应用数学和力学，第15卷第8期（1994年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

瞬态波的高精度开路边条件*

邹光远

（北京大学力学系，1993年5月24日收到）

摘　要

文献[2～4]提出了一种用于瞬态波的自适应开路边条件(AOBC)，克服了已有的开路边条件(OBC)应用范围狭窄的困难，可以适用于来波入射角在任意范围内变化的情况．本文则是以其中的一阶AOBC为基础，构造了一类新的高阶AOBC．并证明在所有同阶OBC中，只有这类AOBC才具有最高阶精度，而所有其它同阶的OBC的精度都要比它低．

关键词　自适应　开路边条件　最佳精度

一、引　言

在数值求解无限域中的物理问题时，人们需要适当选取人为边界，将无限域截断成一个有限的计算区域．这里的关键是如何在人为边界上给定一个合适的边条件，即开路边条件．

正如Givoli所指出的，构造OBC，通常有"连续式"和"离散式"两类．当前所提供的各类OBC主要是连续式的．而连续式又可分为"局部式"和"非局部式"两种[1]．局部式由于只含微分运算和代数运算，在离散时只需将一点和其在时、空两方面邻近的点联系在一起，因而比较简单方便，计算量也较小．但已有的一些局部式的一个最主要的问题是使用范围狭窄，只在一些固定的入射角附近才有效，因而在人为边界上的某些局部有较高的精度，而在另一些局部则精度相当差．非局部式则含有沿整个边界乃至过去全部时间过程的积分运算，从而把总体效应包含了进去，常可减轻乃至避免局部式的不足．但非局部式会将整个边界乃至边界附近的点连在一起，还可能要求保留边界附近整个时间过程中的资料，因而增加了计算的困难和工作量，使用起来并不方便，这是其不足．如何发挥这两类OBC的长处，克服其不足，就成为瞬态波OBC研究中的一个十分重要的课题．

文献[2～4]提出的自适应开路边条件(AOBC)，在克服已有各类OBC的不足方面取得了良好的效果．AOBC虽是局部式的，但由于在不同的边界点上采用了"局部瞬时等价波方向"，因而可在整个人为边界上保持有效[2～5]．本文则在此基础上，以文献[2]给出的一阶AOBC为基础，构造了一类高阶AOBC，并从理论上证明，在所有同阶OBC中，只有这类AOBC才具有最高阶精度，而同阶的任何其它形式的OBC，其精度都要比它低．

---

* 朱照宣推荐．
国家自然科学基金资助课题

值得指出的是，这类AOBC的另外的十分突出的优点在于：它们很容易推广到三维问题中去；而它们在各种曲线坐标系下的形式也不难得到；同时，只要引入"局部瞬时等价波速"的概念，这类AOBC就可以推广应用于色散波。关于这些问题，将在另文中再作详细讨论。

二、AOBC的基本思想

为了方便起见，我们以人为边界的外法向n和切向τ为两个坐标轴方向，建立直角坐标系，相应的坐标以n和τ表示。这时，对于二维二阶常系数波动方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial \tau^2}\right)=0 \tag{2.1}$$

对于外行波，有如下一般形式的解：

$$\varphi(n,\tau,t)=\iint f(n,\tau,t;s,K)\,ds\,dK \tag{2.2}$$

$$f(n,\tau,t;s,K)=A(s,K)\exp[iK(\sqrt{1-s^2}\,n+s\tau-ct)] \tag{2.3}$$

$$|s|\leqslant 1,\qquad c=\omega/K \tag{2.4}$$

Engquist和Majda将$(1-s^2)^{1/2}$在$s=0$处作Taylor展开，在分别略掉$O(s^2)$和$O(s^4)$后，得到了相应的一阶和二阶OBC[6]。由于$s=0$相应于波对人为边界是垂直入射，故这些OBC只在波近于垂直入射时才能给出满意的结果。

