应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于求完全广义强的非线性拟变分不等式的逼近解的迭代算法*

曾 六 川

（上海师范大学，1993年12月24日收到）

摘 要

本文研究求完全广义强的非线性拟变分不等式的逼近解的迭代算法。概括了该领域中作为特例的若干已知结果。我们的结果是Siddiqi与Ansari，Ding及Zeng的结果的推广和改进。

关键词 拟变分不等式 迭代格式 算法的收敛性

一、引 言

众所周知，变分不等式理论是现行数学技术的强有力的工具，并在力学、最优化与控制问题、运筹学和工程科学等中发挥着重要而又基本的作用。变分不等式问题的一个重要而又有益的推广是广义变分不等式问题，这类问题由Browder[2]，Rockafellar[11]，Saigal[12]，Fang与Peterson[14]，Siddiqi与Ansari[13]及Ding[3]引入和研究，其中，涉及到变分不等式公式中的映像用多值映像取代。另一方面，一类称为强的非线性变分（拟变分）不等式问题由Noor[7,9]与Siddiqi和Ansari[14] 引入与研究，而另一类称为一般强的非线性变分（拟变分）不等式问题由Siddiqi与Ansari[15]和Zeng[16]引入与研究。

最近，Ding[17]定义了一类称为广义强的非线性拟变分不等式问题。Ding[17] 也给出了求广义强的非线性拟变分不等式问题的逼近解的算法。Zeng[5] 受 Ding[17]、Siddiqi 与 Ansari[15] 的启发，引入和研究了一类称为完全广义强的非线性拟变分不等式问题，并且，给出求这类问题逼近解的迭代算法，这是Ding[17]的算法的推广。

本文，我们继续研究求完全广义强的非线性拟变分不等式的逼近解的迭代算法。这里，我们将给出一些不同于Zeng[5]的算法的新的算法。它们是Siddiqi与 Ansari[15]，Ding[17]，及Zeng[5,16]的结果的推广与改进。

二、预 备 知 识

设H是一Hilbert空间，H^*是H的对偶空间，用$(\cdot, \cdot)$和 $\|\cdot\|$ 表空间 H 中的内积和范

* 丁协平推荐。

数，用$\langle\cdot,\cdot\rangle$表$H^*$和$H$的元素之间的对偶对．设$\Lambda$是从$H^*$到$H$上的典范同构，且定义为

$$\langle u,x\rangle=(\Lambda u,x)\quad(\forall x\in H,\forall u\in H^*).$$

则$\|\Lambda\|_{H^*}=\|\Lambda^{-1}\|_H=1$.

设K是H的非空闭凸子集，T，$A:H\to 2^{H^*}$是两个多值映像．设g是从H到自身中的连续映像；则我们考虑问题：寻求$x\in H$，$u\in T(x)$，$v\in A(x)$使得$g(x)\in K$且

$$\langle u-v,y-g(x)\rangle\geqslant 0\qquad(\forall y\in K)\tag{2.1}$$

我们称此问题为完全广义强的非线性变分不等式问题(CGSNVIP(T,A,K))．

如果T和A都是单值映像且g是从H到自身中的恒等映像，即，$g(x)=x(\forall x\in H)$，则CGSNVIP(T,A,K)(2.1)成为强的非线性变分不等式问题（见Noor[7]）．

如果$A=0$，且$g(x)=x(\forall x\in H)$，则问题(2.1)成为广义变分不等式问题，这类问题为Fang与Peterson[4]，Siddiqi与Ansari[13]及Ding[3]所考虑．

如果T和A都是单值映像，则问题(2.1)称为一般强的非线性变分不等式问题，这类问题为Siddiqi与Ansari[15]，Zeng[16]所考虑．

如果$g(x)=x$，$\forall x\in H$，则问题(2.1)称为广义强的非线性变分不等式问题，这类问题为Ding[17]所考虑．

如果K依赖于解x，则问题(2.1)称为完全广义强的非线拟变分不等式问题(CGSNQVIP$(T,A;K(x))$)．更精确地说，给定映像$K:H\to 2^H$：问题CGSNQVIP$(T,A;K(x))$就是，寻求$x\in H$，$u\in T(x)$，$v\in A(x)$使得$g(x)\in K(x)$且

$$\langle u-v,y-g(x)\rangle\geqslant 0\qquad(\forall y\in K(x))\tag{2.2}$$

特别地，如果$g(x)=x$（$\forall x\in H$)，则问题(2.2)称为广义强的非线性拟变分不等式问题，即为Ding[17]所考虑的问题．如果T和A都是单值映像，则问题(2.2)称为一般强的非线性拟变分不等式问题，即为Siddiqi与Ansari[15]，Zeng[16]所考虑的问题．

在许多重要的应用中，$K(x)$具有形式

$$K(x)=m(x)+K\tag{2.3}$$

这里，m是从H到自身中的单值映像．

设K是Hilbert空间H的闭凸子集．回忆到，如果P_k记成H到K上的投影，即，对每个$x\in H$，$P_K(x)$是满足等式

$$\|x-P_K(x)\|=\min_{y\in K}\|x-y\|$$

则我们有下列熟知的结果．

引理2.1[8] 如果$K(x)$由(2.3)式定义，则对任意$x,y\in H$，

$$P_{K(x)}(y)=m(x)+P_K(y-m(x)).$$

引理2.2[6] 设K是空间H的凸子集，则对给定的$z\in H$，我们有$x=P_K(z)$当且仅当$(x-z,\ y-x)\geqslant 0$，$\forall y\in K$.

