Navier-Stokes方程组的一个一致有效渐近解*

秦圣立　张爱淑

（曲阜师范大学物理系，1993年11月24日收到）

摘　　要

本文利用多重尺度法[1,2]研究了大雷诺数情况下的平板绕流问题，得到了 Navier-Stokes 方程的一个一致有效渐近解。

关键词　Navier-Stokes方程　势流　流函数　边界层校正项　多重尺度法

一、Navier-Stokes 方程

我们考虑不可压缩流体绕过平板的定常层流流动，二维的 Navier-Stokes 方程组为[3]：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1.2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{1.3}$$

其中　P是压力；ρ是流体密度；$\nu=\mu/\rho$：ν是运动粘性系数，μ是绝对粘性系数；u，v 分别为流速的x，y方向的分量；x表示顺平板表面方向；y表示平板的法向方向；原点(0，0)取在平板的前缘。

我们引入无量纲变量

$$\tilde{u}=\frac{u}{U},\ \tilde{v}=\frac{v}{U},\ \tilde{x}=\frac{x}{L},\ \tilde{y}=\frac{y}{L},\ \tilde{p}=\frac{P}{\rho U^2}$$

其中　U是来流流速，L是平板的特征长度（即平板顺流长度）．将上述无量纲变量代入方程(1.1)～(1.3)，并略去字母上的符号“～”，且消去P我们得无量纲化方程：

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}$$

---

* 江福汝推荐。

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^3\psi}{\partial y\partial x^2}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$$

$$-\varepsilon^2\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}\right)=0 \tag{1.4}$$

其中 $\varepsilon^2=\frac{\nu}{LU}=\frac{1}{R_N}\ll 1$，$R_N$ 是雷诺数，ε 称为小参数；$u=\partial\psi/\partial y$，$v=-\partial\psi/\partial x$，$\psi$ 称为流函数。

根据物面条件和平板前缘附近的边界层性质[4]：G. F. Carrier和C.C.Lin(1948)求得了 Navier-Stokes 方程的适用于前缘局部区域的解：$\psi=A\xi\eta^2$，其中 A 为常数，$x+iy=(\xi+i\eta)^2$. 我们将 G. F. Carrier和C. C. Lin的Stokes 解作为端点条件求解有限平板的Navier-Stokes方程. 为此，我们将G. F.Carrier和C. C. Lin的解乘上一个因子$\exp[-(x^2+y^2)/\varepsilon^2]$以表示端点条件. 上述物面条件利用流函数$\psi$和端点条件（无量纲化边界条件）表为：

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{y=0}=0 \tag{1.6}$$

$$\psi=\frac{A}{2\sqrt{2}}y^2(\sqrt{x^2+y^2}+x)^{-1/2}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{\varepsilon^2}\right] \tag{1.7}$$

方程(1.4)和边界条件(1.5)～(1.7)就是我们所研究的边值问题.

二、Navier-Stokes 方程的解

当 $\varepsilon=0$ 时，方程(1.4)退化为无粘性势流方程，即欧拉(Eular)方程，欧拉方程的解是已知的，这是因为如果不考虑粘性，顺流放置的薄平板对均匀势流不会产生影响，但是欧拉方程的解，不可能满足所有的边界条件，为此，我们必须校正失去的边界条件. 我们考虑平板表面处的边界层校正项[5,6].

我们在平板表面处引入变量：

$$\xi=\frac{w(y)}{\varepsilon},\ \eta=y,\ x=x \tag{2.1}$$

其中 $w(y)$是当$y=0$时为零的正的待定函数. 将关于对y的偏导数换成对ξ，η的偏导数，则有，

$$\frac{\partial}{\partial y}=\varepsilon^{-1}\left(w_{,y}\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

…………………………………

$$\frac{\partial^4}{\partial y^4}=\varepsilon^{-4}\left(w_{,y}^4\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}+\varepsilon\left(6w_{,y}^2w_{,yy}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}+4w_{,y}^2\frac{\partial^4}{\partial\eta\partial\xi^3}\right)\right.$$

$$+\varepsilon^2\left(6w_{,y}^2\frac{\partial^4}{\partial\eta^2\partial\xi^2}+12w_{,y}w_{,yy}\frac{\partial^3}{\partial\eta\partial\xi^2}\right.$$

$$\left.+(3w_{,yy}+4w_{,y}w_{,yy})\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)$$

$$+\varepsilon^3\left(4w_{,y}\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\eta^3}+6w_{,yy}\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta^2}+4w_{,yyy}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+w_{,yyyy}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\varepsilon^4\frac{\partial^4}{\partial\eta^4}\Big) \tag{2.2}$$

