应用数学和力学，第15卷第10期（1994年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

非均匀半平面问题的弹性力学解*

沃 国 纬

（上海交通大学，1994年1月5日收到）

摘 要

本文使用非均匀平面弹性力学的基本方程，通过富氏积分变换，求得了应力函数通解，在此基础上对弹性模量$E(x)=E_0\exp[\beta x]$为指数型的非均匀半平面问题，具体求得了当边界上受任意载荷作用的精确解。最后经退化处理，还得到了有名的 Boussnesq 解，这说明本文的方法是成功的。

关键词 非均匀半平面问题 弹性力学 精确解

一、非均匀弹性力学的基本方程

根据弹性理论[1]，若不考虑体积力作用，则平面弹性力学问题归于解以下一组基本方程：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.2}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

及

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x) \tag{1.4}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \tag{1.5}$$

若将应力$(\sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau_{xy})$用应力函数$F(x,y)$表示：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \tag{1.6}$$

且假定材料的杨氏模量$E(x)=E_0\exp[\beta x]$（E_0，β为常数）呈指数变化，泊松比$\nu=$常数，此种弹性体本文称其为指数型非均匀弹性体。其平面问题，可将式（1.1）～（1.5）归为解以下一个关于应力函数$F(x,y)$的四阶基本偏微分方程：

---

* 汤任基推荐。

$$\nabla^4 F-2\beta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y^2}\right)+\beta^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\nu\beta^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0 \tag{1.7}$$

式中∇^4为通常的双调和算子。容易看出，当弹性模量E为常数时（$\beta=0$），则以上方程便退化为均匀介质平面弹性力学的双调和方程。

二、基本偏微分方程的富氏变换通解

记函数$F(x,y)$的富氏变换及其逆变换为[2]：

$$f(x,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x,y)\exp[i\alpha y]dy \tag{2.1}$$

$$F(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\alpha)\exp[-i\alpha y]d\alpha \tag{2.2}$$

若对式(1.7)进行以式(2.1)表示的富氏变换，则此方程便化为关于函数$f(x,\alpha)$的四阶常微分方程：

$$\frac{d^4 f}{dx^4}-2\beta\frac{d^3 f}{dx^3}+(-2\alpha^2+\beta^2)\frac{d^2 f}{dx^2}+2\beta\alpha^2\frac{df}{dx}+(\alpha^4+\nu\alpha^2\beta^2)f=0 \tag{2.3}$$

根据常微分方程的特征值解法[3]，以上方程的特征方程为：

$$(m^2-\beta m)^2-2\alpha^2(m^2-\beta m)-\alpha^2(\alpha^2+\nu\beta^2)=0 \tag{2.4}$$

由此解得四个特征值m_1，m_2，m_3及m_4为：

$$m_{1,3}=\frac{\beta\mp\sqrt{\beta^2+4(\alpha^2+\alpha\beta\sqrt{\nu}\,i)}}{2} \tag{2.5}$$

$$m_{2,4}=\frac{\beta\mp\sqrt{\beta^2+4(\alpha^2-\alpha\beta\sqrt{\nu}\,i)}}{2} \tag{2.6}$$

若将特征值用指数形式的复数表示，则

$$m_{1,3}=\frac{\beta\mp\rho^{1/2}\exp[\theta i/2]}{2} \tag{2.7}$$

$$m_{2,4}=\frac{\beta\mp\rho^{1/2}\exp[-\theta i/2]}{2} \tag{2.8}$$

式中

$$\rho=\sqrt{(\beta^2+4\alpha^2)^2+16\nu\alpha^2\beta^2} \tag{2.9}$$

$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{4\alpha\beta\sqrt{\nu}}{\beta^2+4\alpha^2} \tag{2.10}$$

利用以上特征值，便可求得式(2.3)的通解：

$$\begin{aligned}f(x,\alpha)=&A_1(\alpha)\exp[m_1x]+A_2(\alpha)\exp[m_2x]\\&+A_3(\alpha)\exp[m_3x]+A_4(\alpha)\exp[m_4x]\end{aligned} \tag{2.11}$$

式中$A_j(\alpha)$为待定的未知函数，它们由问题的边界条件确定。将式(2.11)回代入逆变换式(2.2)，便得到原问题应力函数$F(x,y)$的富氏变换一般解：

$$F(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}A_j(\alpha)\exp[m_jx]\exp[-i\alpha y]d\alpha \tag{2.12}$$