引理2.3[6] $P_K:H\to K$是非扩张的，即

$$\|P_K(x)-P_K(y)\|\leqslant\|x-y\|\qquad(\forall x,y\in H).$$

设(X,d)是一距离空间，2^X是X的一切非空子集构成的集簇．对任意A，$B\in 2^X$，定义

$$d'(A,B)=\sup\{d(x,y):x\in A,y\in B\}.$$

设$P=\{d(x,y):x,y\in X\}$，$\bar{P}$记成P的闭包．映像$F:X\to 2^X$称为φ-压缩映像，如果

$$d'(Fx,Fy)\leqslant\varphi(d(x,y))\qquad(\forall x,y\in X).$$

其中，$\varphi: \bar{P}\to[0,\infty)$满足$\varphi(t)<t$，$\forall t\in \bar{P}\backslash\{0\}$。

通过仔细地分析Boyd与Wong[1]的定理1、定理2的证明，Ding[17]得到了下列定理。这是[13]的定理3.1的推广。

定理2.1 设(X,d)是一完备的距离凸距离空间，$F: X\to 2^X$是φ-压缩映像，则F有一个不动点，并且，对任意$x_0\in X$，$x_n\in F(x_{n-1})$，$n\geqslant 1$，$\{x_n\}$在X中收敛到F的一个不动点。

定义2.1 设D是空间H的非空子集，$T: D\to 2^{H^*}$，Φ，$\Psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$。我们称

（1） T是Φ-Lipschitz连续的，如果

$$d'(Tx,Ty)\leqslant\|x-y\|\Phi(\|x-y\|)\qquad(\forall x,y\in D_t)$$

（2） T是Ψ-强单调的，如果

$$\langle u-v,x-y\rangle\geqslant\|x-y\|^2\Psi(\|x-y\|),$$

$(\forall x,y\in D,\ \forall u\in T(x),\ \forall v\in T(y))$。

三、主 要 结 果

首先，我们给出下列定理，后面，我们会用到它。

定理3.1[5] 设K是空间H的非空闭凸子集。则问题CGSNQVIP$(T,\ A;K(x))$ (2.2)有解当且仅当，对某个给定的$\rho>0$，映像$F: H\to 2^H$，即定义为

$$F(x)=\bigcup_{u\in T(x)}\ \bigcup_{v\in A(x)}[x-g(x)+m(x)+P_K(g(x)-\rho\Lambda(u-v)-m(x))],$$

有一个不动点。

注3.1 如果$g: H\to H$是恒等映像，则定理3.1化归为Ding[17]的定理3.2，且为Siddiqi与Ansari[15]的引理3.1的集值形式。

定理3.2 设K是空间H的闭凸子集，$T: H\to 2^{H^*}$是Φ-Lipschitz 连续的且Ψ-强单调的，$A: H\to 2^{H^*}$是Γ-Lipschitz连续的，$g: H\to H$是σ-Lipschitz 连续的且 δ-强单调的，$m: H\to H$是μ-Lipschitz连续的。假若

$$\mathrm{Re}(m(x)-m(y),\ x-y-(g(x)-g(y)))\leqslant\gamma\|x-y\|^2\qquad(\forall x,y\in H)\qquad(*)$$

对某个使得$\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant\mu(1-2\delta+\sigma^2)^{1/2}$的常数$\gamma$，其中

$$\gamma_0=\mathrm{int}\{M: \mathrm{Re}(m(x)-m(y),x-y-(g(x)-g(y)))\leqslant M\|x-y\|^2\qquad(\forall x,y\in H)\}.$$

如果存常在数$\rho>0$满足$P\Gamma(t)<1-k$，并且，对一切$t\in[0,\infty)$，

$$\frac{1}{\rho}\{1-[1-(k+\rho\Gamma(t))]^2+\rho^2\Phi^2(t)\}<2\Psi(t)<\frac{1}{\rho}+\rho\Phi^2(t)\tag{3.1}$$

这里，$k=2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}<1$。则问题CGSNQVIP$(T,\ A;\ K(x))$(2.2)有解。

证 定义映像$F: H\to 2^H$如下

$$F(x)=\bigcup_{u\in T(x)}\ \bigcup_{v\in A(x)}[x-g(x)+m(x)+P_K(g(x)-\rho\Lambda(u-v)-m(x))],$$

