应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

各向异性增长拟线性椭圆型方程广义解最大模的先验估计

梁鎏廷 王向东

（中山大学数学系） （郑州轻工业学院）

（张石生推荐，1993年12月3日收到）

摘 要

本文我们第一次给出了几类各向异性增长拟线性椭圆型方程广义解的最大模的先验估计。

关键词 拟线性椭圆方程 非标准增长条件 各向异性Sobolev空间 广义解 最大模的先验估计

一、引 言

近十年来人们对非标准增长拟线性椭圆型方程和泛函的关注逐渐增加，但遗憾的是对标准增长情形得到的结果并不能完全推广到非标准增长情形。在陆文端[1,2]、陈祖墀[3]有各向异性增长拟线性椭圆型方程解的一些存在性结果；陆文端[4]、王向东-梁鎏廷[5]证明了各向异性拟线性椭圆型方程解的整体有界性；又在王向东-梁鎏廷[6]中证明了解的局部有界性；此外，Fusco-Sbordone[7]、梁鎏廷[8]则证明了各向异性增长泛函极小的局部有界性。本文中我们将给出各向异性增长拟线性椭圆型方程广义解最大模的先验估计。

二、主 要 结 果

设E^n为n维欧氏空间，G为E^n中的有界区域，$p_i>1(i=1,2,\cdots,n)$，$W^1_{(p_i)}(G)$表各向异性Соболев空间，其范数为

$$\|u\|_{W^1_{(p_i)}(G)}=\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{L^{p_i}(G)}+\|u\|_{L^1(G)}.$$

$\overset{\circ}{W}{}^1_{(p_i)}(G)$为在$G$有紧支集的$C^1$类函数在$W^1_{(p_i)}(G)$中的闭。

在G上考虑如下拟线性椭圆型方程：

$$\operatorname{div}\mathbf{A}(x,u,\nabla u)=B(x,u,\nabla u)\quad(\text{在}G\text{内})\tag{2.1}$$

其中 $\mathbf{A}(x,u,\xi)=\{A_i(x,u,\xi),\ i=1,2,\cdots,n\}$和$B(x,u,\xi)$在$G\times E^1\times E^n$上定义，对固定的$x$关于$u$，$\xi$连续，对固定的$u$，$\xi$关于$x$可测且满足下面的结构条件：

$$\left.\begin{aligned}&\xi\cdot\mathbf{A}(x,u,\xi)\geqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^{p_i}\\&|A_i(x,u,\xi)|\leqslant\kappa|\xi_i|^{p_i-1}\qquad(i=1,2,\cdots,n)\\&B(x,u,\xi)=\tilde{B}(x,u,\xi)+\lambda|u|^{q-2}u\\&|\tilde{B}(x,u,\xi)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}c_i(x)|\xi_i|^{\gamma_i}+f(x)\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

其中 $\kappa\geqslant1$，$\lambda\geqslant0$，当$1<p<n$时，$p\leqslant q\leqslant p^*$；当$p\geqslant n$时，$p\leqslant q<+\infty$，$\frac{1}{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$，

$\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$，$1-\frac{1}{p}\leqslant\frac{\gamma_i}{p_i}\leqslant1$都是常数，$c_i(x)$和$f(x)$都是非负函数，分别满足

$$f(x)\in L_s(G),\quad c_i(x)\in L_{r_i}(G)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2.3}$$

其中r_i满足：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r_i}+\frac{1}{p^*}+\frac{\gamma_i}{p}=1\qquad\left(\text{当}1<p<n\text{且}\ 1-\frac{1}{p}\leqslant\frac{\gamma_i}{p_i}<1-\frac{1}{p^*}\right)\\&r_i=+\infty\qquad\left(\text{当}1<p<n\text{且}\ \gamma_i=p_i\left(1-\frac{1}{p^*}\right)\right)\\&\frac{1}{r_i}<\left(1-\frac{\gamma_i}{p_i}\right)\frac{p}{n}\qquad\left(\text{当}1<p<n\text{且}\ 1-\frac{1}{p^*}<\frac{\gamma_i}{p_i}<1\right)\\&\frac{1}{r_i}<1-\frac{\gamma_i}{p_i}\qquad\left(\text{当}p\geqslant n\text{且}\ 1-\frac{1}{p}\leqslant\frac{\gamma_i}{p_i}<1\right)\\&r_i=+\infty\qquad(\text{当}p>1\text{且}\gamma_i=p_i)。\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