1984年，文献[2]提出了一种AOBC。首先，作者引入了一个局部瞬时等价波方向，或者说局部主波方向$(k_n,k_\tau)^T$，并给出了如下的一阶AOBC：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+c\left(k_n\frac{\partial\varphi}{\partial n}+k_\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)=0 \tag{2.5}$$

在人为边界附近，将波看作是局部瞬时平面外行波，由计算点及其邻近点在过去时刻已求得之φ值，可以给出k_τ，并有

$$k_n=(1-k_\tau^2)^{1/2}>0 \tag{2.6}$$

后来，作者又进一步提出了构造AOBC的一般方法。其基本思想是将Engquist和Majda方法作改进，将$(1-s^2)^{1/2}$由在$s=0$处改为在$s=k_\tau$处作Taylor展开，有[4]：

$$\begin{aligned}(1-s^2)^{1/2}=&k_n-k_\tau\Delta s/k_n-\Delta s^2/2k_n^3-k_\tau\Delta s^3/2k_n^5\\&-\Delta s^4(1+4k_\tau^2)/8k_n^7+O(\Delta s^5/k_n^9)\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中

$$\Delta s=s-k_\tau \tag{2.8}$$

利用(2.2)、(2.3)和(2.7)等式，可得：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+c\left(k_n\frac{\partial\varphi}{\partial n}+k_\tau\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)=-i\iint cK\left[\frac{\Delta s^2}{2k_n^2}+O\left(\frac{\Delta s^3}{k_n^4}\right)\right]f\,ds\,dK \tag{2.9}$$

在上式中，在略掉$O(\Delta s^2/k_n^2)$后，即可得到(2.5)式，即(2.5)式具有二阶误差。同样地，利用上述三式，在略掉$O(\Delta s^3/k_n^2)$后，则可得到二阶AOBC

$$(k_n^2-k_\tau^2/2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+c\left(k_n^3\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial n}-k_\tau^3\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\tau}\right)-\frac{c^2}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}=0 \tag{2.10}$$

应该强调指出的是，以上这些建立AOBC的基本思想，主要是由陈耀松教授提出的。对于(2.10)式，作者又进一步指出，k_n和k_τ应满足下列限制条件[5]：

$$k_n^2-k_\tau^2/2>0,\quad k_n^2\neq k_\tau^2 \tag{2.11}$$

为了求得k_τ，在每个边界点上，可以近似认为波是局部平面外行波，即应有

$$\varphi(n,\tau,t)=f(k_n n+k_\tau\tau-ct)=f(u) \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-cf'(u),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=k_n f'(u),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=k_\tau f'(u) \tag{2.13}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\varphi}{\partial n^2}=k_n^2 f''(u),\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}=k_\tau^2 f''(u),\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=c^2 f''(u)\\&\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial n}=-ck_n f''(u),\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\tau}=-ck_\tau f''(u)\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

由此可取[7]

$$k_{\tau1}=-\operatorname{sign}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\Big/\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.15}$$

$$k_{\tau2}=-\operatorname{sign}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\tau}\Big/\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial n}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial\tau}\right)^2\right]^{1/2} \tag{2.16}$$

$$k_\tau=(1-\alpha)k_{\tau1}+\alpha k_{\tau2}\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant1 \tag{2.17}$$

其中α是一个适当选定的常数。

在数值求解过程中，可利用边界点和其邻近点上已求得之φ值，按上式给定k_τ和k_n。由于$(k_n,k_\tau)^T$只是“理想的”等价波方向的一个近似，是各AOBC中“适当选定”的系数，故(2.15)和(2.16)等式只是给出了一个近似选取的方法，并不要求具有“精确的”数学含意。在进行新的一个时间层的计算时，可由过去时刻已求得的φ值，将此时的k_τ和k_n事先给定。这就是说，对于AOBC，原则上应将它们看作是变系数线性方程，而不要看作是非线性方程。

下面举例说明在差分法中k_τ的确定。以下标“i,j”表示节点的编号，它们分别沿n和τ的正向增加；以Δn，$\Delta\tau$和Δt分别表示沿n和τ的空间步长与时间步长；上标“m”表示时间层。在求$m+1$时间层的流动参量时，可取