为得到满足微分方程(1.4)和全部边界条件的N阶渐近解，我们构造如下形式的流 函 数的展开式：

$$\psi=\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n(x,\ y)+\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_n(\xi,\ \eta,\ x) \tag{2.3}$$

其中第一个求和表示流函数的外部解展开式，第二个求和表示边界层校正项展开式。

将微分算子(2.2)和流函数ψ的展开式(2.3)分别代入方程(1.4)和边界条件(1.5)和(1.6)式，而把ξ，η，x看作三个独立的自变量，并注意到外部解$\psi_n(x,\ y)$仅是x，y的函数以及边界层校正项$\varphi_n(\xi,\ \eta,\ x)$的性质[6]，我们得到：

$$\Big\{\Big[\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)\frac{\partial^3}{\partial x\partial y^2}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)\frac{\partial^3}{\partial x^3}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)\frac{\partial^3}{\partial y\partial x^2}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)\frac{\partial^3}{\partial y^3}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Big(\sum_{n=0}^{\psi}\varepsilon^n\psi_n\Big)+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)$$

$$+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)\Big]\Big\}$$

$$+\Big\{\Big[\varepsilon^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^i\delta_i\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)\Big]\Big[\varepsilon^{-2}\Big(\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i\beta_i\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_n\Big)\Big]$$

$$+\Big[\varepsilon^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^i\delta_i\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_n\Big)\Big]\Big[\varepsilon^{-2}\Big(\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^i\beta_i\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)\Big]$$

$$-\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)\Big]\Big[\varepsilon^{-3}\Big(\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^i\gamma_i\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_n\Big)\Big]$$

$$-\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_n\Big)\Big]\Big[\varepsilon^{-3}\Big(\sum_{i=0}^{3}\varepsilon^i\gamma_i\Big)\Big(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\Big)\Big]$$

$$+\left[\varepsilon^{-1}\left(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^{i}\delta_{i}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n}\psi_{n}\right)\right]\left[\frac{\partial^{3}}{\partial x^{3}}\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_{n}\right)\right]$$

$$+\left[\varepsilon^{-1}\left(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^{i}\delta_{i}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_{n}\right)\right]\left[\frac{\partial^{3}}{\partial x^{3}}\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n}\psi_{n}\right)\right]$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n}\psi_{n}\right)\right]\left[\varepsilon^{-1}\left(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^{i}\kappa_{i}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_{n}\right)\right]$$

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_{n}\right)\right]\left[\varepsilon^{-1}\left(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^{i}\kappa_{i}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n}\psi_{n}\right)\right]$$

$$-\varepsilon^{2}\left[\varepsilon^{-4}\left(\sum_{i=0}^{4}\varepsilon^{i}\lambda_{i}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_{n}\right)\right.$$

$$+2\varepsilon^{-2}\left(\sum_{i=0}^{2}\varepsilon^{i}\rho_{i}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_{n}\right)$$

$$\left.+\frac{\partial^{4}}{\partial x^{4}}\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_{n}\right)\right]\Bigg\}=0 \tag{2.4}$$

边界条件(1.5)和(1.6)式写为：

$$\left[\varepsilon^{-1}\left(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^{i}\delta_{i}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n}\psi_{n}\right)\right.$$

$$\left.+\varepsilon^{-1}\left(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^{i}\delta_{i}\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_{n}\right)\right]\Bigg|_{y=0}=0 \tag{2.5}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n}\psi_{n}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_{n}\right)\right]\Bigg|_{y=0}=0 \tag{2.6}$$

