应用数学和力学，第15卷第9期（1994年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于变分学中逆问题的研究*

梁立孚 石志飞**

（哈尔滨船舶工程学院）

摘 要

本文研究了变分学中的逆问题。通过变积概念的引入，给出了系统地研究变分学中逆问题的一种新途径。将这种方法应用于线弹性动力学和粘性流体力学中，建立了各自的变分原理和广义变分原理。

关键词 变分原理 变积 逆问题

一、引 言

变分法是研究力学、物理学和其它各种技术科学的强有力的工具。在许多学科中都已积累了大量的事实，证实了变分法的重要意义。在该领域中我国学者做出的贡献，文献[1]中已做了概括的论述。变分原理作为有限元法和其它近似计算方法的理论基础[2,3]，随着电子计算机的迅猛发展，越来越得到人们的重视。因此寻求如何将微分方程的边（初）值问题转化为泛函的驻（极）值问题的普遍方法，已成为数学工作者和力学工作者十分关注的问题，并称之为变分学中的逆问题。

关于弹性动力学中初值问题的变分原理，自本世纪六十年代Gurtin[4]以卷积形式给出某些泛函，罗恩[5]从一个守恒关系出发推导并推广文献[4]的结果以来，进入了一个新的时期。关于流体力学的变分原理，多年来都是在研究非粘性流动，且多数是从伯努利方程出发，根据流函数的表达式建立泛函的。这方面林家翘和Rubinow[6]等人都做出过重要贡献。钱伟长[7]从Navier-Stokes方程出发，研究了粘性流动，建立了包含有变分式在内的变分原理。

本文从变分的基本运算出发，探讨变分的逆运算；通过“变积”概念的引入，旨在为研究变分学中的逆问题，建立起一种新的普遍方法。

本文第二节提出了变积的概念；第三节研究了三类典型方程的变分逆问题，从数学上证实了变积方法的可行性；第四节和第五节建立了弹性动力学中的变分原理，除得到已有的全部结果外，还得到一些新的变分原理；第六章研究了不可压缩粘性流动问题，首次建立了以卷积形式表示的不可压缩粘性流体力学的变分原理及其广义变分原理。

* 钱伟长推荐。1991年4月1日收到初稿，1994年4月1日收到修改稿。
**现在北方交通大学工作。

二、变分与变积

1. 变分

设有定积分形式的泛函：

$$V=\int_a^b F(x,y,y')\,dx \tag{2.1}$$

其中　x为自变量，$y(x)$为自变函数。

对(2.1)式进行变分运算可得：

$$\delta V=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,dx+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b \tag{2.2}$$

泛函的驻值条件为$\delta V=0$，由于δy为独立变量，故(2.2)式为零的充要条件为：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \qquad (\text{在域中})\\&\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \qquad (\text{在}x=a\text{和}x=b\text{处})\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

这样便将泛函的驻值问题化成了微分方程的边值问题。

2. 变积

设在函数空间中，将(2.3)式相对于自变函数$y(x)$积分，则有：

$$\int_0^V\delta V=\int_0^y\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,dx+\int_0^y\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_a^b \tag{2.4}$$

为了与微积分学中的积分相区别，不妨称变分学中这种对函数空间的积分为变积。

对(2.4)式在x域中分部积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^V\delta V&=\int_0^y\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx\\&=\int_a^b\int_0^F\delta F(x,y,y')\,dx\end{aligned}$$

进而有：$V=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$ $\qquad (2.5)$

可见(2.5)与(2.1)相同，由(2.4)到(2.5)的过程正是由 (2.1) 到 (2.3) 的逆过程。这说明，正如积分是微分的逆运算一样，变积是变分的逆运算。

三、三类典型微分方程的变分逆问题

我们以二维问题为例，考虑一部分边界上给出自变函数的值，而在另一部分边界上给出自变函数沿法向导数的值。对于其它类型的边界条件，可用类似方法讨论。

在二维问题中，$\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$。用$\varphi*\psi$表示函数$\varphi$与$\psi$的卷积，而且总记：

$$h(t)=1,\qquad g(t)=t\qquad (t\geqslant 0)$$

1. 泊松方程的逆问题

方程

$$\nabla^2 u=f(x,y) \qquad (\text{其中}u=u(x,y)，\text{在}A\text{上}) \tag{3.1}$$

空间边条

$$u=u_1 \qquad (\text{在}\partial A_u\text{上})$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=u_2 \qquad (\text{在}\partial A_\nu\text{上}) \tag{3.2}$$