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{i,j}^m=(\varphi_{i,j}^m-\varphi_{i-1,j}^m)/\Delta n,\quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_{i,j}^m=(\varphi_{i,j+1}^m-\varphi_{i,j-1}^m)/2\Delta\tau\\&\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{i,j}^m=(\varphi_{i,j}^m-\varphi_{i,j}^{m-1})/\Delta t\end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

$$A_{i,j}^m=\left\{\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{i,j}^m\right]^2+\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_{i,j}^m\right]^2\right\}^{1/2} \tag{2.19}$$

$$(k_{\tau1})_{i,j}^{m+1}=-\operatorname{sign}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{i,j}^m\right]\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)_{i,j}^m\Big/A_{i,j}^m \tag{2.20}$$

按同样的方式可以给定$(k_{\tau2})_{i,j}^{m+1}$，从而给定$(k_\tau)_{i,j}^{m+1}$和$(k_n)_{i,j}^{m+1}$。

三、具有最佳精度的AOBC

Higdon建议采用如下的p阶OBC[8,9]

$$\left[\prod_{j=1}^{p}\left(k_{nj}\frac{\partial}{\partial t}+c\frac{\partial}{\partial n}\right)\right]\varphi=0 \tag{3.1}$$

这里 $k_{nj}=\cos\theta_j>0$ 是凭经验针对不同问题而选取的常数．如果按照自适应方式，在不同的边界点上选定不同的θ_j，则Higdon OBC可以立即改造成AOBC．容易验证，对于 p 阶的 Higdon AOBC，其误差也是 p 阶的．

注意到由(2.5)式给出的一阶AOBC的误差是二阶的，即此一阶的 Higdon AOBC的精度高一倍．因此，如果以它为基础，仿造Higdon构造任意 p 阶 OBC 的方式，构造一类新的AOBC，可以预计这类AOBC将比相同阶的 Higdon AOBC 的精度的阶也要高出一倍．下面我们就来说明这一点，并且还要证明，在同阶的OBC中，这类AOBC 将具有最佳精度，而任何其它形式同阶OBC的精度都要比它们低．

为了书写和叙述简便，引入如下算子：

$$\left.\begin{aligned}&T=\frac{\partial}{\partial t},\quad N=\frac{\partial}{\partial n},\quad \Gamma=\frac{\partial}{\partial \tau}\\&W=T^2-c^2(N^2+\Gamma^2)=T^2-c^2\nabla^2\\&L_j=T+c\boldsymbol{k}_j\cdot\nabla\\&\boldsymbol{k}_j=(k_{nj},k_{\tau j})^T,\quad \nabla=(N,\ \Gamma)^T\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

同时我们定义与L_j对应的算子L_j^*，它在形式上与L_j完全相同．不同在于，对于这类上部带“*”的算子，$\boldsymbol{k}_p$将被当作“常量”处理．而实际上$\boldsymbol{k}_p$应是时间和τ的函数．这就是说，我们有

$$\begin{aligned}L_j^*L_p^*=L_p^*L_j^*=&T^2+(k_{nj}+k_{np})TN+(k_{\tau j}+k_{\tau p})T\Gamma\\&+k_{nj}k_{np}N^2+(k_{nj}k_{\tau p}+k_{\tau j}k_{np})N\Gamma+k_{\tau j}k_{\tau p}\Gamma^2\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$L_j^*L_p^*\varphi=L_j^*L_p\varphi=L_p^*L_j\varphi\tag{3.4}$$

在下面的讨论中，所有的算子都是相应带“*”的算子．为了简便起见，将“*”全部略掉．也就是说，在下面所有算子的乘积运算中，$\boldsymbol{k}_j$应当作“常量”处理．因此，作为$\boldsymbol{k}_j$在直角坐标系中的两个分量k_{nj}和$k_{\tau j}$也应当作“常量”处理．