相应的应力场由式(1.6)求得为：

$$\sigma_x(x,y;\beta)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}a^2\sum_{j=1}^{4}A_j(a)\exp[m_jx]\exp[-iay]da \tag{2.13}$$

$$\sigma_y(x,y;\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{4}A_j(a)m_j^2\exp[m_jx]\exp[-iay]da \tag{2.14}$$

$$\tau_{xy}(x,y;\beta)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}a\sum_{j=1}^{4}A_j(a)m_j\exp[m_jx]\exp[-iay]da \tag{2.15}$$

关于位移场则可使用应变与位移的关系式(1.2)～(1.3)求得，但此处不再具体给出。

三、非均匀半平面问题的一致解

考虑图1弹性模量按指数形式$E=E(x)=E_0\exp[\beta x]$随x变化，在半平面边界$x=0$处作用有任意分布的法向载荷$p(y)$及切向载荷$q(y)$，则此问题可使用以上通解式(2.12)及(2.13)～(2.15)具体求解．此处假定应力在无限远处趋于零；即当$x\to\infty$时σ_x，σ_y，$\tau_{xy}\to 0$，故应力函数的通解应取

$$F(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}A_j(a)\cdot\exp[m_jx]\exp[-iay]da \tag{3.1}$$

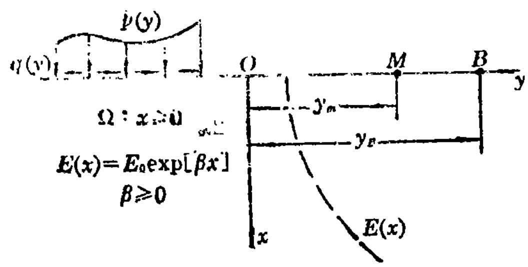

图 1

上式由于$\mathrm{Re}(m_1)<0$，及$\mathrm{Re}(m_2)<0$，故当$x\to\infty$时已保证应力趋于零．式(3.1)中有两个待定函数$A_j(a)\ (j=1,2)$，它们可使用以下边界条件决定：

$$\sigma_x(0,y;\beta)=-p(y) \tag{3.2}$$

$$\tau_{xy}(0,y;\beta)=-q(y) \tag{3.3}$$

将式(2.13)，(2.15)代入以上边界条件，即得

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}a^2A_j(a)\cdot\exp[-iay]da=-p(y) \tag{3.4}$$

$$\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}am_jA_j(a)\exp[-iay]da=-q(y) \tag{3.5}$$

根据富氏变换的逆变换式(2.2)，可知

$$\sum_{j=1}^{2}a^2A_j(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}p(y)\exp[iay]dy \tag{3.6}$$

$$i\sum_{j=1}^{2}am_jA_j(a)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}q(y)\exp[iay]dy \tag{3.7}$$

为了便于讨论并简化问题，这里假定作用于边界$x=0$的载荷与x轴对称，即函数$p(y)$和$q(y)$分别为关于y的偶函数和奇函数：

$$p(y)=p(-y),\quad q(y)=-q(y) \tag{3.8}$$

则式(3.6)及(3.7)便成为

$$\alpha^2A_1(\alpha)+\alpha^2A_2(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{2\pi}}\int_0^\infty p(y)\cos\alpha ydy \tag{3.9}$$

$$\alpha m_1A_1(\alpha)+\alpha m_2A_2(\alpha)=-\sqrt{\frac{2}{2\pi}}\int_0^\infty q(y)\sin\alpha ydy \tag{3.10}$$

由以上两个方程即可求得待定的未知函数为

$$A_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(m_1-m_2)}\left(\frac{m_2Q_1}{\alpha^2}-\frac{Q_2}{\alpha}\right) \tag{3.11}$$

$$A_2(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(m_1-m_2)}\left(\frac{Q_2}{\alpha}-\frac{m_1Q_1}{\alpha^2}\right) \tag{3.12}$$

式中Q_1，Q_2可由以下公式计算

$$Q_1(\alpha)=-2\int_0^\infty p(y)\cos\alpha ydy \tag{3.13}$$

$$Q_2(\alpha)=2\int_0^\infty q(y)\sin\alpha ydy \tag{3.14}$$

于是得应力函数的精确解为：

$$F(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\frac{(m_2Q_1-\alpha Q_2)\exp[m_1x-i\alpha y]}{(m_1-m_2)\alpha^2}d\alpha$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty\frac{(\alpha Q_2-m_1Q_1)\exp[m_2x-i\alpha y]}{(m_1-m_2)\alpha^2}d\alpha \tag{3.15}$$

至此图1问题得到解决.