对每个$x\in H$。

据定理3.1，只须证明F在H中有不动点。对任意的x，$y\in H$，$u_1\in T(x)$，$u_2\in T(y)$，$v_1\in A(x)$，$v_2\in A(y)$，由引理2.3与A的Γ-Lipschitz连续性，我们有

$$\|P_K(g(x)-\rho\Lambda(u_1-v_1)-m(x))-P_K(g(y)-\rho\Lambda(u_2-v_2)-m(y))\|$$
$$\leqslant\|x-y-(g(x)-g(y))+m(x)-m(y)\|+\|x-y-\rho\Lambda(u_1-u_2)\|$$
$$+\rho\|\Lambda(v_1-v_2)\|$$
$$\leqslant\|x-y-(g(x)-g(y))+m(x)-m(y)\|+\|x-y-\rho\Lambda(u_1-u_2)\|$$
$$+\rho d'(Ax,Ay)$$
$$\leqslant\|x-y-(g(x)-g(y))+m(x)-m(y)\|+\|x-y-\rho\Lambda(u_1-u_2)\|$$
$$+\rho\|x-y\|\Gamma(\|x-y\|) \tag{3.2}$$

运用Ding[17]的方法，T的Φ-Lipschitz连续性与Ψ-强单调性，我们有

$$\|x-y-\rho\Lambda(u_1-u_2)\|^2$$
$$\leqslant\|x-y\|^2-2\rho\|x-y\|^2\Psi(\|x-y\|)$$
$$+\rho^2\|x-y\|^2\Phi^2(\|x-y\|). \tag{3.3}$$

运用Noor[10]的方法，g的σ-Lipschitz连续性与δ-强单调性，m的μ-Lipschitz连续性，及条件(*)，我们易见，

$$\|x-y-(g(x)-g(y))+m(x)-m(y)\|^2$$
$$=\|x-y-(g(x)-g(y))\|^2+\|m(x)-m(y)\|^2$$
$$+2\mathrm{Re}(m(x)-m(y),\ x-y-(g(x)-g(y)))$$
$$\leqslant\|x-y-(g(x)-g(y))\|^2+\|m(x)-m(y)\|^2+2\gamma\|x-y\|^2$$
$$\leqslant(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)\cdot\|x-y\|^2 \tag{3.4}$$

其中 $\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant\mu(1-2\delta+\sigma^2)^{1/2}$. 由此，(3.2)及(3.3)，我们得到

$$\|(x-g(x)+m(x)+P_K(g(x)-\rho\Lambda(u_1-v_1)-m(x)))$$
$$-(y-g(y)+m(y)+P_K(g(y)-\rho\Lambda(u_2-v_2)-m(y)))\|$$
$$\leqslant2\|x-y-(g(x)-g(y))+m(x)-m(y)\|$$
$$+\|x-y-\rho\Lambda(u_1-u_2)\|+\rho\lambda\|v_1-v_2\|$$
$$\leqslant\{2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}+[1-2\rho\Psi(\|x-y\|)$$
$$+\rho^2\Phi^2(\|x-y\|)]^{1/2}+\rho\Gamma(\|x-y\|)\}\cdot\|x-y\| \tag{3.5}$$

据(3.5)，得到

$$d'(Fx,Fy)\leqslant\varphi(\|x-y\|)\qquad(\forall x,y\in K)$$

其中，

$$\varphi(t)=t[k+\rho\Gamma(t)+(1-2\rho\Psi(t)+\rho^2\Phi^2(t))^{1/2}$$

且

$$k=2(1-2\delta+\delta^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}.$$

显然，每个Hilbert空间是距离凸的距离空间，且由(3.2)，$\varphi(t)<t$，$\forall x\in[0,\infty)$. 据定理2.1，F在H中有一不动点x^*，因此，问题CGSNQVIP$(T,A;K(x))$(2.2)有解 (x^*,u^*,v^*).

注3.2 如果$g(x)=x$，$m(x)=0$，$\forall x\in H$，定理3.2就化归为Ding[17]的定理3.3. 如果 $m(x)=0$，$\forall x\in H$，则定理3.2化归为Zeng[5]的定理3.3.

定理3.3 设K是空间H的闭凸子集，$T:H\to2^{H^*}$是Φ-Lipschitz连续的且Ψ-强单调的，$A:H\to2^{H^*}$是Γ-Lipschitz连续的，$m:H\to H$是μ-Lipschitz连续的，$g:H\to H$是σ-

Lipschitz连续的，$g-m$是δ-强调单的．假若

$$\operatorname{Re}(m(y)-m(x),\ g(x)-g(y))\leqslant\gamma\|x-y\|^2\qquad(\forall x,y\in H)\tag{$*$}'$$

对某个使得$\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant\mu\sigma$的常数$\gamma$，其中

$$\gamma_0=\inf\{M:\operatorname{Re}(m(y)-m(x),\ g(x)-g(y))\leqslant M\|x-y\|^2,\ \forall x,y\in H\}.$$

如果存在常数$\rho>0$满足$\rho\Gamma(t)<1-k$且

$$\frac{1}{\rho}\{1-[1-(k+\rho\Gamma(t))]^2+\rho^2\Phi^2(t)\}<2\Psi(t)<\frac{1}{\rho}+\rho\Phi^2(t)$$

其中　$k=2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}<1$．则问题CGSNQVIP$(T,A;K(x))$(2.2)有解

注3.3　定理3.3的证明类似于定理3.2的证明．

定理3.4　设K是空间H的闭凸子集，$T:H\to 2^{H^*}$是Φ-Lipschitz连续的且Ψ-强单调的，$A:H\to 2^{H^*}$是Γ-Lipschitz连续的，$g:H\to H$是σ-Lipschitz连续的且δ-强单调的，$m:H\to H$是μ-Lipschitz连续的．假若

$$\operatorname{Re}(m(x)-m(y),x-y-(g(x)-g(y)))\leqslant\gamma\|x-y\|^2\qquad(\forall x,y\in H)\tag{$*$}$$