由(2.9)式，有

$$L_1\varphi=-i\iint cK\left[\frac{\Delta s_1^2}{2k_{n1}^2}+O\left(\frac{\Delta s_1^3}{k_{n1}^4}\right)\right]fdsdK=O\left(\frac{\Delta s_1^2}{2k_{n1}^2}\right)\tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}L_2L_1\varphi&=-i\iint cKL_2\left\{\left[\frac{\Delta s_1^2}{2k_{n1}^2}+O\left(\frac{\Delta s_1^3}{k_{n1}^4}\right)\right]f\right\}dsdK\\&=-i\iint cK\left[\frac{\Delta s_1^2}{2k_{n1}^2}+O\left(\frac{\Delta s_1^3}{k_{n1}^4}\right)\right]L_2fdsdK\\&=-\iint c^2K^2\left[\frac{\Delta s_1^2}{2k_{n1}^2}+O\left(\frac{\Delta s_1^3}{k_{n1}^4}\right)\right]\left[\frac{\Delta s_2^2}{2k_{n2}^2}+O\left(\frac{\Delta s_2^3}{k_{n2}^4}\right)\right]fdsdK\\&=O\left(\frac{\Delta s_1^2\Delta s_2^2}{4k_{n1}^2k_{n2}^2}\right)\end{aligned}\tag{3.6}$$

即二阶AOBC

$$L_2L_1\varphi=0\tag{3.7}$$

的误差是四阶的．

用简单的归纳法立即可以证明，对于任意的 p 阶AOBC

$$\left(\prod_{j=1}^{p}L_j\right)\varphi=0\tag{3.8}$$

其误差为$2p$阶．而Higdon p 阶AOBC 的误差为 p 阶．这就是说，在这里给出的AOBC，

其精度的阶确实比同阶Higdon AOBC要高出一倍。

设H_q是按下式定义的q阶微分算子

$$H_q=\sum_{\substack{j,m,r=0\\j+m+r=q}}^{q}\beta_{j,m,r}T^jN^m\Gamma^r \tag{3.9}$$

其中系数$\beta_{j,m,r}$与T，N和Γ无关。

由于由(2.2)式给定的φ是波动方程(2.1)式之解，即满足

$$W\varphi=0 \tag{3.10}$$

因此，对$p\geqslant 2$，有

$$\left(\prod_{j=1}^{p}L_j+H_{p-2}W\right)\varphi=\left(\prod_{j=1}^{p}L_j\right)\varphi \tag{3.11}$$

即

$$\left(\prod_{j=1}^{p}L_j+H_{p-2}W\right)\varphi=0 \tag{3.12}$$

在常波速下应与(3.8)式具有同样的精度，也具有同等的使波单向通过的作用。这时，(3.8)式只是(3.12)式中$H_{p-2}=0$的特殊情况。

下面我们将要证明，在常波速下，对所有由(3.9)式定义的p阶算子所构成的OBC中，只有(3.12)式才具有使误差为$2p$阶的最高精度。

为了简便起见，在下面的讨论中，取$c=1$。由于各种$k_{\tau,j}$的差别引起的只是Δs_j的差别，而不是精度量阶的差别。因此，在讨论OBC精度的阶时，可以不必考虑这种差别。这就是说，不失证明的一般性，我们可以令

$$L_j=L,\quad \prod_{j=1}^{p}L_j=L^p,\quad \prod_{j=1}^{p}\Delta s_j=\Delta s^p \tag{3.13}$$

这时，(3.12)式变作

$$(L^p+H_{p-2}W)\varphi=0 \tag{3.14}$$

为了能将$p=1$的情况也包含进去，定义

$$H_{-1}\equiv 0 \tag{3.15}$$

对于任何一个一阶算子H_1，有

$$\begin{aligned}H_1&=\alpha_1T+\alpha_2N+\alpha_3\Gamma\\&=\left(\alpha_1-\frac{\alpha_2}{k_n}\right)T+\left(\alpha_3-\frac{k_\tau\alpha_2}{k_n}\right)\Gamma+\frac{\alpha_2}{k_n}L+H_{-1}W\end{aligned} \tag{3.16}$$