对(3.1)和(3.2)施以变积运算，有

$$\int_0^V \delta V=\int_0^u\int_A (\nabla^2 u-f)\delta u dA+\int_0^u\int_{\partial A_u}(u-u_1)\delta\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$$
$$+\int_0^u\int_{\partial A_\nu}\left(u_2-\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\delta u dS$$
$$=\int_0^u\int_{\partial A_u}\left[(u-u_1)\delta\frac{\partial u}{\partial \nu}+\frac{\partial u}{\partial \nu}\delta u\right]ds+\int_0^u\int_{\partial A_\nu}u_2\delta u dS$$
$$-\int_0^u\int_A f\delta u dA-\int_0^u\int_A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\delta\frac{\partial u}{\partial y}\right)dA$$

进而可得泊松方程对应的泛函为：

$$V=\int_{\partial A_u}(u-u_1)\frac{\partial u}{\partial \nu}dS+\int_{\partial A_\nu}u_2 u dS-\int_A f u dA$$
$$-\frac{1}{2}\int_A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dA \tag{3.3}$$

如果我们只对(3.1)式作变积运算，则有：

$$\int_0^{V^*}\delta V^*=\int_0^u\int_A(\nabla^2 u-f)\delta u dA$$
$$=\int_0^u\int_{\partial A_u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\delta u dS+\int_0^u\int_{\partial A_\nu}\frac{\partial u}{\partial \nu}\delta u dS-\int_0^u\int_A f\delta u dA$$
$$-\int_0^u\int_A\left[\frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\delta\frac{\partial u}{\partial y}\right]dA$$

利用边界条件(3.2)有

$$\int_0^{V^*}\delta V^*=\int_0^u\int_{\partial A_\nu}u_2\delta u dS-\int_0^u\int_A f\delta u dA$$
$$-\int_0^u\int_A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\delta\frac{\partial u}{\partial y}\right)dA$$

进而得：$V^*=\int_{\partial A_\nu}u_2 u dS-\int_A f u dA-\frac{1}{2}\int_A\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dA$ (3.4)

如果我们对泛函V取变分，将得到 Euler 方程(3.1)和自然边界条件(3.2)；而对泛函V^*取变分将只解得到 Euler 方程(3.1)，而(3.2)以强制边界条件的形式得到。

下面我们只建立带有自然边界条件的泛函，而对强制边界条件的泛函，不难用相类似的方法得到。

2. 输运方程的逆问题

方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla^2 u=f(x,y,t) \qquad (其中u=u(x,y,t)\ 在A\times(0,\infty)上) \tag{3.5}$$

空间边条

$$\begin{cases} u=u_1(t) & (在\partial A_u上) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}=u_2(t) & (在\partial A_\nu上) \end{cases} \tag{3.6}$$

时间初条 $u|_{t=0}=u_5(x,y)$ (3.7)

对(3.5)、(3.6)施以 Laplace 变换得

$$pU-u_5-\nabla^2 U=F \tag{3.5$'$}$$

$$\begin{cases} U=U_1 & (在\partial A_u上) \\ \dfrac{\partial U}{\partial \nu}=U_2 & (在\partial A_\nu上) \end{cases} \tag{3.6$'$}$$

这里记：$u\doteqdot U$，$f\doteqdot F$等，p为 Laplace 变换中的参数。

对(3.5)′和(3.6)′施以变积运算可得输运方程在相空间对应的泛函

$$W=\int_A\left[\frac{1}{2}U^2-\frac{1}{p}u_5U-\frac{1}{p}FU\right]dA+\int_{\partial A_u}\frac{1}{p}(U_1-U)\frac{\partial U}{\partial \nu}dS$$

$$-\int_{\partial A_\nu}\frac{1}{p}U_2UdS+\frac{1}{2}\int_A\frac{1}{p}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dA \tag{3.8$'$}$$

反演得原空间的泛函

$$V=\int_A\left[\frac{1}{2}u-u_5h-h*f\right]*udA+\int_{\partial A_u}h*(u_1-u)*\frac{\partial u}{\partial \nu}dS$$

$$-\int_{\partial A_\nu}h*u_2*udS+\frac{1}{2}\int_A h*\left[\frac{\partial u}{\partial x}*\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}*\frac{\partial u}{\partial y}\right]dA \tag{3.8}$$

3. 波动方程的逆问题

方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla^2 u=f(x,y,t) \qquad (其中u=u(x,y,t)\quad 在A\times(0,\infty)上) \tag{3.9}$$

空间边条

$$\left.\begin{aligned} &u=u_1(t) && (在\partial A_u上) \\ &\frac{\partial u}{\partial \nu}=u_2(t) && (在\partial A_\nu上) \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

初始条件

$$\left.\begin{aligned} &u|_{t=0}=u_5(x,y) \\ &\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_6(x,y) \end{aligned}\right\} \quad (在A上) \tag{3.11}$$

(3.9)、(3.10)的 Laplace 变换形式为：

$$p^2U-pu_5-u_6-\nabla^2U=F \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} U=U_1 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \nu}=U_2 \end{cases} \tag{3.10)'$$