对某个使得$\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant\mu(1-2\delta+\sigma^2)^{1/2}$的常数．其中

$$\gamma_0=\inf\{M:\operatorname{Re}(m(x)-m(y),x-y-(g(x)-g(y)))\leqslant M\|x-y\|^2,\forall x,y\in H\}.$$

如果存在$\rho>0$与$h\in[0,1)$使得对每个$t\in[0,\infty)$，

$$\begin{aligned}&0<[1-2\rho\Psi(t)+\rho^2\Phi^2(t)]^{1/2}\leqslant h-k-\rho\Gamma(t)\\&\varlimsup_{t\to0^+}\Phi(t)\neq\infty,\ \varlimsup_{t\to0^+}\Gamma(t)\neq\infty\end{aligned}\tag{3.4$'$}$$

其中　$k=2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}<h$，则对任意$x_0\in H$，由下式定义的迭代格式

$$\begin{aligned}x_{n+1}=&(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n[x_n-g(x_n)+m(x_n)\\&+P_K[g(x_n)-\rho\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))]\end{aligned}$$

$$u_n\in T(x_n),\quad v_n\in A(x_n),\quad 0\leqslant\alpha_n\leqslant1,\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\text{发散},\ \forall n\geqslant0$$

满足：$\{x_n\}$在H中强收敛到x^*，$\{u_n\}$与$\{v_n\}$在H^*中分别强收敛到u^*与v^*，并且(x^*,u^*,v^*)是问题CGSNQVIP$(T,A;K(x))$(2.2)的一个解．

证　由假设(3.4)′，对每个$t\in[0,\infty)$，我们有

$$\frac{1}{\rho}\{1-[1-(k+\rho\Gamma(t))]^2+\rho^2\Phi^2(t)\}<2\Psi(t)<\frac{1}{\rho}+\rho\Phi^2(t)$$

且

$$\rho\Gamma(t)\leqslant h-k<1-k.$$

据定理3.3，问题CGSNQVIP$(T,A;k(x))$(2.2)有解(x^*,u^*,v^*)且

$$\begin{aligned}g(x^*)&=P_K(x^*)(g(x^*)-\rho\Lambda(u^*-v^*))\\&=m(x^*)+P_K(g(x^*)-\rho\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*)),\end{aligned}$$

$u^*\in T(x^*)$，$v^*\in A(x^*)$．因此，据引理2.3和A的Γ-Lipschitz连续性，我们有

$$\begin{aligned}&\|P_K(g(x_n)-\rho\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))-P_K(g(x^*)-\rho\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*))\|\\&\leqslant\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\|x_n-x^*-\rho\Lambda(u_n-u^*)\|+\rho\|\Lambda(v_n-v^*)\| \\
&\leqslant\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\| \\
&+\|x_n-x^*-\rho\Lambda(u_n-u^*)\|+\rho\|x_n-x^*\|\Gamma(\|x_n-x^*\|) \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

运用Ding[17]的方法和T的Φ-Lipschitz连续性与Ψ-强单调性，我们有

$$
\begin{aligned}
&\|x_n-x^*-\rho\Lambda(u_n-u^*)\|^2 \\
&\leqslant\|x_n-x^*\|^2-2\rho\|x_n-x^*\|^2\Psi(\|x_n-x^*\|) \\
&+\rho^2\|x_n-x^*\|^2\Phi^2(\|x_n-x^*\|) \\
&=[1-2\rho\Psi(\|x_n-x^*\|)+\rho^2\Phi^2(\|x_n-x^*\|)]\cdot\|x_n-x^*\|^2 \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

运用g的σ-Lipschitz连续性和δ-强单调性，m的μ-Lipschitz连续性及条件(*)，我们易见

$$
\begin{aligned}
&\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|^2 \\
&=\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))\|^2+\|m(x_n)-m(x^*)\|^2 \\
&+2\mathrm{Re}(m(x_n)-m(x^*),x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))) \\
&\leqslant\|x_n-x^*(g(x_n)-g(x^*)\|^2+\|m(x_n)-m(x^*)\|^2 \\
&+2\gamma\|x_n-x^*\|^2 \\
&\leqslant(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)\|x_n-x^*\|^2 \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

其中 $\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant\mu(1-2\delta+\sigma^2)^{1/2}$。由(3.5)，(3.6)和(3.7)，得到