其中，

$$\delta_{0}=w_{,y}\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \delta_{1}=\frac{\partial}{\partial\eta};\ \beta_{0}=w_{,y}^{2}\frac{\partial^{3}}{\partial x\partial\xi^{2}},$$

$$\beta_{1}=3w_{,y}\frac{\partial^{3}}{\partial x\partial\xi\partial\eta}+w_{,yy}\frac{\partial^{2}}{\partial x\partial\xi},\ \beta_{2}=\frac{\partial^{3}}{\partial x\partial\eta^{2}};$$

$$\gamma_{0}=w_{,y}^{3}\frac{\partial^{3}}{\partial\xi^{3}},\quad \gamma_{1}=3w_{,y}w_{,yy}\frac{\partial^{2}}{\partial\xi^{2}}+3w_{,y}^{2}\frac{\partial^{3}}{\partial\eta\partial\xi^{2}},$$

$$\gamma_{2}=3w_{,y}\frac{\partial^{3}}{\partial\xi\partial\eta^{2}}+3w_{,yy}\frac{\partial^{2}}{\partial\xi\partial\eta}+w_{,yyy}\frac{\partial}{\partial\xi},\quad \gamma_{3}=\frac{\partial^{3}}{\partial\eta^{3}};$$

$$\kappa_{0}=w_{,y}\frac{\partial^{3}}{\partial\xi\partial x^{2}},\quad \kappa_{1}=\frac{\partial^{3}}{\partial\eta\partial x^{2}};\quad \lambda_{0}=w_{,y}^{4}\frac{\partial^{4}}{\partial\xi^{4}},$$

$$\lambda_{1}=6w_{,y}^{2}w_{,yy}\frac{\partial^{3}}{\partial\xi^{3}}+4w_{,y}^{3}\frac{\partial^{4}}{\partial\eta\partial\xi^{3}},$$

$$\lambda_2=6w_{,y}^2\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+12w_{,y}w_{,yy}\frac{\partial^3}{\partial\eta\partial\xi^2}+(3w_{,y}+4w_{,y}w_{,yy})\frac{\partial^2}{\partial\xi^2},$$

$$\lambda_3=4w_{,y}\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\eta^3}+6w_{,yy}\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta^2}+4w_{,yyy}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}+w_{,yyyy}\frac{\partial}{\partial\xi},$$

$$\lambda_4=\frac{\partial^4}{\partial\eta^4};\quad \rho_0=w_{,y}^2\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2},$$

$$\rho_1=2w_{,y}\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial x\partial\eta^2}+w_{,yy}\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial x^2},\quad \rho_2=\frac{\partial^4}{\partial\eta^2\partial x^2}.$$

其中 $w_{,y}$，$w_{,yy}$，$w_{,yyy}$，$w_{,yyyy}$分别是$w(y)$对y的一阶，二阶，三阶，四阶导数。

由(2.4)～(2.6)式，合并ε的同次幂的系数，使方程(2.4)的第一个大括号中的ε^n的系数等于零，可得流函数外部解ψ_n的递推方程；使方程(2.4)的第二个大括号中的ε^n的系数等于零，则得边界层校正项φ_n的递推方程．由边界条件(2.5)和(2.6)式，分别使它们两端的ε同次幂项的系数相等，则得关于ψ_n和φ_n的递推边界条件．我们规定所有具有负下标的字母均取为零。

首先我们令方程(2.4)第一个大括号中ε^0的系数等于零，则得：

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_0}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_0}{\partial x^3}-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial^3\psi_0}{\partial y\partial x^2}-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial^3\psi_0}{\partial y^3}=0 \tag{2.7}$$

由(2.6)式，使ε^0的系数等于零，则得：

$$\left.\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right|_{y=0}=0 \tag{2.8}$$

由于方程(2.7)是无粘性势流方程，即Eular方程，其解为：

$$\psi_0=y \tag{2.9}$$

它显然满足边界条件(2.8)式。

得到ψ_0后，再由方程(2.4)的第一个大括号中的ε^1的系数等于零，得关于ψ_1的微分方程：

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)=0 \tag{2.10}$$

由边界条件(2.6)，使ε^1的系数等于零，则得：

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{y=0}=0 \tag{2.11}$$

再由平板绕流前缘处的性质（端点条件）（参见(2.38)式）可推知，

$$\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \tag{2.12}$$

方程(2.10)是关于$\partial\psi_1/\partial x$的拉普拉斯(Laplace)方程，且具有两个第一类齐次边界条件，它有唯一的零解：

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x}=0 \tag{2.13}$$

方程(2.13)是一阶线性齐次偏微分方程，其解为：

$$\psi_1=g(y) \tag{2.14}$$

其中$g(y)$是y的待定函数，由以下条件决定：当$y=0$时，$g(y)=0$；当$y\to\infty$时，$g(y)=0$。则有$g(y)\equiv 0$，从而得，

$$\psi_1\equiv 0 \tag{2.15}$$

得到ψ_0，ψ_1之后，以下求解边界层校正项φ_0。由方程(2.4)的第二个大括号，使其中ε^0的系数等于零（注意到$\psi_0=y$，$\psi_1=0$），并把微分算子δ_1，β_0，λ_0代入其中，则得：