利用(2.2)、(2.3)和(2.7)等式，有

$$\begin{aligned}H_1\varphi=-i\iint K[\alpha_1-\alpha_2(k_n-k_\tau\Delta s/k_n-\Delta s^2/2k_n^3)\\-\alpha_3(k_\tau+\Delta s)]fdsdK+O(\Delta s^3/k_n^5)\end{aligned} \tag{3.17}$$

由此立即可以看出，除了$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$外，不可能有其它的解使误差为$O(\Delta s^3)$。而要保持误差为$O(\Delta s^2)$，则只有解

$$\alpha_1=a,\quad \alpha_2=ak_n,\quad \alpha_3=ak_\tau \tag{3.18}$$

这里a是一任意非0的常数。不失一般性，可取$a=1$。这表明对$p=1$，上面的结论是正确

的。

对于任意的二阶算子H_2，有

$$H_2=a_1T^2+a_2TN+a_3T\Gamma+a_4N^2+a_5N\Gamma+a_6\Gamma^2$$
$$=aW+b_{1,0}T^2+b_{2,0}T\Gamma+(b_{1,1}T+b_{2,1}\Gamma)L+b_2L^2 \tag{3.19}$$

上式中有关系数的对应关系为

$$\left.\begin{aligned}
a&=-k_\tau^2a_4+k_nk_\tau a_5-k_n^2a_6\\
b_{1,0}&=a_1-a_2/k_n+(1+k_\tau^2)a_4+k_\tau^3a_5/k_n-k_\tau^2a_6\\
b_{2,0}&=-k_\tau a_2/k_n+a_3+2k_\tau a_4-(k_n^2-k_\tau^2)a_5/k_n-2k_\tau a_6\\
b_{1,1}&=a_2/k_n-2a_4-2k_\tau a_5/k_n+2a_6\\
b_{2,1}&=-2k_\tau a_4+(k_n^2-k_\tau^2)a_5/k_n+2k_\tau a_6\\
b_2&=a_4+k_\tau a_5/k_n-a_6
\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

现在证明，对于任意一个由(3.9)式定义的$q+1$阶算子都可表作如下形式：

$$H_{q+1}=H_{q-1}W+F_{q+1}(L) \tag{3.21}$$

其中

$$F_{q+1}(L)=b_{q+1}L^{q+1}+\sum_{m=0}^{q}T^{q-m}(b_{1,m}T+b_{2,m}\Gamma)L^m \tag{3.22}$$

对$q=0$和1，这一结论已经证明了，这就是(3.16)和(3.19)两式。

现设对$q\leqslant p-1\ (p\geqslant 2)$时(3.21)式成立。在$q=p$时，对任意$p+1$阶算子$H_{p+1}$，显然总可写作

$$H_{p+1}=TH_p^{(1)}+\Gamma H_p^{(2)}+LH_p^{(3)} \tag{3.23}$$

这里$H_p^{(e)}(e=1,2,3)$均是由(3.9)式定义的p阶算子。按假设，应有

$$H_p^{(e)}=H_{p-2}^{(e)}W+b_p^{(e)}L^p+\sum_{m=0}^{p-1}T^{p-1-m}(b_{1,m}^{(e)}T+b_{2,m}^{(e)}\Gamma)L^m,\qquad e=1,2,3 \tag{3.24}$$