对(3.9)'和(3.10)'施以变积运算可得波动方程初值问题在相空间的泛函

$$W=\int_A\left[\frac{1}{2}U^2-\frac{1}{p}u_6U-\frac{1}{p^2}u_6U-\frac{1}{p^2}FU\right]dA+\int_{\partial A_u}\frac{1}{p^2}(U_1-U)\frac{\partial U}{\partial \nu}dS-\int_{\partial A_\nu}\frac{1}{p^2}U_2UdS+\frac{1}{2}\int_A\frac{1}{p^2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right]dA \tag{3.12)'$$

反演得原空间的泛函为：

$$V=\int_A\left[\frac{1}{2}u-u_6h-u_6g-g*f\right]*udA+\int_{\partial A_u}g*(u_1-u)*\frac{\partial u}{\partial \nu}dS-\int_{\partial A_\nu}g*u_2*udS+\frac{1}{2}\int_A g*\left[\frac{\partial u}{\partial x}*\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}*\frac{\partial u}{\partial y}\right]dA \tag{3.12}$$

四、基本函数状态空间中线弹性动力学的各种变分原理

由自变函数：应力σ_{ij}，应变ε_{ij}，位移u_i构成的函数空间称为基本函数状态空间；相应地称由应力σ_{ij}，应变ε_{ij}，位移u_i，速度v_i和动量p_i构成的函数空间为广义函数状态空间。

在基本函数状态空间中，线弹性动力学初值问题的基本方程为

运动方程

$$\sigma_{ij,j}+f_i=\rho\ddot{u}_i \qquad (\text{在}V\times[0,\infty)) \tag{a}$$

应力边条

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i=0 \qquad (\text{在}S_p\times[0,\infty)) \tag{b}$$

几何方程

$$\varepsilon_{ij}=u_{(i,j)}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (\text{在}V\times[0,\infty)) \tag{c}$$

位移边条

$$u_i=\bar{u}_i \qquad (\text{在}S_u\times[0,\infty)) \tag{d}$$

本构方程

$$\sigma_{ij}=A_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{e}$$

$$(\text{在}V\times(0,\infty))$$

或

$$\varepsilon_{ij}=B_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{f}$$

初始条件

$$u_i|_{t=0}=d_i,\quad \left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=0}=v_i(x,y) \qquad (\text{在}V\text{内})$$

上述方程的 Laplace 变换形式为：

$$\Sigma_{ij,j}+F_i=\rho(p^2U_i-pd_i-v_i) \tag{A}$$

$$\Sigma_{ij}n_j-\bar{P}_i=0 \tag{B}$$

$$\mathscr{E}_{ij}=U_{(i,j)} \tag{C}$$

$$U_i=\widetilde{U}_i \tag{D}$$

$$\Sigma_{ij}=A_{ijkl}\mathscr{E}_{kl} \tag{E}$$

$$\mathscr{E}_{ij}=B_{ijkl}\Sigma_{kl} \tag{F}$$

这里有：$\sigma_{ij}\doteq\Sigma_{ij}$，$\varepsilon_{ij}\doteq\mathscr{E}_{ij}$，$u_i\doteq U_i$，$f_i\doteq F_i$

$\bar{p}_i\doteq\bar{P}_i$

p为 Laplace 变换中的参数。

1. 经典变分原理的泛函

（1） 对(A)(B)式作变积运算

$$\int_0^{\widetilde{\Pi}_1}\delta\widetilde{\Pi}_1=\int_0^{U_i}\int_V\frac{1}{p^2}[\Sigma_{ij,j}+F_i-\rho(p^2U_i-pd_i-v_i)]\delta U_idV$$

$$+\int_0^{U_i}\int_{S_P}\frac{1}{p^2}(\bar{P}_i-\Sigma_{ij}n_j)\delta U_idS$$

$$=\int_0^{U_i}\int_V\frac{1}{p^2}[F_i-\rho(p^2U_i-pd_i-v_i)]\delta U_idV$$

$$-\int_0^{U_i}\int_V\frac{1}{p^2}\Sigma_{ij}\delta U_{i,j}dV+\int_0^{U_i}\int_{S_p}\frac{1}{p^2}\bar{P}_i\delta U_idS$$

$$+\int_0^{U_i}\int_{S_u}\frac{1}{p^2}\Sigma_{ij}n_j\delta U_idS$$

引入约束条件(C)(D)并将(E)式代入可得泛函

$$\widetilde{\Pi}_1=\int_V\frac{1}{p^2}\Big[F_iU_i-\rho\Big(\frac{1}{2}p^2U_i-pd_i-v_i\Big)U_i$$

$$-\frac{1}{2}A_{ijkl}\mathscr{E}_{ij}\mathscr{E}_{kl}\Big]dV+\int_{S_p}\frac{1}{p^2}\bar{P}_iU_idS$$