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial\eta}w,{}_y^2\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x\partial\xi^2}-w,{}_y^4\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial\xi^2}=0 \tag{2.16}$$

我们令

$$w,{}_y^4=w,{}_y^2 \tag{2.17}$$

则有

$$w(y)=y \tag{2.18}$$

由上述条件，方程(2.16)变为：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\right)\right]=0 \tag{2.19}$$

关于方程(2.19)的边界条件，因为φ_0是边界层校正项，首先用φ_0校正边界条件(2.5)，为此，先考虑ε^1的项为：

$$\varepsilon^1[\varepsilon^{-1}\delta_1\psi_0+\delta_0\varphi_0]$$

令(2.5)式的ε^1的系数等于零，得φ_0的一个边界条件：

$$[\varepsilon^{-1}\delta_1\psi_0+\delta_0\varphi_0]\Big|_{\substack{y=0\\ \xi=0}}=0 \tag{2.20}$$

关于φ_0的另一个边界条件，由平板绕流问题平板前缘附近的性质（端点条件）(1.7)式给出：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big|_{x=0}&=\left[\varepsilon^{-1}\left(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^i\delta_i\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\right)\right.\\&\left.\quad+\varepsilon^{-1}\left(\sum_{i=0}^{1}\varepsilon^i\delta_i\right)\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_n\right)\right]\Big|_{x=0}\\&=\varepsilon\frac{A'}{4\sqrt{2}}(3\xi^{1/2}-4\xi^{5/2})\exp[-\xi^2]\end{aligned} \tag{2.21}$$

由(2.21)式左端具有ε^1的项为：

$$\varepsilon^1[\varepsilon^{-1}\delta_1\psi_0+\delta_0\varphi_0]$$

由(2.21)式，使两端ε^1的系数相等，得：

$$[\varepsilon^{-1}\delta_1\psi_0+\delta_0\varphi_0]\Big|_{x=0}=\frac{A'}{4\sqrt{2}}(3\xi^{1/2}-4\xi^{5/2})\exp[-\xi^2] \tag{2.22}$$

把微分算子δ_0，δ_1分别代入(2.20)和(2.22)式，则得：

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\Big|_{\substack{y=0\\ \xi=0}}=-1/\varepsilon \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\Big|_{x=0}=\frac{A'}{4\sqrt{2}}(3\xi^{1/2}-4\xi^{5/2})\exp[-\xi^2]-\frac{1}{\varepsilon} \tag{2.24}$$

其中　$A'=A/\varepsilon^{1/2}$，$A=0.083/\varepsilon^3$。我们为了得到φ_0的边界层型函数，因为方程(2.19)方括号中的量仅是x，y的函数$E(x,y)$，我们令它等于零，则得，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\right)-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}\right)=0 \tag{2.25}$$

方程(2.25)具有两个非齐次边界条件(2.23)和(2.24)，首先把(2.23)化为齐次边界条件，为此，我们令，

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}=H-1/\varepsilon \tag{2.26}$$

将(2.26)分别代入(2.23)～(2.25)我们得：

$$\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial^2 H}{\partial\xi^2}=0 \tag{2.27}$$

$$H\Big|_{\substack{x=0\\ \xi=0}}=0 \tag{2.28}$$

$$H\Big|_{x=0}=\frac{A'}{4\sqrt{2}}(3\xi^{1/2}-4\xi^{5/2})\exp[-\xi^2] \tag{2.29}$$

我们利用分离变量法解边值问题(2.27)～(2.29)，我们得：

$$H=\frac{iA'}{8\sqrt{2\pi x}}\int_{-\infty}^{0}(3t^{1/2}-4t^{5/2})\exp\left[-t^2-\frac{(\xi-t)^2}{4x}\right]dt$$
$$+\frac{A'}{8\sqrt{2\pi x}}\int_0^{\infty}(3t^{1/2}-4t^{5/2})\exp\left[-t^2-\frac{(\xi-t)^2}{4x}\right]dt \tag{2.30}$$