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-x^*\|=\|(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n[x_n-g(x_n)+m(x_n) \\
&+P_K(g(x_n)-\rho\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))] \\
&-[(1-\alpha_n)x^*+\alpha_n(x^*-g(x^*)+m(x^*) \\
&+P_K(g(x^*)-\rho\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*))]\| \\
&\leqslant(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|+\alpha_n\|(x_n-g(x_n)+m(x_n) \\
&+P_K(g(x_n)-\rho\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))) \\
&-(x^*-g(x^*)+m(x^*)+P_K(g(x^*) \\
&-\rho\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*)))\| \\
&\leqslant(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|+\alpha_n\{\|x_n-x^* \\
&-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\| \\
&+\|P_K(g(x_n)-\rho\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n)) \\
&-P_K(g(x^*)-\rho\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*))\|\} \\
&\leqslant(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|+\alpha_n\{2\|x_n-x^* \\
&-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|+\|x_n \\
&-x^*-\rho\Lambda(u_n-u^*)\|+\|\rho\Lambda(v_n-v^*)\|\} \\
&\leqslant(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|+\alpha_n\{k+[1-2\rho\Psi(\|x_n-x^*\|) \\
&+\rho^2\Phi^2(\|x_n-x^*\|)]^{1/2}+\rho\Gamma(\|x_n-x^*\|)\}\|x_n-x^*\| \\
&\leqslant(1-\alpha_n)\|x_n-x^*\|+\alpha_n h\|x_n-x^*\| \\
&=(1-(1-h)\alpha_n)\|x_n-x^*\| \\
&\leqslant\prod_{j=0}^{n}(1-(1-h)\alpha_j)\|x_0-x^*\|.
\end{aligned}
$$

因为$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\alpha_j$发散，$1-h>0$，故$\prod\limits_{j=0}^{\infty}(1-(1-h)\alpha_j)=0$且$\{x_n\}$强收敛到$x^*$。由于$u_n\in T(x_n)$，

$u^*\in T(x^*)$，且T是Φ-Lipschitz连续的，我们有

$$\|u_n-u^*\|\leqslant d'(Tx_n,Tx^*)\leqslant\Phi(\|x_n-x^*\|)\|x_n-x^*\|,$$

从而$\{u_n\}$强收敛到u^*. 类似地，可证$\{v_n\}$强收敛到v^*. 这就结束了证明.

注3.4 当$A(x)=0$, $m(x)=0$, $g(x)=x$, $\forall x\in H$, 定理3.4化归为Ding[3]的定理3.2. 当$H=R^n$, $\Psi(t)=\alpha$, $\Phi(t)=\beta$, $\forall t\in[0,\infty)$, $\alpha_n=1$, $\forall n\geqslant 0$, $A(x)=0$, $m(x)=0$, $g(x)=x$, $\forall x\in H$, 定理3.4化归为Siddiqi与Ansari[13]的定理4.1, 并且随之推广了Fang与Peterson[4.P.382]的相应结果。如果T和A都是单值映像, A以$-A$取代, $g(x)=x$, $m(x)=0$, $\forall x\in H$, 且$\alpha_n=1$, $\forall n\geqslant 0$, 定理3.4中的迭代格式就化归为Noor[9]的算法2.1. 如果$g(x)=x$, $m(x)=0$, $\forall x\in H$, 且定理3.4中其它条件不改变, 则定理3.4化归为Ding[17]的定理3.4. 如果$m(x)=0$, $\forall x\in H$, 且定理3.4中其它条件不改变, 则定理3.4化归为Zeng[5]的定理3.4.

定理3.5 设K是空间H的闭凸子集，$T:H\to 2^{H^*}$是Φ-Lipschitz连续的且Ψ-强单调的，$A:H\to 2^{H^*}$是Γ-Lipschitz连续的，$g:H\to H$是σ-Lipschitz连续的，$m:H\to H$是μ-Lipschitz连续的，且$g-m$是δ-强单调的. 假若

$$\mathrm{Re}(m(y)-m(x),\ g(x)-g(y))\leqslant\gamma\|x-y\|^2\quad(\forall x,y\in H)$$

对某个使得$\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant\mu\sigma$的常数$\gamma$. 其中

$$\gamma_0=\inf\{M:\mathrm{Re}(m(y)-m(x),g(x)-g(y))\leqslant M\|x-y\|^2,\forall x,y\in H\}.$$

如果存在$\rho>0$, $h\in[0,1)$使得对每个$t\in[0,\infty)$,

$$0<[1-2\rho\Psi(t)+\rho^2\Phi^2(t)]^{1/2}\leqslant h-k-\rho\Gamma(t)$$

$$\overline{\lim_{t\to 0^+}}\Phi(t)\neq\infty,\ \overline{\lim_{t\to 0^+}}\Gamma(t)\neq\infty,$$

其中 $k=2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}<h$. 则对任意$x_0\in H$，定义如下的迭代格式

$$x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n[x_n-g(x_n)+m(x_n)+P_K(g(x_n)-\rho\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))]$$

$u_n\in T(x_n)$, $v_n\in A(x_n)$, $0\leqslant\alpha_n\leqslant 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n$发散，$\forall n\geqslant 0$满足：$\{x_n\}$在$H$中强收敛到$x^*$, $\{u_n\}$与$\{v_n\}$在H^*中分别强收敛到u^*与v^*, 并且(x^*,u^*,v^*)是问题CGSNQVIP$(T,A;K(x))$(2.2)的解.

注3.5 定理3.5的证明类似于定理3.4的证明.