$$\Pi_1=\int_V\Big[g*f_i*u_i-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\mathscr{E}_{ij}*\varepsilon_{kl}-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_ih*u_i$$

$$+\rho v_ig*u_i\Big]dV+\int_{S_p}g*\bar{p}_i*u_idS$$

若将(C)式代入Π_1中可得

$$\Pi_1^*=\int_V\Big[g*f_i*u_i-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\mathscr{E}_{i,j}*u_{k,l}-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_ih*u_i$$

$$+\rho v_ig*u_i\Big]dV+\int_{S_p}g*\bar{p}_i*u_idS$$

若将(e)式从Π_1中分离出来作为约束条件可得

$$\Pi_1^{**}=\int_V\Big[g*f_i*u_i-\frac{1}{2}g*\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_ih*u_i$$

$$+\rho v_ig*u_i\Big]dV+\int_{S_p}g*\bar{p}_i*u_idS$$

用类似方法可得如下泛函

（2） 对(C)(D)作变积运算可得：

$$\Gamma_1=\int_V\left[\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}+\frac{1}{2}\rho u_i*u_i\right]dV-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_jdS$$

Γ_1具有约束条件(a)(b)。

(3) 对(E)式作变积运算可得Π_1^*，若将(C)从Π_1^*中分离出来作约束条件可得Π_1；而对(F)式作变积运算可得Γ_1。

2. 广义变分原理的泛函

(1) 对(A)(B)(C)(D)式作变积运算

$$\int_0^{\widetilde{\Pi}_2}\delta\widetilde{\Pi}_2=\int_0^{U_i}\int_V\frac{1}{p^2}[\Sigma_{ij,j}+F_i-\rho(p^2U_i-pd_i-v_i)]\delta U_idV$$

$$+\int_0^{U_i}\int_{S_p}\frac{1}{p^2}(\bar{p}_i-\Sigma_{ij}n_j)\delta U_idS+\int_0^{\Sigma_{ij}}\int_V\frac{1}{p^2}(\mathscr{E}_{ij}-U_{i,j})\delta\Sigma_{ij}dV$$

$$+\int_0^{\Sigma_{ij}}\int_{S_u}\frac{1}{p^2}(U_i-\bar{U}_i)\delta\Sigma_{ij}n_jdS$$

将(F)式代入稍加运算即可得

$$\widetilde{\Pi}_2=\int_V\frac{1}{p^2}\left[F_iU_i-\rho\left(\frac{1}{2}p^2U_i-pd_i-v_i\right)U_i-\Sigma_{ij}V_{i,j}+\frac{1}{2}B_{ijkl}\Sigma_{ij}\Sigma_{kl}\right]dV$$

$$+\int_{S_u}\frac{1}{p^2}(U_i-\bar{U}_i)\Sigma_{ij}n_jdS+\int_{S_p}\frac{1}{p^2}\bar{P}_iU_idS$$

若在上面的变积运算中不是对$\Sigma_{ij,j}\delta U_i$而是对$U_{i,j}\delta\Sigma_j$分部积分，则得

$$\widetilde{\Gamma}_2=\int_V\frac{1}{p^2}\left[F_iU_i-\rho\left(\frac{1}{2}p^2U_i-pd_i-v_i\right)U_i+U_i\Sigma_{ij,j}+\frac{1}{2}B_{ijkl}\Sigma_{ij}\Sigma_{kl}\right]dV$$

$$+\int_{S_p}\frac{1}{p^2}(\bar{P}_i-\Sigma_{ij}n_j)U_idS-\int_{S_u}\frac{1}{p^2}\bar{U}_i\Sigma_{ij}n_jdS$$

反演得

$$\Pi_2=\int_V\left[g*f_i*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_ih*u_i+\rho v_ig*u_i-g*\sigma_{ij}*u_{i,j}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}\right]dV+\int_{S_u}g*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_jdS+\int_{S_p}g*\bar{p}_i*u_idS$$

$$\Gamma_2=\int_V\left[g*f_i*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_ih*u_i+\rho v_ig*u_i-g*u_i*\sigma_{ij,j}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}\right]dV+\int_{S_p}g*(\bar{p}_i-\sigma_{ij}n_j)*u_idS$$

$$-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_jdS$$

(2) 对(C)(D)(E)式作变积运算可得

$$\Gamma_{2e}=\int_V\left[g*\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{kl}+\frac{1}{2}\rho u_i*u_i\right]dV$$

$$-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_jdS$$

(3) 对(A)(B)(F)作变积运算可得Γ_2，而对(A)(B)(F)(D)作变积运算则得文[4]中(4.11)式所示泛函

$$\Gamma_2^*=\int_V\Big[g*f_i*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_ih*u_i+\rho v_ig*u_i+\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}$$
$$-g*\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}\Big]dV+\int_{S_u}g*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_jdS+\int_{S_p}g*\bar{p}_i*u_idS$$

