, 可取如下的形式<sup>[5]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{wx} &= \gamma^2 \rho_a \omega^2 \cos\varphi \\ \tau_{wy} &= \gamma^2 \rho_a \omega^2 \sin\varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

其中 $\omega$ 是风速,  $\rho_a$ 是空气的密度,  $\varphi$ 是风和 $x$ 轴之间的夹角,  $\gamma^2$ 是风的应力系数, 近似取为 $0.0026^{[5]}$ .

### (3) 底部摩擦应力

在波及流共存的情况下, 底部摩擦应力与波轨速度和流速度的瞬时合成有关, 这时, 它在 $x$ 及 $y$ 方向的分量可由下式近似表示:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{bx} &= f\{v\sin\theta\cos\theta + u(1 + \cos^2\theta)\} \\ \tau_{by} &= f\{v(1 + \sin^2\theta) + u\sin\theta\cos\theta\} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

其中 $f$ 表示底面摩擦系数.

### (4) 横向剪应力

由湍流的波动引起横向剪应力 $\tau_i$ 由下式表示:

$$\tau_i = -\rho \left( e_y \frac{\partial u}{\partial y} + e_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.8)$$

其中 $e_x$ 及 $e_y$ 为混合系数:

$$\left. \begin{aligned} e_x &= Nx\sqrt{gh} \\ e_y &= \text{常数} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$N$ 为经验参数,  $0 \leq N \leq 0.016$ .

## 3. 能量方程

能量方程可以通过波高 $H$ 表示如下:

$$E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \quad (2.10)$$

其中 $H$ 满足如下的方程

$$\begin{aligned} \frac{2}{H} \frac{\partial H}{\partial t} + (u + c_g \cos\theta) \frac{2}{H} \frac{\partial H}{\partial x} + (v + c_g \sin\theta) \frac{2}{H} \frac{\partial H}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ - c_g \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial c_g}{\partial x} + c_g \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial c_g}{\partial y} + Q = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

上式中 $c_g$ 表示波群速度:

$$c_g = c\{1 + 2kh/\sinh(2kh)\}/2 \quad (2.12)$$

$$c = \{g \cdot \tanh(kh)/k\}^{1/2} \quad (2.13)$$

$$Q = \frac{1}{E} \left\{ s_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + s_{yy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + s_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \quad (2.14)$$

#### 4. 色散方程

根据波数向量  $\mathbf{k}$  的定义

$$\mathbf{k} = \nabla\phi \quad (2.15)$$

即  $\mathbf{k}$  是波的位相函数  $\phi$  的梯度, 由此立即可得

$$\nabla \times \mathbf{k} = 0 \quad (2.16)$$

在平面波的场合, 设  $\mathbf{k} = k(\cos\theta, \sin\theta)$ , 由 (2.15) 式立即可得色散方程:

$$\frac{\partial(k\cos\theta)}{\partial y} - \frac{\partial(k\sin\theta)}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

#### 5. 折射方程

由经典的波守恒方程

$$\partial/\partial t + \nabla \bar{\sigma} = 0 \quad (2.18)$$

其中  $\bar{\sigma}$  是波的标量频率, 当波在速度为  $\mathbf{u} = (u, v)$  的流中传播时,

$$\bar{\sigma} = \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \quad (2.19)$$

其中  $\sigma$  是相对于运动参考系的波频.

在波数场  $\mathbf{k}$  改变缓慢的情况下,  $\partial\mathbf{k}/\partial t \approx 0$ , 由 (2.18) 式可知  $\nabla \bar{\sigma} = 0$ , 再由 (2.19) 式, 我们有:

$$\nabla(\sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (2.20)$$

这就是说,  $\sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$  是个常数. 这个常数可由  $\mathbf{u} = 0$  时的情况求得, 这时  $\sigma = 2\pi/T$ , 其中  $T$  为波的周期, 因此我们可得:

$$\sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 2\pi/T \quad (2.21)$$

再由色散关系:

$$\sigma^2 = gk \cdot \tanh(kh) \quad (2.22)$$

我们立即可得如下的折射方程

$$\{gk/\tanh(kh)\}^{1/2} + uk\cos\theta + vk\sin\theta = 2\pi/T \quad (2.23)$$

### 三、浅海波场合基础方程的简化

以上的偏微分方程组相当复杂, 为了便于数值计算及减少CPU时间, 在浅海波的场合, 色散方程及折射方程可进一步简化.

