应用数学和力学，第15卷 第9期（1994年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

广义力学中完整非保守系统的Noether守恒律*

乔永芬　岳庆文　董永安**

（东北农学院，1993年12月4日收到）

摘　要

本文给出广义力学中完整非保守系统三种形式的Noether守恒律。

关键词　广义力学　Hamilton正则方程　Raitzin正则方程　Noether守恒律

一、引　言

为人熟知的Noether守恒律在变分过程中起着最基本的作用，它使得物理学中的守恒定律与变分中相对应的不变性以整体形式联结起来．近些年来，Noether定律不够受到物理和力学研究者的重视并被进行了各种形式的推广，但大都限于在经典力学范围内开展工作．1973年瑞等学者D. Anderson研究了广义力学中完整保守系统的Noether定律[1]．

本文给出广义力学中非保守系统的三种形式的Noether等式．当忽略高阶导数时，本文的结果就成为经典力学中对应的Noether等式．

二、广义力学中非保守完整系统的Noeter守恒律

设广义力学系统的位形由n个广义坐标q_1，q_2，…，q_n确定．Lagrange函数为

$$L=L(t,\ q_k,\ \dot{q}_k,\ \cdots,\ \overset{(w)}{q_k}) \tag{2.1}$$

在低维空间中非保守力为$Q_k(t,\ q_i,\ \dot{q}_i)$，而在高维空间中非保守力可写成

$$Q_k=Q_k(q_i,\ \dot{q}_i,\ \ddot{q}_i,\ \cdots,\ \overset{(w)}{q_i},\ t) \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.2}$$

根据非保守系统的Hamilton原理$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta A)dt=0$可得广义非保守力学系统的Lagrange方程

$$\sum_{m=0}^{w}(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q_k}}\right)+Q_k=0 \tag{2.3}$$

* 钱伟长推荐．1992年12月4日收到初稿．
** 现在大庆市开发所工作．

广义动量

$$p_{k/m}=\sum_{j=0}^{w-m}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(j+m)}{q_k}}\right) \tag{2.4}$$

系统的Hamilton作用量为：

$$W=\int_{t_0}^{t_1}L(q_k,\ \dot{q}_k,\ \cdots,\ \overset{(w)}{q_k},\ t)dt \tag{2.5}$$

于是

$$\Delta W=\delta\int_{t^0}^{t_1}Ldt+(L\Delta t)\Big|_{t_0}^{t_1}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w}\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q_k}}\delta\overset{(m)}{q_k}dt+(L\Delta t)\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{2.6}$$

利用等时变分条件 $d(\delta\overset{(m)}{q_k})=\delta(d\overset{(m)}{q_k})$

将(2.6)式分部积分，有

$$\Delta W=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k}\Big|_{t_0}^{t_1}+(L\Delta t)\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w}(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q_k}}\right)\delta q_kdt \tag{2.7}$$

对上式配方

$$\Delta W=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k}\Big|_{t^0}^{t_1}+(L\Delta t)\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}Q_k\delta qdt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{m=0}^{w}(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q_k}}\right)+Q_k\right]\delta q_kdt \tag{2.8}$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k}+L\Delta t\right]dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}Q_k\delta q_kdt\right.$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{m=0}^{w}(-1)^m\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{q_k}}\right)+Q_k\right]\delta q_kdt \tag{2.9}$$

对广义非保守力学系统的真实运动轨线，Lagrange方程成立，将(2.3)式代入(2.9)中，得

$$\Delta W=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k}+L\Delta t\right]dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}Q_k\delta q_kdt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\frac{d^{m-1}}{dt^{(m-1)}}\delta q_k+L\Delta t\right]dt-\int_{t_0}^{t_1}\sum_{k=1}^{n}Q_k\delta q_kdt \tag{2.10}$$

考虑无穷小对称变换

$$\left.\begin{aligned}\bar{t}&=t+\Delta t=t+\varepsilon\varphi_k(t,\ q_i,\ \dot{q}_i,\cdots,\overset{(w)}{q_i})+o(\varepsilon)\\&\qquad\qquad(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\\bar{q}_k&=q_k+\Delta q_k=q_k+\varepsilon\psi_k(t,\ q_i,\ \dot{q}_i,\ \cdots,\ \overset{(w)}{q_i})+\theta(\varepsilon)\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