（4） 对(A)(B)(C)(D)(E)式作变积运算可得

$$\Pi_3=\int_V\Big[g*\sigma_{ij}*(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})+g*f_i*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_ih*u_i$$
$$-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{kl}+\rho v_ig*u_i\Big]dV+\int_{S_p}g*\bar{p}_i*u_idS$$
$$+\int_{S_u}g*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_jdS$$

$$\Gamma_3=\int_V\Big[g*\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}+g*u_i*\sigma_{ij,j}+g*f_i*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_ih*u_i$$
$$+\rho v_ig*u_i-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{kl}\Big]dV+\int_{S_p}g*(\bar{p}_i-\sigma_{ij}n_j)*u_idS$$
$$-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_jdS$$

五、广义函数状态空间中线弹性动力学的各种变分原理

在广义函数状态空间中，线弹性动力学初值问题的基本方程为：

运动方程 $\sigma_{ij,j}+f_i=\partial P_i/\partial t$ (a)

应力边条 $\sigma_{ij}n_j=\bar{t}_i$ (b)

几何方程 $\varepsilon_{ij}=u_{i,j}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ (c)

位移边条 $u_i=\bar{u}_i$ (d)

本构方程 $\sigma_{ij}=A_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ (e)

或 $\varepsilon_{ij}=B_{ijkl}\sigma_{kl}$ (f)

速度位移 $v_i=\partial u_i/\partial t$ (g)

动量速度 $p_i=\rho v_i$ (h)

初始条件 $u_i|_{t=0}=d_i$

$p_i|_{t=0}=\bar{p}_i$

上述方程的Laplace变换形式为

$\Sigma_{ij,j}+F_i=sP_i-\bar{p}_i$ (A)

$\Sigma_{ij}n_j=\bar{T}_i$ (B)

$\mathscr{E}_{ij}=U_{i,j}$ (C)

$U_i=\bar{U}_i$ (D)

$\Sigma_{ij}=A_{ijkl}\mathscr{E}_{kl}$ (E)

或 $\mathscr{E}_{ij}=B_{ijkl}\Sigma_{kl}$ (F)

$V_i=sU_i-d_i$ (G)

$P_i=\rho V_i$ (H)

为防止符号混乱，这里将Laplace变换中的参数记为 s，将应力边界上的给定值记为$\bar{t}_i$.

1. 五类变量的泛函

对(A)(B)(C)(D)(E)(G)(H)式作变积运算

$$\int_0^{\widetilde{\Pi}_5}\delta\widetilde{\Pi}_5=\int_0^{U_i}\int_V\frac{1}{s^2}[\Sigma_{ij,j}+F_i-sP_i+\bar{p}_i]\,\delta U_i dV+\int_0^{\Sigma_{ij}}\int_V\frac{1}{s^2}(\mathscr{E}_{ij}-U_{i,j})\delta\Sigma_{ij}dV$$

$$+\int_0^{\mathscr{E}_{ij}}\int_V\frac{1}{s^2}(\Sigma_{ij}-A_{ijkl}\mathscr{E}_{kl})\delta\mathscr{E}_{ij}dV+\int_0^{P_i}\int_V\frac{1}{s^2}(V_i-sU_i+d_i)\delta P_i dV$$

$$+\int_0^{V_i}\int_V\frac{1}{s^2}(P_i-\rho V_i)\delta V_i dV+\int_0^{U_i}\int_{S_t}\frac{1}{s^2}(\bar{T}_i-\Sigma_{ij}n_j)\delta U_i dS$$

$$+\int_0^{\Sigma_{ij}}\int_{S_u}\frac{1}{s^2}(U_i-\bar{U}_i)\delta\Sigma_{ij}n_j dS$$

稍作运算即可得

$$\Pi_5=\int_V\Big[g*f_i*u_i+\bar{p}_i g*u_i-g*\sigma_{ij}*u_{i,j}-h*p_i*u_i+g*\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}$$

$$+g*p_i*v_i+d_i g*p_i-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{kl}-\frac{1}{2}\rho g*v_i*v_i\Big]dV$$

$$+\int_{S_t}g*\bar{t}_i*u_i dS+\int_{S_t}g*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_j dS$$

$$\Gamma_5=\int_V\Big[g*f_i*u_i+g*u_i*\sigma_{ij,j}+\bar{p}_i g*u_i-h*p_i*u_i+g*\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}$$

$$+g*p_i*v_i+d_i g*p_i-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{kl}-\frac{1}{2}\rho g*v_i*v_i\Big]dV$$

$$+\int_{S_t}g*(\bar{t}_i-\sigma_{ij}n_j)*u_i dS-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_j dS$$