定理3.6 设K是空间H的闭凸子集,$T:H\to 2^{H^*}$是α-Lipschitz连续的且β-强单调的，$A:H\to 2^{H^*}$是λ-Lipschit z连续的，$g:H\to H$是σ-Lipschitz连续的且δ-强单调的，并且$m:H\to H$是μ-Lipschitz连续的. 假若

$$\mathrm{Re}(m(x)-m(y),x-y-(g(x)-g(y)))\leqslant\gamma\|x-y\|^2\qquad(\forall x,y\in H)$$

对某个使得$\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant\mu(1-2\delta+\sigma^2)^{1/2}$的常数$\gamma$.其中

$$\gamma_0=\inf\{M:\mathrm{Re}(m(x)-m(y),x-y-(g(x)-g(y)))\leqslant M\|x-y\|^2,\forall x,y\in H\}.$$

如果(x^*,u^*,v^*)是问题CGSNQVIP$(T,A;K(x))$(2.2)的一个解. 则定义如下的迭代格式

$$x_0\in H,x_{n+1}=x_n-g(x_n)+m(x_n)+P_K(g(x_n)$$

$$-\xi\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))],$$

$$u_n\in T(x_n),v_n\in A(x_n),n\geqslant 0,$$

满足：$\{x_n\}$在H中强收敛到x^*，$\{u_n\}$与$\{v_n\}$在H^*中分别强收敛到u^*与v^*。这里，

$$\left|\xi-\frac{\beta+\lambda(k-1)}{\alpha^2-\lambda^2}\right|<\frac{\sqrt{(\beta+\lambda(k-1))^2-(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)}}{\alpha^2-\lambda^2},$$

$$\beta>\lambda(1-k)+\sqrt{(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)}, \quad \lambda(1-k)<\alpha$$

且

$$k=2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}<1.$$

证 因为(x^*,u^*,v^*)是问题 CGSNQVIP$(T,A;K(x))$(2.2)的解，根据定理 3.2 的证明，我们有

$$g(x^*)\in K(x^*),u^*\in T(x^*),v^*\in A(x^*),$$

且

$$g(x^*)=m(x^*)+P_K(g(x^*)-\xi\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*)).$$

据引理2.3与A的λ-Lipschitz连续性，我们有

$$\begin{aligned}
&\|P_K(g(x_n)-\xi\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))-P_K(g(x^*)\\
&\quad-\xi\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*))\|\\
&\leqslant\|g(x_n)-g(x^*)-\xi\Lambda(u_n-u^*)+\xi\Lambda(v_n-v^*)\\
&\quad-(m(x_n)-m(x^*))\|\\
&\leqslant\|g(x_n)-g(x^*)-(x_n-x^*)-(m(x_n)-m(x^*))\|\\
&\quad+\|x_n-x^*-\xi\Lambda(u_n-u^*)\|+\xi\lambda\|v_n-v^*\|\\
&\leqslant\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|\\
&\quad+\|x_n-x^*-\xi\Lambda(u_n-u^*)\|+\xi d'(Ax_n,Ax^*)\\
&\leqslant\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|\\
&\quad+\|x_n-x^*-\xi\Lambda(u_n-u^*)\|+\xi\lambda\|x_n-x^*\|
\end{aligned}\tag{3.8}$$

由T的α-Lipschitz连续性与β-强单调性，我们易得

$$\begin{aligned}
&\|x_n-x^*-\xi\Lambda(u_n-u^*)\|^2\\
&\leqslant[1-2\xi\beta+\xi^2\alpha^2]\|x_n-x^*\|^2
\end{aligned}\tag{3.9}$$

据g的σ-Lipschitz连续性与δ-强单调性，m的μ-Lipschitz连续性，及条件(*)，我们易见

$$\begin{aligned}
&\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|^2\\
&=\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))\|^2+\|m(x_n)-m(x^*)\|^2\\
&\quad+2\mathrm{Re}(m(x_n)-m(x^*),x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*)))\\
&\leqslant\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))\|^2+\|m(x_n)-m(x^*)\|^2\\
&\qquad+2\gamma\|x_n-x^*\|^2\\
&\leqslant(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)\|x_n-x^*\|^2
\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中 $\gamma\leqslant\mu(1-2\delta+\sigma^2)^{1/2}$。由(3.8)，(3.9)和(3.10)，得到

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|&=\|[x_n-g(x_n)+m(x_n)+P_K(g(x_n)-\xi\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))]\\
&\quad-[x^*-g(x^*)+m(x^*)+P_K(g(x^*)-\xi\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*))]\|\\
&\leqslant\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|\\
&\quad+\|P_K(g(x_n)-\xi\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))\\
&\quad-P_K(g(x^*)-\xi\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*))\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\leqslant 2\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|\\&\quad+\|x_n-x^*-\xi\Lambda(u_n-u^*)\|+\xi\lambda\|x_n-x^*\|\\&\leqslant\{2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}+(1-2\beta\xi+\alpha^2\xi^2)^{1/2}\\&\quad+\xi\lambda\}\|x_n-x^*\|\\&=\{k+t(\xi)+\xi\lambda\}\|x_n-x^*\|,\end{aligned}$$

其中 $k=2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}$且$t(\xi)=(1-2\beta\xi+\alpha^2\xi^2)^{1/2}$. 因此,

$$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\theta\|x_n-x^*\|,$$

这里，$\theta=k+t(\xi)+\xi\lambda$.

今证$\theta<1$. 为此，易见$t(\xi)$在$\bar{\xi}=\beta/\alpha^2$处有最小值$t(\bar{\xi})=(1-\beta^2/\alpha^2)^{1/2}$.