四、应力场的一般表达式

将以上求得的应力函数$F(x,y)$代入应力表达式(1.6)，经过若干运算后即得图1半平面的应力精确解：

$$\sigma_x(x,y;\beta)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_{p1}(x,y,\eta)p(\eta)d\eta$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_{q1}(x,y,\eta)q(\eta)d\eta \tag{4.1}$$

式中

$$K_{p1}(x,y,\eta)=2\int_0^\infty\frac{m_1\exp[m_2x]-\bar m_1\exp[\bar m_2x]}{m_1-\bar m_1}\cos\alpha y\cos\alpha\eta d\alpha \tag{4.2}$$

$$K_{q2}(x,y,\eta)=2\int_0^\infty\frac{\exp[m_1x]-\exp[\bar m_1x]}{m_1-\bar m_1}\alpha\cos\alpha y\sin\alpha\eta d\alpha \tag{4.3}$$

若进一步使用式(2.7)和(2.8)，则以上积分核(4.2)、(4.3)便化为以无穷积分表示的实积分，它们将便于数值积分.

$$K_{p1}(x,y,\eta)=-2$$

$$\cdot\int_0^\infty\frac{\left[\beta\sin\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\rho}\sin\frac{\theta}{2}\right)-\sqrt{\rho}\sin\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\rho}\sin\frac{\theta}{2}+\theta\right)\right]\exp\left[\frac{x}{2}\left(\beta-\sqrt{\rho}\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\sqrt{\rho}\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\cdot\cos\alpha y\cos\alpha\eta d\alpha \tag{4.4}$$

$$K_{q1}(x,y,\eta)=4\int_0^\infty \frac{\sin\frac{1}{2}\left(x\sqrt{\rho}\sin\frac{\theta}{2}\right)\cdot\exp\left[\frac{x}{2}\left(\beta-\sqrt{\rho}\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\sqrt{\rho}\sin\frac{\theta}{2}}\cdot\alpha\cos\alpha y\cos\alpha\eta d\alpha \tag{4.5}$$

同理可求得另两个应力精确解：

$$\sigma_y(x,y;\beta)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_{p2}(x,y,\eta)p(\eta)d\eta-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_{q2}(x,y,\eta)q(\eta)d\eta \tag{4.6}$$

$$\tau_{xy}(x,y;\beta)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_{p3}(x,y,\eta)p(\eta)d\eta-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_{q3}(x,y,\eta)q(\eta)d\eta \tag{4.7}$$

式中

$$K_{p2}(x,y,\eta)=2\int_0^\infty \frac{m_1^2\bar{m}_2\exp[m_1x]-\bar{m}_1^2\bar{m}_2\exp[\bar{m}_1x]}{\alpha^2(m_1-\bar{m}_1)}\cos\alpha y\cos\alpha\eta d\alpha \tag{4.8}$$

$$K_{q2}(x,y,\eta)=2\int_0^\infty \frac{-m_1^2\exp[m_1x]+\bar{m}_1^2\exp[\bar{m}_1x]}{\alpha(m_1-\bar{m}_1)}\cos\alpha y\sin\alpha\eta d\alpha \tag{4.9}$$

$$K_{p3}(x,y,\eta)=2\int_0^\infty \frac{m_1\bar{m}_1(\exp[m_1x]-\exp[\bar{m}_1x])}{\alpha(m_1-\bar{m}_1)}\sin\alpha y\cos\alpha\eta d\alpha \tag{4.10}$$

$$K_{q3}(x,y,\eta)=2\int_0^\infty \frac{-m_1\exp[m_1x]+\bar{m}_1\exp[\bar{m}_1x]}{m_1-\bar{m}_1}\sin\alpha y\sin\alpha\eta d\alpha \tag{4.11}$$

五、半平面边界的沉陷位移计算

当半平面区域Ω中的应力由式(4.1)、(4.6)、(4.7)求出后，使用几何方程式(1.2)、(1.3)及广义虎克定律式(1.4)、(1.5)，通过积分便可求出域中的位移．此处只计算半平面边界($x=0$)的法向位移$u(0,y)$．显然，这对分析地基基础（即$x=0$边界）的沉陷有工程应用价值，故在此处予以详细讨论．由于

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{E(x)}[\sigma_x-\nu\sigma_y] \tag{5.1}$$

