应用数学和力学，第15卷第10期（1994年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一致光滑Banach空间内多值单调算子不动点的迭代*

邓磊　　丁协平

（重庆永川 重庆师范专科学校）　（成都 四川师范大学）

（1993年9月1日收到）

摘　要

本文在一致光滑Banach空间中，讨论了满足一个单调型条件的多值映射的不动点的迭代过程.

关键词　多值算子　单调型　一致光滑Banach空间

一、引　言

设X是Banach空间，X^*是其对偶空间．$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示广义对偶对．对$1<p<\infty$，映射$J_p:X\to 2^{X^*}$:

$$J_px=\{f^*\in X^*:\langle x,f^*\rangle=\|f^*\|\|x\|,\ \|f^*\|=\|x\|^{p-1}\}$$

称为以$\varphi(t)=t^{p-1}$为尺度的对偶映射．特别地，以$\varphi(t)=t$为尺度的对偶映射，称为正规对偶映射，用J表示．众所周知，$J_px=\|x\|^{p-1}Jx$对一切$x\in X\setminus\{0\}$和$1<p<\infty$成立（见[3，定理8.1.3；5]）.

设K是Banach空间X的一个子集．映射$T:K\to 2^K$称为满足单调性条件，如果存在$j\in J(x-q)$，对$q\in K$，$k<1$和对一切$x\in K$，$\xi\in Tx$满足

$$\mathrm{Re}\langle\xi-q,j\rangle\leqslant k\|x-q\|^2 \tag{1.1}$$

或等价地，存在$j_s\in J_s(x-q)$，对$q\in K$，$k<1$和对一切$x\in K$，$\xi\in Tx$满足

$$\mathrm{Re}\langle\xi-q,j_s\rangle\leqslant k\|x-q\|^s \tag{1.2}$$

对于在Hilbert空间H中的单调型多值算子，Dunn[2]已证明，如果$x^*\in Tx^*$则$x^*=q$．于是，T至多只有一个不动点．进一步地，如果T的值域有界，即存在$\delta>0$使得对一切x，$y\in K$，$\xi\in Tx$，$\eta\in Ty$，有

$$\|\xi-\eta\|\leqslant\delta \tag{1.3}$$

成立；并且如果在K中的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足

$$x_{n+1}=(1-C_n)x_n+C_n\xi_n,\ 存在\xi_n\in Tx_n \tag{1.4}$$

* 国家自然科学基金资助项目

其中$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}\subset(0,1]$满足条件

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2<\infty,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}C_n=\infty \tag{1.5}$$

那么$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛到q。在文[2]中，也同时考虑了涉及条件(1.5)的一些其他结果。

最近，Chidume[1]在L_p，$p\geqslant2$中，推广了Dunn的结果。在本文中，我们推广Chidume[1]的结果到具有光滑模$s>1$的一致光滑Banach空间。

二、预 备 知 识

设X是一实Banach空间，如果光滑模$\rho_X(\tau)$：

$$\rho_X(\tau)=\sup\{[\|x+y\|+\|x-y\|]/2-1;\ \|x\|=1,\ \|y\|\leqslant\tau\}$$

满足当$\tau\to0$时$\rho_X(\tau)/\tau\to0$，称X是一致光滑的。我们从[5]知，J_p是单值的当且仅当X是一致光滑的；又从[4，命题1.e.2；5]知，一致凸与一致光滑有一个对偶关系：X是一致凸（光滑）当且仅当X^*是一致光滑（凸）。

如果存在常数$c>0$，使得对$0<\tau<\infty$，有

$$\rho_X(\tau)\leqslant c\tau^s$$

则称X具有光滑模$s>1$，或说X是s一致光滑的。由文[4，p.63；5]知道，一切Hilbert空间以及Banach空间L_p，l_p和$W_m^p(1<p<\infty)$都是一致光滑的，并且

$$\rho_X(\tau)<\begin{cases}\tau^p/p, & 1<p<2\\ (p-1)\tau^2/2, & p\geqslant2\end{cases}\qquad (X=L_p,\ l_p\text{或}W_m^p) \tag{2.1}$$