其中$i=\sqrt{-1}$，上式已经作了奇延拓，我们引入如下的新变量：在第一个积分中令$(\xi-t)/2\sqrt{x}=q$，$dq=-dt/2\sqrt{x}$；在第二个积分中令$(t-\xi)/2\sqrt{x}=q, dq=dt/2\sqrt{x}$，则(2.30)变为：

$$H=\frac{-iA'}{4\sqrt{2\pi}}\int^{\xi/2\sqrt{x}}[3(\xi-2\sqrt{x}q)^{1/2}$$
$$-4(\xi-2\sqrt{x}q)^{5/2}]\exp[-(\xi-2\sqrt{x}q)^2-q^2]\,dq$$
$$+\frac{A'}{8\sqrt{2\pi}}\int_{-\xi/2\sqrt{x}}^{\infty}[3(\xi+2\sqrt{x}q)^{1/2}$$
$$-4(\xi+2\sqrt{x}q)^{5/2}]\exp[-(\xi+2\sqrt{x}q)^2-q^2]\,dq \tag{2.31}$$

把(2.31)代入(2.26)，则得：

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi}=H-1/\varepsilon \tag{2.32}$$

(2.32)式是一阶线性偏微分方程，其解可写为：

$$\varphi_0=\int Hd\xi-\xi/\varepsilon+F(x,\ y) \tag{2.33}$$

其中 $F(x,y)$是x，y的待定函数．由下述条件决定：当$x=0$时，$F(x,\ y)=0$；当$x\to\infty$时，$F(x,\ y)=y/\varepsilon^2$；当$y=0$时，$F(x,\ y)=0$，当$y\to\infty$时，$F(x,\ y)=y/\varepsilon^2$．故$F(x,\ y)$应取如下形式的表达式：

$$F(x,\ y)=\varepsilon^{-2}y\exp\left(-\frac{\varepsilon^3}{x^2y^2}\right) \tag{2.34}$$

把(2.21)和(2.34)代入(2.33)式，则得：

$$\varphi_0=\varepsilon^{-2}y\exp\left[-\frac{\varepsilon^3}{x^2y^2}\right]-\varepsilon^{-1}\xi$$

$$-\int\Big\{\frac{iA'}{4\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\xi/2\sqrt{x}}[3(\xi-2\sqrt{x}q)^{1/2}$$
$$-4(\xi-2\sqrt{x}q)^{5/2}\exp[-(\xi-2\sqrt{x}q)^2-q^2]dq$$
$$+\frac{A'}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\xi/2\sqrt{x}}^{\infty}[3(\xi+2\sqrt{x}q)^{1/2}$$
$$-4(\xi+2\sqrt{x}q)^{5/2}]\exp[-(\xi+2\sqrt{x}q)^2-q^2]dq\Big\}d\xi \qquad (2.35)$$

以上我们求出了ψ_0，ψ_1和φ_0，以下我们求解ψ_2。由方程(2.4)的第一个大括号，令其中ε^2的系数等于零，则得：

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_2}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_2}{\partial x^3}=0 \qquad (2.36)$$

由(2.6)式，令ε^2的系数等于零，得：

$$\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right]\Big|_{\substack{y=0\\ \xi=0}}=0 \qquad (2.37)$$

由(1.7)式对x求一次偏导数，并使$x=0$代入其中，则得：

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x=0}=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^n\psi_n\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+2}\varphi_n\right)\right]\Big|_{x=0}$$
$$=-\varepsilon^2\frac{A''}{4\sqrt{2}}y^{1/2}\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right]\qquad(y>0) \qquad (2.38)$$

其中 $A''=A/\varepsilon^2$。并令(2.38)式两端ε^2的系数相等，得：

$$\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right]\Big|_{x=0}=-\frac{A''}{4\sqrt{2}}y^{1/2}\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right]\qquad(y>0) \qquad (2.39)$$

由(2.35)式对x求一次偏导数，把$y=0$代入其中，并计算，得：

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\Big|_{y=0}=0 \qquad (2.40)$$

再把$x=0$代入其中，并计算，则得：

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\Big|_{x=0}=-\frac{iA^*}{4\sqrt{2}}\Big\{3y^{-1/2}+148\varepsilon^2y^{3/2}$$
$$+16\varepsilon^4y^{7/2}]\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right]-162\varepsilon^2Q(y)\Big\}$$
$$+\frac{A^*}{4\sqrt{2}}\Big\{[3y^{-1/2}+148\varepsilon^2y^{3/2}+16\varepsilon^4y^{7/2}]\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right]$$
$$-162\varepsilon^2Q(y)\Big\} \qquad (2.41)$$