由等时变分与非等时变分关系

$$\Delta q_k=\delta q_k+\dot{q}_k\Delta t \tag{2.12}$$

于是，可得

$$\delta q_k=\Delta q_k-\dot{q}_k\Delta t=\varepsilon(\psi_k-\dot{q}_k\varphi_k) \tag{2.13}$$

假设作用量（2.5）在无穷小变换（2.11）下保持不变，那么由于 t_0，t_1 的任意性，根据（2.10）式可有

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\delta q_k+L\Delta t\right]=\sum_{k=1}^{n}Q_k\delta q_k \tag{2.14}$$

或写为

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}(\psi_k-\dot{q}_k\varphi_k)+L\varphi_k\right]=\sum_{k=1}^{n}Q_k(\psi_k-\dot{q}_k\varphi_k) \tag{2.15}$$

关系式（2.15）称为广义非保守完整力学系统的广义Noether等式

若力是保守的，即 $Q_k=0$，此时（2.15）式成为

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}(\psi_k-\dot{q}_k\varphi_k)+L\varphi_k=\text{const} \tag{2.16}$$

式（2.16）与文献[1]结果相同。

三、广义力学中非保守完整系统Hamilton正则形式的Noether守恒律

广义力学中Hamilton函数[2]

$$H=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\overset{(m)}{q_k}-L \tag{3.1}$$

及正则方程 $\frac{d}{dt}\overset{(m-1)}{q_k}=\frac{\partial H}{\partial p_{k/m}}$，$\dot{p}_{k/m}=-\frac{\partial H}{\partial \overset{(m-1)}{q_k}}+Q_k$ (3.2)

现在来研究系统在高维相空间中的对称性。

我们引进下列空间和时间的无穷小变换生成函数

$$\left.\begin{aligned}\Delta t&=\varepsilon\varphi_k(t,\overset{(m-1)}{q_k},p_{k/m})\\ \Delta\overset{(m-1)}{q_k}&=\varepsilon\psi_k(t,\overset{(m-1)}{q_k},p_{k/m})\\ \Delta p_{k/m}&=\varepsilon\eta_k(t,\overset{(m-1)}{q_k},p_{k/m})\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

由于 $\delta\overset{(m-1)}{q_k}=\Delta\overset{(m-1)}{q_k}-\overset{(m)}{q_k}\Delta t$

于是，得

$$\delta\overset{(m-1)}{q_k}=\varepsilon\psi_k(t,\overset{(m-1)}{q_k},p_{k/m})-\overset{(m)}{q_k}\varepsilon\varphi_k(t,\overset{(m-1)}{q_k},p_{k/m}) \tag{3.4}$$

此处 ε 为无穷小参数。

假设在变换（3.3）下，正则作用量

$$W_p=\int_{t_0}^{t_1} L_p dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w} p_{k/m}\overset{(m)}{q_k}-H(t,\overset{(m)}{q_k},p_{k/m})\right]dt$$

的变分，满足

$$\Delta W_p=\Delta\int_{t_0}^{t_1} L_p dt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\delta\Omega_k-Q_k\delta\overset{(m-1)}{q_k}\right]dt \tag{3.5}$$

其中 $\delta\Omega_k=\varepsilon\Omega_k(t,\overset{(m-1)}{q_k},p_{k/m})$

由于

$$\delta L_p=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w} p_{k/m}\delta\overset{(m)}{q_k}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}\overset{(m)}{q_k}\delta p_{k/m}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}\frac{\partial H}{\partial\overset{(m-1)}{q_k}}\delta\overset{m-1}{q_k}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}\frac{\partial H}{\partial p_{k/m}}\delta p_{k/m} \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dt}(p_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k})=\dot{p}_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k}+p_{k/m}\delta\overset{(m)}{q_k} \tag{3.7}$$