在下面的所有讨论中，X表示一个具有光滑模$s>1$的s一致光滑Banach空间，而j_s总表示单值对偶映射。

引理1[5] 对X中的一切x，y，存在一个常数$b>0$，使得

$$\|x+y\|^s\leqslant\|x\|^s+b\|y\|^s+s\langle y,j_sx\rangle \tag{2.2}$$

引理2 设a和b是两个非负实数，则对一切$s>1$，有

$$(a+b)^s\geqslant a^s+sa^{s-1}b \tag{2.3}$$

证明 我们考虑两种可能情况：

情况Ⅰ：$a=0$，显然。

情况Ⅱ：$a>0$。因对一切$x>0$和$s>1$有，$(1+x)^s\geqslant1+sx$。于是

$$(a+b)^s=a^s(1+b/a)^s\geqslant a^s[1+s(b/a)]=a^s+sa^{s-1}b$$

引理3[2] 设β_n由下式产生

$$\beta_{n+1}=(1-\delta_n)\beta_n+\sigma_n^2$$

其中$n\geqslant1$，$\beta_1\geqslant0$，$\{\delta_n\}\subset[0,\ 1]$且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2<\infty,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\delta_n=\infty$$

则$\beta_n\geqslant0$对一切$n\geqslant1$，且当$n\to\infty$时$\beta_n\to0$。

三、主 要 结 果

定理1 设K是X的一子集，映射$T:K\to 2^K$和$q\in K$满足(1.2)且$k<1$. 如果 x^* 是T的不动点，那么$x^*=q$.

假设T还满足(1.3)，设K中的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$满足(1.4)且对一切$n\geqslant 1$有$0\leqslant C_n\leqslant 1$. 令

$$\rho_n=\|x_n-q\|^2 \tag{3.1}$$

且

$$1-\gamma_n=[1-(1-k)C_n]^s\geqslant 0 \tag{3.2}$$

那么对一切$n\geqslant 1$,

$$0\leqslant\rho_n\leqslant B^2\alpha_n \tag{3.3}$$

其中$\alpha_n\geqslant 0$是由下式产生的

$$\alpha_{n+1}=(1-\gamma_n)\alpha_n+C_n^s,\quad \alpha_1=1 \tag{3.4}$$

且

$$B^2=\max\{\rho_1,d^s\} \tag{3.5}$$

$$d=b^{1/s}\sup\{\|\xi-q\|:\xi\in Tx,\ x\in K\} \tag{3.6}$$

其中b是出现在不等式(2.2)中的常数. 如果$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$还满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n^s<\infty,\ \text{且}\sum_{n=1}^{\infty}C_n=\infty \tag{3.7}$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$且$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛于$q$.

最后，如果K是凸的且对一切$x\in K$, $Tx\neq\phi$, 那么对每个$x_0\in K$和$\{C_n\}_{n=0}^{\infty}\subset[0,1]$, 至少存在由$x_0$开始的一个序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset K$满足(1.4); 如果(1.3)成立，则至多存在一个q满足(1.2)且$k<1$.

证明 设$x^*\in Tx^*$, 由条件(1.2)，我们获得

$$\langle x^*-q,j_s(x^*-q)\rangle\leqslant k\|x^*-q\|^s$$

于是，$(k-1)\|x^*-q\|^s\geqslant 0$, 且因$k<1$有$x^*=q$.