取其中的实部，当$y<0$时，取带i的项，当$y>0$时，取不带i的项。其中 $A^*=A/\varepsilon$，$Q(y)=\int_0^y y^{1/2}\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right]dy$ 是y的函数。

我们令，

$$R=\frac{\partial\psi_2}{\partial x} \qquad (2.42)$$

把(2.42)，(2.41)和(2.40)式分别代入(2.36)，(2.37)和(2.39)式，并注意到 $\partial\psi_0/\partial y=1$，则得：

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}=0 \tag{2.43}$$

$$R\Big|_{\substack{y=0\\ \xi=0}}=0 \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned}R\Big|_{x=0}=&-\frac{A''}{4\sqrt{2}}y^{1/2}\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right]\\&+\frac{iA^*}{4\sqrt{2}}\Big\{(3y^{-1/2}+148\varepsilon^2y^{3/2}\\&+16\varepsilon^4y^{7/2})\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right]-162\varepsilon^2Q(y)\Big\}\\&-\frac{A^*}{4\sqrt{2}}\Big\{3y^{-1/2}+148\varepsilon^2y^{3/2}\\&+16\varepsilon^4y^{7/2})\exp\left[-\frac{y^2}{\varepsilon^2}\right]\\&-162\varepsilon^2Q(y)\Big\}\end{aligned} \tag{2.45}$$

我们利用分离变量法解边值问题(2.43)～(2.45)，我们只考虑$y>0$的情况，并令，

$$R=XY \tag{2.46}$$

我们得到它的解为（取其中的实部）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=\mathrm{Re}R=&-\frac{A^*}{4\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty\Big\{\int_0^\infty\Big\{\Big[3t^{-1/2}+\varepsilon^{-1}t^{1/2}\\&+148\varepsilon^2t^{3/2}+16\varepsilon^4t^{7/2})\exp\left[-\frac{t^2}{\varepsilon^2}\right]\\&-162\varepsilon^2Q(t)\Big]\cos(\omega(t-y))\\&-\Big[(3t^{-1/2}+148\varepsilon^2t^{3/2}+16\varepsilon^4t^{7/2})\exp\left[-\frac{t^2}{\varepsilon^2}\right]\\&+162\varepsilon^2Q(t)\Big]\cos(\omega(t+y))\Big\}\exp[-\omega x]dt\Big\}d\omega\\&(y>0,\ 1>x>0)\end{aligned} \tag{2.47}$$

其中　$\omega>0$，因为方程(2.47)是关于ψ_2的一阶线性偏微分方程，它的解为：

$$\begin{aligned}\psi_2=&-\frac{A^*}{4\pi\sqrt{2}}\int\Big\{\int_0^\infty\Big\{\int_0^\infty\Big\{\Big[(3t^{-1/2}+\varepsilon^{-1}t^{1/2}\\&+148\varepsilon^2t^{3/2}+16\varepsilon^4t^{7/2})\exp\left[-\frac{t^2}{\varepsilon^2}\right]\\&-162\varepsilon^2Q(t)\Big]\cos(\omega(t-y))\\&-\Big[(3t^{-1/2}+148\varepsilon^2t^{3/2}+16\varepsilon^4t^{7/2})\exp\left[-\frac{t^2}{\varepsilon^2}\right]\\&+162\varepsilon^2Q(t)\Big]\cos(\omega(t+y))\Big\}\exp[-\omega x]dt\Big\}d\omega\Big\}dx\end{aligned}$$

$$+B(y) \qquad (y>0,\ 1>x>0) \tag{2.48}$$

其中 $B(y)$是y的待定函数，因为ψ_2是外部解中的项，所以$B(y)$可由下述条件决定：当$y\to\infty$时，$B(y)=0$；当$y=0$时，$B(y)=0$。故我们取$B(y)=0$，即

$$B(y)\equiv 0 \tag{2.49}$$

我们求得ψ_0，ψ_1，ψ_2和φ_0后，类似的按上述步骤可逐次确定ψ_n和$\varphi_n(n=1,\ 2,\ 3,\cdots,N)$。由方程(2.4)的第一个大括号，令$\varepsilon^n$的系数等零，则得，