现将（3.7）式代入（3.6）中，有

$$\delta L_p=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}\left(\overset{m}{q_k}-\frac{\partial H}{\partial p_{k/m}}\right)\delta p_{k/m}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}\left(\dot{p}_{k/m}+\frac{\partial H}{\partial\overset{(m-1)}{p_k}}\right)\delta\overset{(m-1)}{q_k}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}\frac{d}{dt}\left(p_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k}\right) \tag{3.8}$$

根据（3.8）式，则（3.5）可写为

$$\Delta W=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}\left(\overset{(m)}{q_k}-\frac{\partial H}{\partial p_{k/m}}\right)\delta p_{k/m}-\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}\left(\dot{p}_{k/m}+\frac{\partial H}{\partial\overset{(m-1)}{q_k}}-Q_k\right)\delta\overset{(m-1)}{q_k}\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k}+L\Delta t-\delta\Omega_k\right]\right\}dt=0 \tag{3.9}$$

沿着广义非保守完整系统的运动轨线，正则方程（3.2）成立。于是，得

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k}-\delta\Omega_k+L\Delta t\right]dt=0 \tag{3.10}$$

由于t_0，t_1的任意性，必有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\delta\overset{(m-1)}{q_k}-\delta\Omega_k+L\Delta t=\mathrm{const} \tag{3.11}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\bar{\varphi}_k+L\varphi_k-\Omega_k=\mathrm{const} \tag{3.12}$$

其中 $\bar{\varphi}_k=\psi_k-\overset{(m)}{q_k}\varphi_k$

现将L的表达式（3.1）代入（3.12）中，得

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\psi_k-H\varphi_k-\Omega_k=\text{const} \tag{3.13}$$

关系式（3.13）就是广义非保守完整系统在Hamilton正则形式下的Noether守恒律。

讨论特殊情况：

（1） 若$\varphi_k=1$，$\psi_k=0$，$\Omega_k=0$则（3.13）式成为

$$H=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{w}p_{k/m}\overset{(m)}{q_k}-L=\text{const} \tag{3.14}$$

（2） 若$\varphi_k=0$，$\psi_k=\delta_{kl}$（l，$k=1$，2，…，n）$\Omega_k=0$则（3.13）式给出

$$p_{l/1}=\sum_{j=0}^{w-1}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\left(\frac{\partial L}{\partial\overset{(j+1)}{q_k}}\right)=\text{const} \tag{3.15}$$

四、广义力学中非保守完整系统Raitzin正则形式的Noether守恒律

设广义力学系统的位形由n个广义坐标q_1，q_2，…，q_n确定。

为建立广义非保守完整系统Raitzin正则形式的Noether等式，我们作无穷小变换

$$\left.\begin{aligned}&\Delta t=\varepsilon\varphi_k(t,\ r_{k/m},\ \overset{(m)}{S_k})\\&\Delta\overset{(m)}{q_k}=\varepsilon\psi_k(t,\ r_{k/m},\overset{(m)}{S_k})\\&\Delta r_{k/m}=\varepsilon\eta_k(t,\ r_{k/m},\overset{(m)}{S_k})\end{aligned}\right\}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ m=0,\ 1,\ \cdots,\ w-1) \tag{4.1}$$

由于 $\delta\overset{(m)}{q_k}=\Delta\overset{(m)}{q_k}-\overset{(m+1)}{q_k}\Delta t$

于是

$$\delta\overset{(m-1)}{S_k}=\Delta\overset{(m-1)}{S_k}-\overset{(m)}{S_k}\Delta t$$

假设在变换（4.1）下，正则作用量

$$I=\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\left[R+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}r_{k/m}\overset{(m)}{q_k}\right]dt \tag{4.2}$$

的变分满足

$$\Delta I=\Delta\int_{t_0}^{t_1}Ldt=\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{d}{dt}\delta\Omega_k-Q_k\delta\overset{(m)}{q_k}\right]dt \tag{4.3}$$