2. 四类变量的泛函

（1） 对(A)(B)(C)(D)(E)(G)作变积运算可得

$$\Pi_{41}=\int_V\Big[g*\sigma_{ij}*(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{kl}-h*p_i*u_i+g*f_i*u_i$$

$$+\bar{p}_i g*u_i+\frac{1}{2\rho}g*p_i*p_i+d_i g*p_i\Big]dV+\int_{S_t}g*\bar{t}_i*u_i dS$$

$$+\int_{S_u}g*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_jn_j dS$$

$$\Gamma_{41}=\int_V\Big[g*u_i*\sigma_{ij,j}+g*\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{kl}-h*p_i*u_i$$

$$+g*f_i*u_i+\bar{p}_i g*u_i+\frac{1}{2\rho}g*p_i*p_i+d_i g*p_i\Big]dV$$

$$+\int_{S_t}g*(\bar{t}_i-\sigma_{ij}n_j)*u_i dS-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_j dS$$

（2） 对(A)(B)(C)(D)(G)(H)作变积运算可得：

$$\Pi_{42}=\int_V\Big[g*p_i*v_i-g*\sigma_{ij}*u_{i,j}-h*p_i*u_i+g*f_i*u_i+\bar{p}_i g*u_i$$

$$+d_i g*p_i-\frac{1}{2}\rho g\sigma v_i*v_i+\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}\Big]dV+\int_{S_t}g*\bar{t}_i*u_i dS$$

$$+\int_{S_u}g*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_j ds$$

$$\Gamma_{42}=\int_V\Big[g*u_i*\sigma_{ij,j}+g*p_i*v_i-h*p_i*u_i+g*f_i*u_i+\bar{p}_i g*u_i$$

$$+d_i g*p_i-\frac{1}{2}\rho g*v_i*v_i+\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}\Big]dV$$

$$-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_j ds+\int_{S_t}g*(\bar{t}_i-\sigma_{ij}n_j)*u_i dS$$

（3） 对(A)(B)(F)(G)(H)作变积运算可得

$$\Pi_{43}=\int_V\Big[\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}-g*\sigma_{ij}*u_{i,j}-h*p_i*u_i+g*p_i*v_i$$

$$+d_i g*p_i+g*f_i*u_i+\bar{p}_i g*u_i-\frac{1}{2}\rho g*v_i*v_i\Big]dV$$

$$+\int_{S_t}g*\bar{t}_i\sigma u_i dS$$

$$\Gamma_{43}=\int_V\Big[\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}+g*\sigma_{ij,j}*u_i-h*p_i*u_i+g*p_i*v_i$$

$$+d_i g*p_i+g*f_i*u_i+\bar{p}_i g*u_i-\frac{1}{2}\rho g*v_i*v_i\Big]dV$$

$$+\int_{S_t}g*(\bar{t}_i-\sigma_{ij}n_j)*u_i dS-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_j dS$$

3. 三类变量的泛函

（1） 对(A)(B)(C)(D)(E)作变积运算可得

$$\Pi_{31}=\int_V\Big[g*\sigma_{ij}*(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{kl}+g*f_i*u_i+\rho d_i h*u_i$$

$$+\bar{p}_i g*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i\Big]dV+\int_{S_u}g*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_j dS+\int_{S_t}g*\bar{t}_i*u_i dS$$

$$\Gamma_{31}=\int_V\Big[g*\sigma_{ij}*\varepsilon_{ij}+g*\sigma_{ij,j}*u_i-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*\varepsilon_{ij}*\varepsilon_{kl}+g*f_i*u_i$$

$$+\bar{p}_i g*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_i h*u_i\Big]dV+\int_{S_t}g*(\bar{t}_i-\sigma_{ij}n_j)*u_i dS$$

$$-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_j dS$$

（2） 对(A)(B)(C)(D)(G)作变积运算可得

$$\Pi_{32}=\int_V\Big[\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}+\frac{1}{2\rho}g*p_i*p_i-g*\sigma_{ij}*u_{ij}-h*p_i*u_i+d_i g*p_i$$

$$+g*f_i*u_i+\bar{p}_i g*u_i\Big]dV+\int_{S_u}g*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_j ds+\int_{S_t}g*\bar{t}_i*u_i ds$$

$$\Gamma_{32}=\int_V\Big[\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}+\frac{1}{2\rho}g*p_i*p_i+g*\sigma_{ij,j}*u_i-h*p_i*u_i+g*f_i*u_i$$

$$+\bar{p}_i g*u_i+d_i g*p_i\Big]dV+\int_{S_t}g*(\bar{t}_i-\sigma_{ij}n_j)*u_i dS-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_j dS$$