对$\xi=\bar{\xi}$, $k+t(\bar{\xi})+\bar{\xi}\lambda<1$推得$k<1$且

$$\beta>\lambda(1-k)+\sqrt{(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)}\ .$$

因此，得到$\theta=k+t(\xi)+\xi\lambda<1$，这里，$\xi$满足

$$\left|\xi-\frac{\beta+\lambda(k-1)}{\alpha^2-\lambda^2}\right|<\frac{\sqrt{(\beta+\lambda(k-1))^2-(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)}}{\alpha^2-\lambda^2},$$

$$\beta>\lambda(1-k)+\sqrt{(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)}\ ,\ \lambda(1-k)<\alpha,$$

且$k<1$.

因为$\theta<1$，我们推得，x_{n+1}在H中强收敛到x^*. 由于$u_n\in T(x_n)$，$u^*\in T(x^*)$，且 T 是α-Lipschitz连续的，我们有

$$\|u_n-u^*\|\leqslant d'(Tx_n,Tx^*)\leqslant\alpha\|x_n-x^*\|.$$

从而，$\{u_n\}$在H^*中强收敛到u^*. 类似地，我们可证，$\{v_n\}$在H^*中强收敛到 v^*. 这就结束了证明.

注3.6 如果T和A都是单值映像，定理3.6就化归为Zeng[16]的定理3.1. 如果T和 A 都是单值映像，且$\gamma=\mu(1-2\delta+\sigma^2)^{1/2}$，则定理3.6化归为Siddiqi与Ansari[15]的定理3.1.

定理3.7 设K是空间H的闭凸子集，$T:H\to 2^{H^*}$是α-Lipschitz连续的且β-强单调的，$A:H\to 2^{H^*}$是λ-Lipschitz 连续的，$g:H\to H$ 是 σ-Lipschitz 连续的，$m:H\to H$ 是 μ-Lipschitz连续的，且g-m是δ-强单调的. 假若

$$\mathrm{Re}(m(y)-m(x),g(x)-g(y))\leqslant\gamma\|x-y\|^2\qquad(\forall x,y\in H)\qquad(*)'$$

对某个使得$\gamma_0\leqslant\gamma\leqslant\mu\sigma$的常数$\gamma$. 其中,

$$\begin{aligned}\gamma_0=\inf\{M:&\mathrm{Re}(m(y)-m(x),g(x)-g(y))\\&\leqslant M\|x-y\|^2,\forall x,y\in H\}.\end{aligned}$$

如果(x^*,u^*,v^*)是问题 CGSNQVIP$(T,A;K(x))$(2.2)的一个解，则定义如下的迭代格式

$$\begin{aligned}x_0\in H,x_{n+1}&=x_n-g(x_n)+m(x_n)+P_K(g(x_n)\\&\quad-\xi\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))],\\u_n\in T(x_n),&v_n\in A(x_n)\qquad(\forall n\geqslant 0),\end{aligned}$$

满足：$\{x_n\}$在H中强收敛到x^*，$\{u_n\}$与$\{v_n\}$在H^*中分别强收敛到u^*与v^*. 其中，ξ满足

$$\left|\xi-\frac{\beta+\lambda(k-1)}{\alpha^2-\lambda^2}\right|<\frac{\sqrt{(\beta+\lambda(k-1))^2-(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)}}{\alpha^2-\lambda^2},$$

$$\beta>\lambda(1-k)+\sqrt{(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)},\ \lambda(1-k)<\alpha$$

且

$$k=2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}<1.$$

证 因为(x^*,u^*,v^*)是问题CGSNQVIP$(T,A;K(x))$(2.2)的解，故据定理3.2的证明，我们有

$$g(x^*)\in K(x^*),u^*\in T(x^*),v^*\in A(x^*),$$

且

$$g(x^*)=m(x^*)+P_K(g(x^*)-\xi\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*)).$$

据引理2.3，A的λ-Lipschitz连续性，我们有

$$\begin{aligned}&\|P_K(g(x_n)-\xi\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))-P_K(g(x^*)-\xi\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*))\|\\&\quad\leqslant\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|\\&\qquad+\|x_n-x^*-\xi\Lambda(u_n-u^*)\|+\xi\lambda\|x_n-x^*\|.\end{aligned}$$

运用T的α-Lipschitz连续性和β-强单调性，我们易得

$$\|x_n-x^*-\xi\Lambda(u_n-u^*)\|^2\leqslant[1-2\xi\beta+\xi^2\alpha^2]\|x_n-x^*\|.$$

运用g的σ-Lipschitz连续性，m的μ-Lipschitz连续性，g-m的δ-强单调性，及条件(*)′，我们得到

$$\begin{aligned}&\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|^2\\&\quad=\|x_n-x^*\|^2-2\mathrm{Re}(x_n-x^*,g(x_n)-m(x_n)-(g(x^*)-m(x^*)))\\&\qquad+\|m(x_n)-m(x^*)\|^2+\|g(x_n)-g(x^*)\|^2\\&\qquad-2\mathrm{Re}(m(x_n)-m(x^*),g(x_n)-g(x^*))\\&\quad\leqslant(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)\|x_n-x^*\|^2.\end{aligned}$$