其中 $L=R+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}r_{k/m}\overset{(m)}{q_k}$

$$\delta\Omega_k=\varepsilon\Omega_k(t,\ r_{k/m},\ \overset{(m)}{S_k})$$

在变换（4.1）及(4.2)、(4.3)下，可有

$$\Delta I=\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta R+\frac{d}{dt}(L\Delta t)\right]dt=\int_{t_0}^{t_0}\left[\frac{d}{dt}\delta\Omega_k-Q_k\delta\overset{(m)}{q_k}\right]dt \tag{4.4}$$

容易证明

$$\delta L=\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\left[\frac{\partial R}{\partial r_{k/m}}+\overset{(m)}{q_k}\right]\delta r_{k/m}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\left[r_{k/m}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \overset{(m)}{S_k}}\right)\right]\delta\overset{(m)}{q_k}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial R}{\partial \overset{(m)}{S_k}}\delta\overset{(m)}{q_k}\right] \tag{4.5}$$

将（4.5）式代（4.4）中，有

$$\Delta I=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\left[\frac{\partial R}{\partial r_{k/m}}-\overset{(m)}{q_k}\right]\delta r_{k/m}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\left[r_{k/m}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \overset{(m)}{S_k}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+Q_k\right]\delta\overset{(m)}{q_k}+\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\frac{\partial R}{\partial \overset{(m)}{S_k}}\delta\overset{(m)}{q_k}+L\Delta t-\delta\Omega_k\right]\right\}dt=0 \tag{4.6}$$

沿着广义非保守完整系统的真实运动轨线，正则方程[2]

$$\left.\begin{aligned}r_{k/m}&=\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \overset{(m)}{S_k}}-Q_k\\ \overset{(m)}{S_k}&=-\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial r_{k/m}}\\ \overset{(m)}{q_k}&=-\frac{\partial R}{\partial r_{k/m}}\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

成立。

于是（4.6）式可写为

$$\Delta I=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\frac{\partial R}{\partial \overset{(m)}{S_k}}\delta\overset{m}{q_k}+L\Delta t-\delta\Omega_k\right]dt=0 \tag{4.8}$$

由t_0，t_1的任意性，必有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\frac{\partial R}{\partial \overset{(m)}{S_k}}\delta\overset{m}{q_k}+L\Delta t-\delta\Omega_k=\text{const} \tag{4.9}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\frac{\partial R}{\partial \overset{(m)}{S_k}}\psi_k+R\varphi_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=0}^{w-1}\left[r_{k/m}\overset{(m)}{q_k}-\frac{\partial R}{\partial \overset{(m)}{S_k}}\cdot\overset{(m)}{\dot{S}_k}\right]\psi_k-\Omega_k=\text{const} \tag{4.10}$$

关系式（4.10）就是广义力学中非保守完整系统Raitzin正则形式的Noether等式。

当$w=1$时，由（4.10）式得到经典力学中的对应Noether等式[3]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial R}{\partial S_k}\psi_k+R\varphi_k+\sum_{k=1}^{n}\left[r_kq_k-\frac{\partial R}{\partial S_k}\cdot S_k\right]\varphi_k-\Omega_k=\text{const} \tag{4.11}$$

参 考 文 献

[1] Anderson, D., Noether's theorem in generalized mechanics, *J. phys. A:Math, Nucl. Gen.*, 6(3)(1973), 299—305.

[2] 乔永芬, 一类新型正则方程对广义经典力学的推广, 力学学报. 22(1)(1990), 99—105.

[3] 岳庆文、乔永芬, 非完整非保守系统 Raitzin 正则形式的 Noether 守恒律, 东北工学院学报 (增刊, 1992年)

Noether's Conservation Laws of Holonomic Nonconservative Dynamical Systems in Generalized Mechanics

Qiao Yong-fen Yue Qing-wen Dong Yong-an

(*Northeast Agricultural College, Harbin*)

Abstract

In this paper, three kinds of forms for Noether's conservation laws of holonomic nonconservative dynamical systems in generalized mechanics are given.

Key words generalized mechanics, Hamilton Canonical equation, Raitin canonical eqnation, Noether's conservation law