从(1.3), (1.4)和(2.4)，我们有$\rho_n\geqslant 0$且

$$\begin{aligned}\rho_n&=\|x_{n+1}-q\|^s=\|(1-C_n)(x_n-q)+C_n(\xi_n-q)\|^s\\&\leqslant\|(1-C_n)(x_n-q)\|^s+b\|C_n(\xi_n-q)\|^s+s\langle C_n(\xi_n-q),\ j_s(1-C_n)(x_n-q)\rangle\\&=(1-C_n)^s\|x_n-q\|^s+bC_n^s\|\xi_n-q\|^s+sC_n(1-C_n)^{s-1}\langle\xi_n-q,j_s(x_n-q)\rangle\\&\leqslant(1-C_n)^s\|x_n-q\|^s+sC_n(1-C_n)^{s-1}k\|x_n-q\|^s+C_n^sd^s\\&\leqslant[1-C_n+kC_n]^s\rho_n+C_n^sd^s\\&=[1-(1-k)C_n]^s\rho_n+C_n^sd^s=(1-\gamma_n)\rho_n+C_n^sd^s\end{aligned}$$

即

$$\rho_{n+1}\leqslant(1-\gamma_n)\rho_n+C_n^sd^s \tag{3.8}$$

由不等式(3.8)和简单的归纳得

$$0\leqslant\rho_n\leqslant B^2\alpha_n,\qquad \text{对一切}n\geqslant 1 \tag{3.9}$$

如果$\{C_n\}\subset[0,1]$满足(3.7)，由条件$s>1$，我们有

$$\gamma_n=1-[1-(1-k)C_n]^s\geqslant 1-[1-(1-k)C_n]\geqslant(1-k)C_n$$

且对一切$n\geqslant 1$，γ_n在$[0, 1]$. 于是，$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}(1-k)C_n=\infty$. 对一切$n\geqslant 1$，令$\beta_n=\alpha_n$，$\gamma_n=\delta_n$和$\sigma_n=C_n^{s/2}$，从引理3得当$n\to\infty$时，$\alpha_n\to 0$. 所以(3.9)推得当$n\to\infty$时$\rho_n\to 0$. 因此，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$强收敛于$q$.

如果对$x\in K$有$Tx\neq\phi$，那么由选择公理T有单值"截口"，$T^*:K\to K$，对$x\in K$有$T^*x\in Tx$. 对任一个这样的截口，对凸集K和$\{C_n\}\subset[0,1]$，由

$$x_{n+1}=(1-C_n)x_n+C_nT^*x_n,\qquad x_0\in K$$

产生一个序列$\{x_n\}\subset K$满足(1.4). 更进一步，如果T满足(1.3)且$\{C_n\}\subset[0,1]$满足(3.7)，那么对(1.2)成立的这个序列$\{x_n\}\subset K$必强收敛于K中的一个x^*；如果存在两个及以上这样的x^*，$\{x_n\}$应有两个不同的极限，这是不可能的.

注 1　定理1推广了[1]的定理1.

我们使用基本上与文[2]中相同的方法，可以得到下面的两个定理. 因证明是较平常的，我们省略其证明过程.

定理2　设K是X的一子集，$T:K\to 2^K$满足(1.3)和$q\in K$满足(1.2)且$k<1$. 对$n\geqslant 1$，定义α_n^*和C_n^*如下

$$\alpha_{n+1}^*=(1-\gamma_n^*)\alpha_n^*+(C_n^*)^s,\quad \alpha_1^*=1$$
$$1-\gamma_n^*=[1-(1-k)C_n^*]^s\geqslant 0$$
$$C_n^*=[(1-k)^{1/(s-1)}(\alpha_n^*)^{1/(s-1)}]/[1+(1-k)^{s/(s-1)}(\alpha_n^*)^{1/(s-1)}]$$

且令$C_0^*=1$. 则对$n\geqslant 1$，

$$\alpha_n^*=1/[1+(1-k)^{s/(s-1)}(n-1)]^{(s-1)}$$
$$C_n^*=(1-k)^{1/(s-1)}/[1+(1-k)^{s/(s-1)}n]$$