将式(4.1)、(4.6)代入上式，便得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\pi E_0\exp[\beta x]}\left[\int_0^\infty K_p(x,y,\eta)p(\eta)d\eta+\int_0^\infty K_q(x,y,\eta)q(\eta)d\eta\right] \tag{5.2}$$

式中 $$K_p(x,y,\eta)=K_{p1}(x,y,\eta)-\nu K_{p2}(x,y,\eta) \tag{5.3}$$

$$K_q(x,y,\eta)=K_{q1}(x,y,\eta)-\nu K_{q2}(x,y,\eta) \tag{5.4}$$

为计算边界$x=0$上某点$M(y_m)$的沉陷，可在$x=0$边界上取定一基点$B(y_B)$，M点相对于基点B的沉陷δ，则由此两点的法向位移差求得：

$$\delta=u_m-u_B \tag{5.5}$$

使用式(5.2)，则以上沉陷必由以下积分决定

$$\delta=\frac{1}{\pi E_0}\int_0^\infty p(\eta)d\eta\int_0^\infty [K_p(x,y_m,\eta]-K_p(x,y_B,\eta)]\exp[-\beta x]dx$$

$$+\frac{1}{\pi E_0}\int_0^\infty q(\eta)d\eta\int_0^\infty [K_q(x,y_m,\eta)-K_q(x,y_B,\eta)]\exp[-\beta x]dx \tag{5.6}$$

上式表明，当边界$x=0$上的外载(p,q)给定后，则沉陷即可由以上公式计算得到．在实际计算时，由于积分核$K_p(x,y,\eta)$和$K_q(x,y,\eta)$比较复杂，因而一般可使用数值积分法确定．

六、集中力作用的解及其退化情形

若非均匀半平面边界$(x=0)$的坐标原点作用集中力P，如图 2 所示．此集中力P可使用$\delta(x)$函数，便可由应力的一般解式(4.1)、(4.6)及(4.7)求得集中力P作用时任一点$Q(x,y)$的应力为

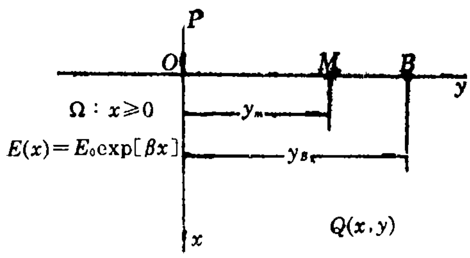

图 2

$$\sigma_{xP}(x,y;\beta)=-\frac{P}{2\pi}K_{P1}(x,y,0)$$

$$=-\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{m_1\exp[m_1x]-\bar{m}_1\exp[\bar{m}_1x]}{m_1-\bar{m}_1}\cos\alpha y d\alpha \tag{6.1}$$

$$\sigma_{yP}(x,y;\beta)=-\frac{P}{2\pi}K_{P2}(x,y,0)$$

$$=-\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{m_1^2m_2\exp[m_1x]-\bar{m}_1^2\bar{m}_2\exp[\bar{m}_1x]}{\alpha^2(m_1-\bar{m}_1)}\cos\alpha y d\alpha \tag{6.2}$$

$$\tau_{xyP}(x,y;\beta)=-\frac{P}{2\pi}K_{P3}(x,y,0)$$

$$=-\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{m_1\bar{m}_1(\exp[m_1x]-\exp[m_1x])}{\alpha(m_1-\bar{m}_1)}\sin\alpha y d\alpha \tag{6.3}$$

与此相应，M点相对于B点的沉陷由式(5.6)求得为

$$\delta_P=\frac{P}{2\pi E_0}\int_0^\infty [K_P(x,y_m,0)-K_P(x,y_B,0)]\exp[-\beta x]dx \tag{6.4}$$

将式(4.2)、(4.8)及(5.3)代入上式，最后经积分的次序交换后得精确解为

$$\delta_P=\frac{P}{\pi E_0}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha y_m-\cos\alpha y_B}{m_1-\bar{m}_1}d\alpha\int_0^\infty (m_1\exp[m_2x]-\bar{m}_1\exp[\bar{m}_2x])\exp[-\beta x]dx$$

$$-\frac{\nu P}{\pi E_0}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha y_m-\cos\alpha y_B}{\alpha^2(m_1-\bar{m}_1)}d\alpha\int_0^\infty (m_1^2m_2\exp[m_1x]-\bar{m}_1^2\bar{m}_2\exp[\bar{m}_1x])\exp[-\beta x]dx \tag{6.5}$$