因此，由上面的论证，我们推得

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-x^*\|\\&\quad=\|x_n-g(x_n)+m(x_n)+P_K(g(x_n)-\xi\Lambda(u_n-v_n)-m(x_n))\\&\qquad-[x^*-g(x^*)+m(x^*)+P_K(g(x^*)-\xi\Lambda(u^*-v^*)-m(x^*))]\|\\&\quad\leqslant2\|x_n-x^*-(g(x_n)-g(x^*))+m(x_n)-m(x^*)\|\\&\qquad+\|x_n-x^*-\xi\Lambda(u_n-u^*)\|+\xi\lambda\|x_n-x^*\|\\&\quad\leqslant\{2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}+(1-2\xi\beta+\xi^2\alpha^2)^{1/2}\\&\qquad+\xi\lambda\}\|x_n-x^*\|\\&\quad=\{k+t(\xi)+\xi\lambda\}\|x_n-x^*\|,\end{aligned}$$

其中 $k=2(1-2\delta+\sigma^2+\mu^2+2\gamma)^{1/2}$且$t(\xi)=(1-2\beta\xi+\alpha^2\xi^2)^{1/2}$. 从而，$\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\theta\|x_n-x^*\|$，其中，$\theta=k+t(\xi)+\xi\lambda$.

今证$\theta<1$. 为此，易见，$t(\xi)$在$\bar\xi=\beta/\alpha^2$处有最小值$t(\bar\xi)=(1-\beta^2/\alpha^2)^{1/2}$.

对$\xi=\bar\xi$，$k+t(\bar\xi)+\bar\xi\lambda<1$推得$k<1$且

$$\beta>\lambda(1-k)+\sqrt{(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)}.$$

所以，得到$\theta=k+t(\xi)+\xi\lambda<1$，其中$\xi$满足

$$\left|\xi-\frac{\beta+\lambda(k-1)}{\alpha^2-\lambda^2}\right|<\frac{\sqrt{(\beta+\lambda(k-1))^2-(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)}}{\alpha^2-\lambda^2},$$

$$\beta>\lambda(1-k)+\sqrt{(\alpha^2-\lambda^2)k(2-k)},\ \lambda(1-k)<\alpha,$$

且$k<1$.

由于$\theta<1$，我们得到，x_{n+1}在H中强收敛到x^*. 运用如同定理3.5的证明中的同样的论

证，可证$\{x_n\}$与$\{v_n\}$在H^*中分别强收敛到u^*与v^*。这样，就结束了证明。

注3.7 如果T和A都是单值映像、则定理3.7化归为Zeng[16]的定理3.2。

参考文献

[1] Boyd, D. W. and J. S. W. Wong, On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20(1969), 458—464.

[2] Browder, F. E., The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces, *Math. Ann.*, 177(1968), 283—301.

[3] Ding, X. P., Iterative methods of solutions for generalized variational inequalities and complementarity problems, *J. Sichuan Normal Univ.* 14(1991), 1—5.

[4] Fang, S. C. and E. L. Peterson, Generalized variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl.*, 38(1982), 363—383.

[5] Zeng Lu-chuan, Completely generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, (submitted for publication).

[6] Kinderlehrar, D. and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York(1980).

[7] Noor, M. A., Strongly nonlinear variational inequalities, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci.*, Canada 4(1982), 213—218.

[8] Noor, M. A., An iterative scheme for a class of quasivariational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 110(1985), 463—468.

[9] Noor, M. A., On the nonlinear complementarity problem, . *J. Math. Annl. Appl.*, 123(1987), 455—460.

[10] Noor, M. A., Quasivariational inequalities, *Appl. Math. Lett.* 1(1988), 367—370.

[11] Rockafellar, R. T., Lagrange multipliers and variational inequalities, *Variational Inequalities and Complementarity Problems, Theory and Applications* (Cottle et al., Eds.), New York, (1980), 303—322.

[12] Saigal, R., Extension of the generalized complementarity problem, *Math. Oper. Res.*, 1(1976), 260—266.

[13] Siddiqi, A. H. and Q. H. Ansari, An iterative method for generalized variational inequalities, *Math. Japan.*, 34(1989), 475—481.

[14] Siddiqi, A. H. and O. H. Ansari, Strongly nonlinear quasivariational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 149(1990), 444—450.

[15] Siddiqi, A. H. and O. H. Ansari, General strongly nonlinear variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 166(1992), 386—392.

[16] Zeng Lu-chuan, Iterative algorithms for finding approximate solutions for general strongly nonlinear variational inequalities, *J. Math. Appl.* (to appear).

[17] Ding, X. P., Generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 173(1993), 577—587.

Iterative Algorithms for Finding Approximate Solutions of Completely Generalized Strongly Nonlinear Quasivariational Inequalities

Zeng Lu-chuan

(Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai)

Abstract

In this paper, we study iterative algorithms for finding approximate solutions of completely generalized strongly nonlinear quasivariational inequalities which include, as a special case, some known results in this field. Our results are the extension and improvements of the results of Siddiqi and Ansari, Ding ang Zeng.

Key words qua ivariational inequality, iterative scheme, convergence of algo-rithm