于是，$\{\alpha_n^*\}$和$\{C_n^*\}$在$[0, 1]$中单调减少到0，且当$n\to\infty$时，$\alpha_n^*\sim[1/(1-k)^{s/(s-1)}]n^{-(s-1)}$和$C_n^*\sim[1/(1-k)]n^{-1}$. 而且，对一切$n\geqslant 1$和对$C_n^*$满足(1.5)的任何$\{x_n^*\}\subset K$，有

$$0\leqslant\|x_n^*-q\|\leqslant d(\alpha_n^*)^{1/s}$$

其中d由(3.6)定义. 最后，如果$\{C_n\}$在$(-\infty, +\infty)$中满足(3.2)的任一个序列，$\{\alpha_n\}$满足(3.4)，那么对一切$n\geqslant 1$有

$$0\leqslant\alpha_n^*\leqslant\alpha_n$$

定理3　设X是具有光滑模2的一致光滑Banach空间. 设K是X的一子集，$T:K\to 2^K$满足(1.3)且$q\in K$满足(1.2)且有$k\in[0,1)$. 如果$\{x_n\}\subset K$和$\{C_n\}\subset[0,1]$满足(1.4)，那么对一切$n\geqslant 1$有

$$0\leqslant\rho_n\leqslant B^2\alpha_n$$

其中ρ_n和B^2分别由(3.1)和(3.5)定义，$\{\alpha_n\}$由下面两式定义

$$\alpha_{n+1}=(1-\gamma_n)\alpha_n+C_n^2,\quad \alpha_1=1 \tag{3.10}$$
$$1-\gamma_n=(1-C_n)^2+2C_n(1-C_n)k \tag{3.11}$$

设$\{\alpha_n^*\}$和$\{C_n^*\}$由(3.10)和(3.11)产生，且

$$C_n^*=(1-k)\alpha_n^*/[1+(1-2k)\alpha_n^*].\ C_0^*=1$$

则$\{\alpha_n^*\}$和$\{C_n^*\}$在$(0, 1]$中分别同$[1/(1-k)^2]n^{-1}$和$[1/(1-k)]n^{-1}$单调减少到0，且对一切$n\geqslant 1$有

$$0\leqslant\alpha_n^*\leqslant\max\{1/(1-k)^2,\ 2/(1-k)\}n^{-1}$$

更进一步，如果具有$\{C_n^*\}$的$\{x_n^*\}\subset K$满足(1.4)，d由(3.6)定义，则对一切$n\geqslant 1$有

$$0\leqslant\|x^*-q\|\leqslant d(\alpha_n^*)^{1/2}$$

最后，对具有$\{\alpha_n\}$的任何一个满足(3.10)和(3.11)的序列$\{C_n\}\subset[0,1]$，对一切$n\geqslant 1$有

$$0\leqslant\alpha_n^*\leqslant\alpha_n$$

注2 定理2和3分别推广了文[1]的定理2和3。

参 考 文 献

[1] Chidume, C. E., Iterative construction of fixed points for multivalued operators of the monotone type, *Appl. Anal.*, 23 (1986), 209—218.

[2] Dunn, J. C., Iterative construction of fixed points for multivalued operators of the monotone type, *J. Funct. Anal.*, 27 (1978), 38—50.

[3] Istratescu, Vasile I., *Fixed Point Theory*, D. Reidel Publishing Company (1981).

[4] Lindenstrauss, J. and L. Tsafriri, *Classical Banach Spaces*, Ⅱ, Springer-Verlag, New York/Berlin (1979).

[5] Xu, Z. B. and G. F. Roach, Characteristic inequalities of uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 157 (1991), 189—210.

Iterative Construction of Fixed Points for Multivalued Operators of the Monotone Type in Uniformly Smooth Banach Spaces

Deng Lei

(*Chongqing Teacher's College, Yongchuan, Chongqing*)

Ding Xie-ping

(*Sichuan Normal University, Chengdu*)

Abstract

The fixed points of set-valued operators satisfying a condition of monotonicity type in s-uniformly smooth Banach spaces are approximated by recursive averaging process in the present paper.

Key words multivalued operator, monotone type, uniformly smooth Banach space