若对以上得到的应力表达式(6.1)～(6.3)和半平面边界的沉陷位移表达式(6.4)或(6.5)作$\lim\beta\to0$的极限运算，则这些应力和沉陷便退化为熟知的均质半平面问题的Boussnesq集中力解。记此时的应力和位移沉陷为：$\tilde{\sigma}_{ijP}$及$\tilde{\delta}_P$，则它们由式(6.1)～(6.3)及(6.5)按以下极限运算求得：

$$\tilde{\sigma}_{xP}(x,y)=\lim_{\beta\to0}\sigma_{xP}(x,y;\beta) \tag{6.6}$$

$$\tilde{\sigma}_{yP}(x,y)=\lim_{\beta\to0}\sigma_{yP}(x,y;\beta) \tag{6.7}$$

$$\tilde{\tau}_{xyP}(x,y)=\lim_{\beta\to0}\tau_{xyP}(x,y;\beta) \tag{6.8}$$

$$\tilde{\delta}_P=\lim_{\beta\to0}\delta_P \tag{6.9}$$

利用以下极限和积分关系[4]

$$\lim_{\beta\to0}\frac{m_1\exp[m_2x]-\bar{m}_1\exp[\bar{m}_2x]}{m_1-\bar{m}_1}=(\alpha x+1)\exp[-\alpha x] \tag{6.10}$$

$$\lim_{\beta\to0}\frac{m_1^2m_2\exp[m_1x]-\bar{m}_1^2\bar{m}_2\exp[\bar{m}_1x]}{\alpha^2(m_1-\bar{m}_1)}=-(\alpha x-1)\exp[-\alpha x] \tag{6.11}$$

$$\lim_{\beta\to0}\frac{m_1\bar{m}_1(\exp[m_1x]-\exp[\bar{m}_1x])}{\alpha(m_1-\bar{m}_1)}=\alpha x\exp[-\alpha x] \tag{6.12}$$

$$\int_0^\infty\exp[-\alpha x]\cos\alpha y\,d\alpha=\frac{x}{x^2+y^2} \tag{6.13}$$

$$\int_0^\infty\alpha\exp[-\alpha x]\cos\alpha y\,d\alpha=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{6.14}$$

$$\int_0^\infty\alpha\exp[-\alpha x]\sin\alpha y\,d\alpha=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \tag{6.15}$$

因而得到均匀半平面问题的 Boussnesq 解为

$$\tilde{\sigma}_{xP}(x,y)=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} \tag{6.16}$$

$$\tilde{\sigma}_{yP}(x,y)=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2} \tag{6.17}$$

$$\tilde{\tau}_{xyP}(x,y)=-\frac{2P}{\pi}\cdot\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \tag{6.18}$$

相应的位移沉陷为

$$\tilde{\delta}_P=\frac{2P}{\pi E_0}\ln\frac{y_B}{y_m} \tag{6.19}$$

上述结果说明本文所采用的方法是正确的。

七、结　　语

以上使用应力函数求解方法，通过富氏积分变换，求得了弹性模量为指数型$E(x)=E_0\exp[\beta x]$时非均匀平面问题的应力函数通解。在此基础上对半平面边界给定任意载荷的第一类弹性力学问题，具体求得了问题的精确解，其中包括半平面区域中的应力及其边界的相对沉陷。经退化处理，还获得了有名的Boussnesq解。以上结果可直接用于土木工程或

地震工程中关于非均匀地基的强度及其表面的沉陷分析。本文所得的应力函数通解，亦可用于无限长非均匀板条的第一类弹性力学边界值问题的精确求解。

参 考 文 献

[1] 徐芝纶，《弹性力学》（上册），高等教育出版社（1984）.

[2] I. N. 史奈登，《富利叶变换》，科学出版社（1958）.

[3] 中山大学数学力学系，《常微分方程》，人民教育出版社（1979）.

[4] Прудников А. П., *Интегралы и Ряды*, Москва, Наука (1981).

An Elasticity Solution of a Nonhomogeneous Half-Plane Problem

Wo Guo-wei

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

Abstract

We employ fundamental equations of non-homogeneous elasticity and Fourier integral transformations to obtain the general solutions of the stress function. On the basis of these points of view and when the forces on the boundary are arbitrary for non-homogeneous half-plane problems with the Young's modulus $E(x)=E_0\exp[\beta x]$, accurate solutions are obtained. At last with the degeneracy it is obtained that the famous Boussnesq solution and this method is successful.

Key words non-homogeneous half-plane problem, accurate solution, elasticity