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\left(\frac{\partial^3\psi_n}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3\psi_n}{\partial x^3}\right)=-\sum_{\substack{i=3\\(j=n-i)}}^{n-2}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_j}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial^3\psi_j}{\partial x^3}\right)+\sum_{\substack{i=2\\(j=n-i)}}^{n-2}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial^3\psi_i}{\partial y^3}+\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial^3\psi_i}{\partial y\partial x^2}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^4\psi_{n-2}}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4\psi_{n-2}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi_{n-2}}{\partial x^4}\right) \qquad (n>2) \tag{2.50}$$

由(2.6)式，使ε^n的系数等于零，则得：

$$\left[\frac{\partial\psi_n}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x}\right]\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \xi=0}}=0 \tag{2.51}$$

由(2.38)式，使ε^n的系数等于零，则得：

$$\left[\frac{\partial\psi_n}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=0}=0 \tag{2.52}$$

由方程(2.4)的第二个大括号，使ε^n的系数等于零，得

$$\delta_1\psi_0\beta_0\varphi_n-\lambda_0\varphi_n$$

$$=-\sum_{\substack{i=2\\(j=n-i)}}^{n}\delta_1\psi_i\left(\sum_{m=0}^{2}\beta_m\varphi_{j-m}\right)-\sum_{\substack{i=2\\(j=n-i)}}^{n}\beta_2\psi_i\left(\sum_{m=0}^{1}\delta_m\varphi_{j-m-1}\right)+\sum_{\substack{i=2\\(j=n-i)}}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\left(\sum_{m=0}^{3}\gamma_m\varphi_{j-m+1}\right)$$

$$+\sum_{\substack{i=2\\(j=n-i)}}^{n}\gamma_3\psi_i\frac{\partial\varphi_{j-2}}{\partial x}-\sum_{\substack{i=0\\(j=n-i)}}^{n}\delta_1\psi_i\frac{\partial^3\varphi_{j-2}}{\partial x^3}-\sum_{\substack{i=2\\(j=n-i)}}^{n}\frac{\partial^3\psi_i}{\partial x^3}\left(\sum_{m=0}^{1}\delta_m\varphi_{j-m-1}\right)$$

$$+\sum_{\substack{i=2\\ j=n-i}}^{n}\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\left(\sum_{m=0}^{1}\kappa_m\varphi_{j-m-1}\right)$$

$$+\sum_{\substack{i=2\\ j=n-i}}^{n}\kappa_1\psi_i\frac{\partial\varphi_{j-2}}{\partial x}+\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\varphi_{n-i}$$

$$+2\sum_{i=0}^{n}\rho_i\varphi_{n-i-2}+\frac{\partial^4\varphi_{n-4}}{\partial x^4} \tag{2.53}$$

由(2.5)式，使ε^n的系数等于零，则得：

$$[\delta_1\psi_n+\delta_0\varphi_{n-1}+\delta_1\varphi_{n-2}]\Big|_{\substack{y=0\\ \xi=0}}=0 \tag{2.54}$$

由(2.21)式，使ε^n的系数等于零，则得：

$$[\delta_1\psi_n+\delta_0\varphi_{n-1}+\delta_1\varphi_{n-2}]|_{x=0}=0 \tag{2.55}$$

其中 带负下标的量均取为零。

我们把求得的ψ_n，$\varphi_n(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N)$代入(2.3)式，我们就得到流函数$\psi$的$N$阶渐近解。我们限于求到二阶的渐近解。我们把(2.9)，(2.15)，(2.48)和(2.35)式的$y>$的实部代入(2.3)式，则得：