在浅水波的情况, 由于  $\xi = kh$  较小, 因而可作如下的近似:

$$\tanh(\xi) \approx \xi, \quad \sin\xi \approx \xi \quad (3.1)$$

把上式代入 (2.23) 式, 经整理后可得:

$$k = \frac{2\pi/T}{(gh)^{1/2} + u\cos\theta + v\sin\theta} \quad (3.2)$$

上式分别对  $x$  及  $y$  求偏导数可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= -\frac{2\pi/T}{[(gh)^{1/2} + u\cos\theta + v\sin\theta]^2} \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{g/h} \frac{\partial h}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \cos\theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial v}{\partial x} - (u\sin\theta - v\cos\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= -\frac{2\pi/T}{[(gh)^{1/2} + u\cos\theta + v\sin\theta]^2} \left\{ \frac{1}{2}\sqrt{g/h} \frac{\partial h}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \cos\theta \frac{\partial u}{\partial y} + \sin\theta \frac{\partial v}{\partial y} - (u\sin\theta - v\cos\theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

上式代入 (2.17) 式后经整理即得新的色散方程:

$$\{(gh)^{1/2}\cos\theta + u\} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \{(gh)^{1/2}\sin\theta + v\} \frac{\partial \theta}{\partial y} + p = 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\sqrt{g/h} \left( \cos\theta \frac{\partial h}{\partial y} - \sin\theta \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \cos\theta \left( \sin\theta \frac{\partial u}{\partial x} - \cos\theta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &\quad - \sin\theta \left( \sin\theta \frac{\partial v}{\partial x} - \cos\theta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

#### 四、结 论

至此, 我们得到了一组描述波流相互作用的偏微分方程组, 它们由方程(2.1)、(2.2)、(2.3)、(2.11)、(2.17)及(2.23)组成。这组方程组除了包括传统的连续性方程、动量方程及能量方程之外<sup>[3]</sup>, 还包含了色散方程及折射方程。同时, 由于在动量方程(2.2)、(2.3)中包括了 $s_{ij}$ ,  $\tau_i$ ,  $\tau_{wi}$ 以及 $\tau_{bi}$ 项, 因而反映了辐射应力、风的应力、底面摩擦应力以及横向剪应力对系统的影响。因此, 可以期望本文报导的数学模型能更全面及准确地预测波流相互作用的规律。

第二部分将报导基本方程的有限元形式化及其若干计算例子。

致谢 本文的部分工作是大坂市海上国际机场环境预测研究的一部分, 曾得到日本CSK计算机公司技术本部神田博士的指导, 在此表示衷心的感谢。

#### 参 考 文 献

- [1] Birkemeir, W.A. and R.A. Dalrympe, Nearshore water circulation induced by wind and waves, *Proc. of the Symposium on Modeling Technique*, ASCE (1975).
- [2] Noda, E.K., C.T. Sonu, V.C. Rupert and J.I. Collins, Nearshore circulations under sea breeze conditions and wave-current interactions in the surf zone, Tetra Tech Report TC-149-4, February (1974).
- [3] Kawahara, Mutsuto, Kazuo Kashiyama and Yasuro Iriye, Finite element analysis of coastal process, *Finite Element Flow Analysis*, Tokyo University Press (1982).
- [4] Longuet-Higgins, M.S. and R.M. Stewart, Radiation stress and mass transport in gravity waves with application to surf beats, *Journal of Fluid Mechanics*, 13 (1962), 481—504.
- [5] Connor, J.J. and C.A. Brebbia, *Finite Element Techniques for Fluid Flow*, Butterworth & Co. (Publishers) Ltd, (1976).

# Finite Element Analysis for the Unsteady Nearshore Circulation Due to Wave-Current Interaction ( I ) ——Numerical Model

Wu Wei-xiong

(*Tongji University, Shanghai*)

## Abstract

In this paper, a numerical model for predicting the unsteady nearshore circulation due to wave-current interaction was proposed. In addition to the traditional continuity, momentum and energy equations, the dispersion and refraction relations were included in the governing equations. Moreover, the effects of lateral shears, wind, radiation and bottom stresses were analysed in the governing equations. Therefore, we expect that this model may more completely and exactly reflect the law of wave-current interaction.

In part ( I ) we will adopt the selective lumping two-step explicit finite element method to solve the model, and some examples will be presented.

**Key words** numerical model, finite element method, unsteady circulation, near shore circulation