代此入(3.23)中，得：

$$H_{p+1}=H_{p-1}^{(1)}W+b_p^{(3)}L^{p+1}+\sum_{m=0}^{p}T^{p-m}(a_{1,m}T+a_{2,m}\Gamma)L^m$$
$$+\Gamma^2\sum_{m=0}^{p-1}b_{2,m}^{(2)}T^{p-1-m}L^m \tag{3.25}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
&a_{1,0}=b_{1,0}^{(1)},\quad a_{2,0}=b_{2,0}^{(1)}+b_{1,0}^{(2)}\\
&a_{1,m}=b_{1,m}^{(1)}+b_{1,m-1}^{(3)},\quad a_{2,m}=b_{2,m}^{(1)}+b_{1,m}^{(2)}+b_{2,m-1}^{(3)}\qquad 0<m<p\\
&a_{1,p}=b_p^{(1)}+b_{1,p-1}^{(3)},\quad a_{2,p}=b_p^{(2)}+b_{2,p-1}^{(3)}\\
&H_{p-1}^{(1)}=TH_{p-2}^{(1)}+\Gamma H_{p-2}^{(2)}+LH_{p-2}^{(3)}
\end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

由(3.19)和(3.20)两式立即可得：

$$\Gamma^2=-k_\tau^2W-k_\tau^2T^2-2k_\tau T\Gamma+(2T+2k_\tau\Gamma)L-L^2 \tag{3.27}$$

代入(3.25)中，得：

$$H_{p+1}=H_{p-1}W+b_{p+1}L^{p+1}+\sum_{m=0}^{p}T^{p-m}(b_{1,m}T+b_{2,m}\Gamma)L^{m} \tag{6.28}$$

其中

$$H_{p-1}=H_{p-1}^{(1)}-k_x^2\sum_{m=1}^{p}b_{2,m-1}^{(2)}T^{p-m}L^{m-1} \tag{3.29}$$

$$b_{p+1}=b_p^{(3)}-b_{2,p-1}^{(2)} \tag{3.30}$$

$$b_{1,p}=a_{1,p}+2b_{2,p-1}^{(2)}-b_{2,p-2}^{(2)},\quad b_{2,p}=a_{2,p}+2k_{\tau}b_{2,p-1}^{(2)} \tag{3.31}$$

$$\left.\begin{aligned}b_{1,m}&=a_{1,m}-k_{\tau}^2b_{2,m}^{(2)}+2b_{2,m-1}^{(2)}-b_{2,m-2}^{(2)}\\ b_{2,m}&=a_{2,m}-2k_{\tau}b_{2,m}^{(2)}+2k_{\tau}b_{2,m-1}^{(2)}\end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

$$b_{1,1}=a_{1,1}-k_{\tau}^2b_{2,1}^{(2)}+2b_{2,0}^{(2)},\qquad b_{2,1}=a_{2,1}-2k_{\tau}b_{2,1}^{(2)}+2k_{\tau}b_{2,0}^{(2)} \tag{3.33}$$

$$b_{1,0}=a_{1,0}-k_{\tau}^2b_{2,0}^{(2)},\qquad b_{2,0}=a_{2,0}-2k_{\tau}b_{2,0}^{(2)} \tag{3.34}$$

这表明(3.21)式在$q=p$时也成立，故对一切q成立。于是，任一$q+1$阶OBC均可写成

$$H_{q+1}\varphi=[H_{q-1}W+F_{q+1}(L)]\varphi=0 \tag{3.35}$$

且b_{q+1}和$b_{1,m}$，$b_{2,m}$($0\leqslant m\leqslant q$)中至少有一个不为0。

不难看出，

$$T^{q-m}(b_{1,m}T+b_{2,m}\Gamma)L^{m}\varphi=0 \tag{3.36}$$

的误差为$2m$阶或$2m+1$阶。这就是说，对于不同的m，它们不可能有相同的精度，而是m越大精度越高。因此，在(3.35)式中，不论$b_{1,m}$和$b_{2,m}$取什么值，都不可能通过相应于不同m的算子间引起的误差的相互抵消来提高精度的阶。可见(3.35)式只有在所有的$b_{1,m}$和$b_{2,m}$都为0，而$b_{q+1}\neq0$时才能达到最高的精度。不妨取$b_{q+1}=1$。这就是说，只有当

$$H_{q+1}=L^{q+1}+H_{q-1}W \tag{3.37}$$

时，(3.35)式才能达到最高精度。这也正是我们所要得到的结论。

四、讨　论

本文在直角坐标系中，在常波速下，对二维瞬态波，得到了一类具有最佳精度的AOBC，这就是(3.8)式，或更一般的，有(3.12)式。下面再就几个人们普遍关心的问题作点说明。