$$\begin{aligned}
\psi&=\psi_0+\varepsilon\psi_1+\varepsilon^2\psi_2+\varepsilon^2\varphi_0\\
&=y\exp\left(-\frac{\varepsilon^3}{x^2y^2}\right)\\
&\quad-\frac{A}{4\pi\sqrt{2}}\int\left\{\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty\left\{\left[(t^{1/2}+3\varepsilon t^{-1/2}\right.\right.\right.\right.\\
&\quad+148\varepsilon^3t^{3/2}+16\varepsilon^5t^{7/2})\exp\left[-\frac{t^2}{2}\right]\\
&\quad\left.-162\varepsilon^3Q(t)\right]\cos(\omega(t-y))\\
&\quad-\left[(3\varepsilon t^{-1/2}+148\varepsilon^3t^{3/2}\right.\\
&\quad+16\varepsilon^5t^{7/2})\exp\left[-\frac{t^2}{\varepsilon^2}\right]\\
&\quad\left.\left.\left.\left.+162\varepsilon^3Q(t)\right]\cos(\omega(t+y))\right\}\exp[-\omega x]dt\right\}d\omega\right\}dx\\
&\quad+\varepsilon^{3/2}\frac{A}{4\sqrt{2\pi}}\int\left\{\int_{-\xi/2\sqrt{x}}^{\infty}[3(\xi+2\sqrt{x}q)^{1/2}\right.\\
&\quad\left.-4(\xi+2\sqrt{x}q)^{5/2}]\exp[-(\xi+2\sqrt{x}q)^2-q^2]dq\right\}d\xi\\
&\quad+O(\varepsilon^2)\qquad(y>0,\ 1>x>0)
\end{aligned} \tag{2.56}$$

按以上步骤，我们可求得$y<0$，$1>x>0$时的流函数的二阶渐近解，这两个解是镜面对称的。

三、评　　论

由(2.56)式右端第二项的积分中可以看出：流体微团轨道具有连续频谱的成份。其振动幅度随x的增加而减小；而且它随参数t的增加而减小的更快。

由(2.56)式右端第三项的积分可以看出：流体边界层厚度比较小，因为其中包含e^{-q^2}的因子。它与(2.56)式的右端第一项结合起来看，流体微团在y方向离开平板表面，它就很快变为势流。

流函数ψ对y求一次偏导数，即得，

$$u=\partial\psi/\partial y \tag{3.1}$$

我们令$u=0.99$代入(3.1)式，固定x值来计算y值可求出边界层厚度。

我们利用以下公式[7]

$$D=b\int_{x=0}^{L}\tau_0 dx \tag{3.2}$$

其中b是平板宽度，

$$\tau_0(x)=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} \tag{3.3}$$

D就是平板一面的阻力。由(3.2)式，可算出平板表面阻力。并且按下述公式[7]可计算出无量纲阻力系数C_f：

$$C_f=\frac{2D}{\frac{1}{2}\rho AU^2} \tag{3.4}$$

其中$A=2bL$表示湿面面积。

若把(2.56)式的积分项在平板表面附近展为x，y的幂级数，并积分，然后与文献[8]比较，形式是类似的。

从以上讨论，我们可以看出我们所得到的Navier-Stokes方程组的一致有效渐近解包括更为丰富的内容，即能直接看出它的边界层性质，而且具有多层结构，还能看出它具有连续的结构性质。这些性质从简化的Navier-Stokes方程的解中是无法直接看出的。本文推进了前人的工作。

参　考　文　献

[1] Jiang Fu-ru, On the asymptotic solutions for a class of nonlinear reduced wave equations, Scientia Sinica, (Series A), 7(1983), 239-250.

[2] 江福汝，关于环形和圆形薄板在各种支承条件下的非对称弯曲问题，应用数学和力学，3(5)(1982)，684—695.

[3] Fung, Y. C., *A First Course in Continuum Mechanics*, Printice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey(1977).

[4] Carrier, G. F. and Lin, C. C., On the nature of the boundary layer near the leadingedge of a flat plate, *Quart. Appl. Math.*, VI, (1948), 63-68.

[5] 秦圣立、张爱淑，关于具有初始挠度的圆形薄板的跳跃问题，应用数学和力学，8(5)(1987)，447—458.

[6] 秦圣立、张爱淑，关于环形薄板的屈曲问题，应用数学和力学，6(8)(1985)，169—183.
[7] Hermann Schlichting, *Boundary-layer Theory*, 7th ed., McGraw-Hill Book Company, New York(1979).
[8] 田纪伟、高智，简化Navier-Stokes(SNS)方程在二维层流边界层分离点邻域的特性，中国科学，A辑，3(1992)，282—292.

A Unifomly Valid Asymptotic Solution of the Navier-Stokes Equations

Qin Sheng-li Zhang Ai-shu

(*Dep. of Physics, Qufu Teachers University, Qufu, Shandong*)

Abstract

In this paper, problems of the flow over a flat plate in the large Reynolds number case are studied by using the method of multiple scales[1,2]. We have obtained N-order uniformly valid asymptotic solutions of the Navier-Stokes equations.

Key words Navier-Stokes equations, the potential flow, the stream function, the boundary correction, the method of multiple scales