4. 二类变量的泛函

(1) 对(A)(B)(C)(D)作变积运算可得

$$\Pi_{21}=\int_V\Big[\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}-g*\sigma_{ij}*u_{i,j}+g*f_i*u_i+p_ig*u_i$$

$$-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho d_ih*u_i\Big]dV+\int_{S_t}g*\bar{t}_i*u_idS+\int_{S_u}g*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_jdS$$

$$\Gamma_{21}=\int_V\Big[\frac{1}{2}B_{ijkl}g*\sigma_{ij}*\sigma_{kl}+g*\sigma_{ij,j}*u_i+g*f_i*u_i+p_ig*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i$$

$$+\rho d_ih*u_i\Big]dV+\int_{S_t}g*(\bar{t}_i-\sigma_{ij}n_j)*u_idS-\int_{S_u}g*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_jdS$$

(2) 对(A)(B)(G)作变积运算可得

$$\Pi_{22}^*=\int_V\Big[-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*u_{i,j}*u_{k,l}+g*f_i*u_i+p_ig*u_i-\rho h*u_i*v_i$$

$$+\frac{1}{2}\rho g*v_i*v_i+\rho d_ig*v_i\Big]dV+\int_{S_t}g*\bar{t}_i*u_idS$$

5. 一类变量的泛函

分别对(A)(B)、(E)、(H)作变积运算均可得

$$\Pi_{11}=\int_V\Big[g*f_i*u_i+p_ig*u_i+\rho d_ih*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i$$

$$-\frac{1}{2}A_{ijkl}g*u_{i,j}*u_{k,l}\Big]dV+\int_{S_t}g*\bar{t}_i*u_idS$$

六、粘性流体力学的变分原理及其广义变分原理

取Euler坐标 x_i，u_i 和 σ_{ij} 分别为流体各点的速度和应力分量，p 为压强，μ 为 粘度系数，对不可压流体，密度ρ=const。

基本方程为：

运动方程（Navier-Stokes方程）

$$\rho\frac{du_i}{dt}=\rho\bar{f}_i+\sigma_{ij,j} \tag{a}$$

其中 $\bar{f}_i$为每单位重量所受体积力，$\frac{d(\ )}{dt}$为

$$\frac{d(\ )}{dt}=\frac{\partial(\ )}{\partial t}+u_k(\ )_{,k}$$

不可压缩条件

$$u_{k,k}=0 \tag{c}$$

本构方程

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}-\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{e}$$

边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{t}_i \qquad \text{(在受力边界}S_\sigma\text{上)} \qquad (b)$$

$$u=\bar{u}_i \qquad \text{(在速度边界}S_u\text{上)} \qquad (d)$$

初始速度为　$u_i|_{t=0}=u_i^0$

对(a)～(e)施以Laplace变换得在相空间中的定解问题：

$$\Sigma_{ij,j}+\rho\bar{F}_i=\rho sU_i-\rho u_i^0 \qquad (A)$$

$$\Sigma_{ij}n_j=\bar{T}_i \qquad (B)$$

$$U_{k,k}=0 \qquad (C)$$

$$U_i=\bar{U}_i \qquad (D)$$

$$\Sigma_{ij}=-P\delta_{ij}-\frac{2}{3}\mu U_{k,k}\delta_{ij}+\mu(U_{i,j}+U_{j,i}) \qquad (E)$$

1. 不可压粘性流体的变分原理

(1)　对(A)(B)式作变积运算可得

$$\Pi_1=\int_V\rho\left[h*u_i*\bar{f}_i-\frac{1}{2}u_i*u_i+u_i^0h*u_i\right]dV-\frac{\mu}{2}\int_V h*u_{i,j}*(u_{i,j}+u_{j,i})dV+\int_{S_\sigma}h*\bar{t}_i*u_idS$$

其约束条件为(c)(d)

稍作变换可得

$$\Pi_1^*=\int_V\rho\left[h*u_i*\bar{f}_i-\frac{1}{2}u_i*u_i+u_i^0h*u_i\right]dV-\frac{1}{4\mu}\int_V h*(\sigma_{ij}*\sigma_{ij}-3p*p)dV+\int_{S_\sigma}h*\bar{t}_i*u_idS$$

其约束条件为(c)(d)(e).

(2)　对(c)(d)式作变积运算可得

$$\Gamma_1=\int_V\frac{\rho}{2}u_i*u_idV+\frac{\mu}{2}\int_V h*u_{i,j}*(u_{i,j}+u_{j,i})dV-\frac{\mu}{3}\int_V h*u_{i,i}*u_{j,j}dV-\int_{S_u}h*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_jdS$$

其约束条件为(a)(b)

稍作变换可得

$$\Gamma_1^*=\int_V\frac{\rho}{2}u_i*u_idV+\frac{1}{4\mu}\int_V h*(\sigma_{ij}*\sigma_{ij}-3p*p)dV-\int_{S_u}h*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_jdS$$

其约束条件为(a)(b)(e)

或 $$\Gamma_1^{**}=\int_V\frac{1}{2\rho}g*(\sigma_{ij,j}+\rho\bar{f}_i+\rho u_i^0)*(\sigma_{ik,k}+\rho\bar{f}_i+\rho u_i^0)dV+\frac{1}{4\mu}\int_V h*(\sigma_{ij}*\sigma_{ij}-3p*p)dV-\int_{S_u}h*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_jdS$$

其约束条件为(b)(e).