1. 三维和曲线坐标系下的AOBC

对L_j和W采用如下表达式

$$L_j=T+c\boldsymbol{k}_j\cdot\nabla \tag{4.1}$$

$$W=T^2+c^2\nabla^2 \tag{4.2}$$

则(3.8)和(3.12)式对三维波动和任意曲线坐标系也是合适的，只要我们将$\boldsymbol{k}_j\cdot\nabla$和$\nabla^2$用相应的曲线坐标系中的形式写出来，而在作算子的乘积运算时，注意将$\boldsymbol{k}_j$作常量处理就可以了。不过这里要特别强调指出的是，被当作常量看待的是$\boldsymbol{k}_j$，而不是它的各个分量。只有在直角坐标系中，它的各分量才可都当作常量看待。

2. 对色散波的适用性

对于色散波，c 不再是统一的常量。这时，应将L_j写作

$$L_j = T + c_j \boldsymbol{k}_j \cdot \nabla \tag{4.3}$$

引入局部瞬时等价波速，并给出相应的选定方法[7]，同时在算子的乘积运算中将 c_j 也作常量处理，(3.8)式就可推广应用于色散波。不过这时精度的阶要降低，而(3.12)式则不再适用。

3. 关于使用的普遍有效性

无论从(2.7)和(2.9)式，还是从第三部分中的证明过程来看，k_n都不能太小。因此，在实际运用中，可给k_n取定一个最小值$(k_n)_{\min}$，要求

$$k_n \geqslant (k_n)_{\min} > 0 \tag{4.4}$$

例如取$(k_n)_{\min}=0.3$。这一限制不会对本文给出的 AOBC 使用的普遍有效性产生任何影响。事实上，即使对入射波平行人为边界这种最极端的情况，$\Delta s^2/2(k_n)^2_{\min}$ 也只有 0.012，仍然是很小的。

参 考 文 献

[1] Givoli, D., Non-reffecting boundary conditions, *J. Comput. Phys.*, 94(1) (1991), 1—29.

[2] 陈耀松、邹光远，三维瞬态水面长波的非线性计算，水动力学研究与进展，2 (1984), 20—30.

[3] 邹光远、陈耀松，瞬态波的开路边条件，力学学报，21(5) (1989), 522—529.

[4] Chen Yao-song, Zou Guang-yuan and Gong Jie, An adoptive open boundary condition, *Acta Mechanica Sinica*, 6(4) (1990), 305—310.

[5] 邹光远、陈耀松，关于二阶自适应开路边条件的进一步讨论，水动力学研究与进展，A辑，7(3) (1992), 350—358.

[6] Engquist, E. and A. Majda, Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves, *Math. Comput.*, 31(139) (1977), 629—651.

[7] 邹光远，关于开路边条件，《92'全国水动力学研讨会文集(一)》，成都(1992), 216—230.

[8] Higdon, R. L., Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation, *Math. Comput.*, 47(176) (1986), 437—459.

[9] Higdon, R.L., Numerical absorbing boundary condition for the wave equation, *Math. Comput.*, 49(129) (1987), 65—90.

The High Precision Open Boundary Conditions Designed for Transient Waves

Zou Guang-yuan

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

In Refs. [2～4] there is an Adaptive Open Boundary Condition (AOBC) designed for transient waves which overcomes the limitation of the existing Open Boundary Condition (OBC) and can be used for the cases of waves with arbitrary incident angles. In this article a new family of high order AOBC has been designed on the basis of the above mentioned AOBC with the first order. In comparison with all other OBC with the same order, this new family of AOBC has the highest precision.

Key words adaptiveness, open boundary condition, optimal precision