应用数学和力学，第15卷 第9期（1994年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Navier-Stokes方程稳定性研究（Ⅰ）*

施 惟 慧

（上海大学）

（钱伟长推荐，1993年12月10日）

摘 要

本文给出Navier-Stokes方程某种边值问题局部解不唯一性的一个例证。

关键词 Navier-Stokes方程 湍流

Navier-Stokes 方程是流体力学中一类重要的拟线性偏微分方程组。它的边值（或初值）问题被用来描述粘性、不可压缩流体的某种运动状态。关于它的解（在指定的函数类中）的存在性、唯一性和稳定性的研究，国内、外都有大量的专著，其论证的结果都是肯定的。法国的J.Leray，R. Temam[3]等人，在这方面都做了很多的工作。特别是J.Leray早在1934年就曾对 Navier-Stokes方程的某种边值问题做了较深刻的研究，求得了局部解析解的表达式，并证明了其唯一性和稳定性[1]。1980年开始，我们对流体力学中几类基本的偏微分方程组进行了定性和定量研究，并取得了一些结果[4]，在严格论证之后，附加上了若干个例子，用以说明 Navier-Stokes 方程的不稳定性。这些结果已成书出版[5]。之后，在涉及湍流研究中，我们又做了一些工作，部分结果曾在法国的国家高等师范大学（Ecole Normale Superieure）的 Cartier 教授的讨论会及巴黎第六大学Aubin教授的讨论会等处做过报告。本文就是这些报告的一部分结果。

根据 Laudau-Lifchitz[2]，带有固定边界(S)的粘性，不可压缩流体未被干扰的定常运动由以下问题描述：

$$\left.\begin{aligned}&(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta\mathbf{u}\\&\operatorname{div}\cdot\mathbf{u}=0\\&\mathbf{u}|_{(S)}=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

即一种简化后的 Navier-Stokes 方程的边值问题。此处$(x, y, z)\in R^3$是空间点的坐标，$\mathbf{u}=(u_x(x, y, z), u_y(x, y, z), u_z(x, y, z))$是流体的速度矢量，$p=p(x, y, z)$是压力，$\rho$代表密度，$\nu$是动粘性系数(coefficient de viscosite cinématique)。在这种运动中，ρ与ν被假定是已知常数，u和p是未知函数，(S)是固定边界（我们假定它是一个充分光滑的曲面）

现在取(S)为坐标平面$(x=0)$，那末边值问题(1)成为：

$$\left.\begin{aligned}&(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}=-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p+\nu\Delta\mathbf{u}\\&\operatorname{div}\cdot\mathbf{u}=0,\ \mathbf{u}|_{x=0}=0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

考虑如下两组定义于R^3上的解析函数：

$$u^{(1)}:\begin{cases}u_x^{(1)}=0\\u_y^{(1)}=\operatorname{sh}x\cdot\cos z\\u_z^{(1)}=0\\p^{(1)}=p_0\qquad(\text{常数})\end{cases}$$

$$u^{(2)}:\begin{cases}u_x^{(2)}=0\\u_y^{(2)}=0\\u_z^{(2)}=\operatorname{sh}x\cdot\cos y\\p^{(2)}=p_0\qquad(\text{常数})\end{cases}$$

可以立即验证，$u^{(1)}$和$u^{(2)}$是边值问题(2)的两组非平凡解，而且$u^{(1)}\neq u^{(2)}$这个事实表明，边值问题(2)的局部解是不唯一的。

由于上述边值问题是研究湍流问题的基础，因而它的解的不唯一性以及由此导致的不稳定性，似乎应该引起足够的重视.特别要指出的是，这里我们并未要求给出压力P在边界(S)上的值。

参 考 文 献

[1] Leray, J., Essai sur le mouvement plan d'un liquide visqueux limitent des parois, *Journal Mathématique*, (1934).

[2] Laudqu, L. and E. Lifchitz, Physique Théorique, tome 6, Mir Mouscou,(1971).

[3] Teman, R., Navier-Stokes Equation, Norte-Holland, 1979, Navier-Stokes Equation and non-linear functional analysis 82T14, Université de Paris-Sud, Departement de Mathématiques.

[4] Shi Wei-hui and C. R, Acad Sc Paris, t. 297, Série I, 1983, 591-594 et t.300, Série I, (1985), 231-234.

[5] Shi Wei-hui, Solutions analytiques de quelques equations aux derivees partielles en mécanique des fluides, Traveaux en cours, 42, Hermann, Paris(1992).

Stability of the Navier-Stokes Equation (I)

Shi Wei-hui

(Shanghai University, Shanghai)

Abstract

In this paper we give an example of non-uniqueness of local solution for some kinds of boundary value problem of Navier-Stokes equation.

Key words Navier-Stokes equation, turbulent flow