2. 不可压粘性流体的广义变分原理

(1)　对(A)(B)(C)(D)式作变积运算可得

$$\Pi_2=\int_V\Big[\rho h*\bar{f}_i*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho u_i^0 h*u_i+h*p*u_{k,k}+\frac{\mu}{3}h*u_{i,i}*u_{j,j}$$

$$-\frac{\mu}{2}h*u_{i,j}*(u_{i,j}+u_{j,i})\Big]dV+\int_{S_u}h*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_j dS+\int_{S_\sigma}h*\bar{t}_i*u_i dS$$

稍作变换得

$$\Pi_2^*=\int_V\Big[h*p*u_{k,k}-\frac{1}{4\mu}h*\Big(\sigma_{ij}*\sigma_{ij}-3p*p+\rho u_i^0 h*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i$$

$$+\rho h*\bar{f}_i*u_i\Big]dV+\int_{S_u}h*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_j dS+\int_{S_\sigma}h*\bar{t}_i*u_i dS$$

Π_2^*具有约束条件(e)

（2） 对(C)(D)(E)式作变积运算可得：

$$\Gamma_{2e}=\int_V\Big[h*p*u_{k,k}+\frac{1}{4\mu}h*\sigma_{ij}*\sigma_{ij}+\frac{1}{2\mu}h*p*\sigma_{ii}+\frac{1}{3}h*\sigma_{ii}*u_{j,j}$$

$$+\frac{3}{4\mu}h*p*p+\frac{1}{2}\rho u_i*u_i\Big]dV-\int_{S_u}h*\bar{u}_i*\sigma_{ij}n_j dS$$

其约束条件为(a)(b)

（3） 对(A)(B)(C)(D)(E)作变积运算可得：

$$\Pi_3=\int_V\Big[\rho h*\bar{f}_i*u_i-\frac{1}{2}\rho u_i*u_i+\rho u_i^0 h*u_i-h*\sigma_{ij}*u_{i,j}$$

$$+h*p*u_{k,k}+\frac{1}{4\mu}h*\sigma_{ij}*\sigma_{ij}+\frac{1}{2\mu}h*p*\sigma_{ij}+\frac{1}{3}h*\sigma_{ii}*u_{k,k}$$

$$+\frac{3}{4\mu}h*p*p\Big]dV+\int_{S_u}h*(u_i-\bar{u}_i)*\sigma_{ij}n_j dS+\int_{S_\sigma}h*\bar{t}_i*u_i dS$$

七、结 束 语

本文通过“变积”概念的提出，为变分学中逆问题的研究，提供了一种新的途径．这种方法具有思路清晰，方法简便易掌握和快速等特点．将这种方法应用于线弹性动力学中，不仅得到了文献[4,5]中已有的全部结果，而且还得到一些新的变分原理；将这种方法应用于粘性流体力学中，则首次以卷积形式给出了变分原理的完整形式．这种方法还可以应用于传质学、电磁理论等学科中，限于篇幅，不赘述．

致谢 刘殿魁先生详细审阅本文初稿并提出宝贵意见，作者表示衷心感谢．

参 考 文 献

[1] 刘殿魁、张其浩，弹性理论中非保守问题的一般变分原理，力学学报，6(1981)．
[2] 钱伟长，《变分法及有限元》（上册），科学出版社（1980）．
[3] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社(1981)．
[4] Gurtin. M. E., Variational principles for linear elasto-dynamics, *Arch. Rat. Mech.*, 16(1964).
[5] 罗恩，关于线弹性动力学中各种Gurtin型变分原理，中国科学(A)，9(1987)．
[6] Lin, C. C.（林家翘）and L. Rubinow, On the flow behind curved shocks, *Journal of Mathematics and Physics*, 27(1948), 105—129.
[7] 钱伟长，粘性流体力学的变分原理和广义变分原理，应用数学和力学，5(3)(1984)，305—322.

On the Inverse Problem in Calculus of Variations

Liang Li-fu Shi Zhi-fei

(Harbin Shipbuilding Engineering Institute, Harbin)

Abstract

The inverse problem in calculus of variations is studied. By introducing a new concept called variational integral, a new method to systematically study the inverse problem in calculus of variations is given. Using this new method to the elastodynamics and hydrodynamics of visous fluids, we obtained several kinds of variational principles and generalized variational principles, respectively.

Key words variational principle, variational integral, inverse problem