和通常一样，称u为(2.1)的广义解，如果$u\in W^1_{(p_i)}(G)$并且满足

$$\int_G\{\nabla v\cdot\mathbf{A}(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\}dx=0\qquad(\forall v\in\mathring{W}^1_{(p_i)}(G)\cap L_\infty(G))\tag{2.1$'$}$$

定理1 设在(2.2)、(2.3)中$1<p<2$，$p^*\geqslant\max\limits_i\{p_i\}$，$\lambda>0$，$q=p$，$s=\infty$且

$$r_i=n,\quad\gamma_i=p_i\left(1-\frac{1}{p}\right)\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{2.5}$$

设$u\in W^1_{(p_i)}(G)$是方程(2.1)的广义解，并存在常数$M>0$，使

$$(u-M)^+=\max(u-M,\ 0)\in\mathring{W}^1_{(p_i)}(G)\tag{2.6}$$

那么存在常数$\theta>0$仅依赖于n,p_i,κ,λ，$\|c_i(x)\|_{L_n(G)}$和$|G|$，使

$$\operatorname*{ess\,sup}_G u^+\leqslant\max\left\{M,\ \left(\frac{1}{\lambda(1+\theta)}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right\}.\tag{2.7}$$

定理2 设(2.2)、(2.3)和(2.4)满足而且

$1<p<2$，$p^*\geqslant\max\limits_i\{p_i\}$，$\lambda>0$，$p\leqslant q\leqslant p^*$，$s=\infty$，

$$1-\frac{1}{p}\leqslant\frac{\gamma_i}{p_i}\leqslant1\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

设 $t=\max\{t_i\}$，t_i为满足下面条件的常数：

$$\left.\begin{array}{l} t_i=p^* \quad \left(\text{当}1-\frac{1}{p}\leqslant\frac{\gamma_i}{p_i}\leqslant 1-\frac{1}{p^*}\right) \\ \frac{1}{r_i}+\left(1-\frac{\gamma_i}{p_i}\right)\frac{p}{p^*}+\left(\frac{\gamma_i}{p_i}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\right)\frac{p}{t_i}+\frac{\gamma_i}{p_i}=1 \\ \qquad\qquad \left(\text{当}1-\frac{1}{p^*}<\frac{\gamma_i}{p_i}<1\right) \\ t_i=\infty, \quad (\text{当}\gamma_i=p_i). \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

设　$u\in W^1_{(p_i)}(G)\cap L_t(G)$是(2.1)的广义解，那么在(2.6)成立的情况下，有

(i)　$\operatorname{ess\,sup}_G u^+\leqslant M$或者

(ii)　$\operatorname{ess\,sup}_G u^+\leqslant\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{q-1}}$.

定理3　设(2.2)、(2.3)、(2.4)和(2.8)满足，又设

$1<p<n$，$p^*\geqslant\max_i\{p_i\}$，$\lambda>0$，$p\leqslant q\leqslant p^*$，$s=\infty$，

$$1-\frac{1}{p}\leqslant\frac{\gamma_i}{p_i}\leqslant 1 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

设　$u\in W^1_{(p_i)}(G)\cap L_t(G)$是(2.1)的广义解，其中$t=\max_i\{t_i\}$，那么，倘若(2.6)满足，则

$$\operatorname{ess\,sup}_G u^+\leqslant\max\left\{M,\ \left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{q-1}}\right\} \tag{2.9}$$

定理4　设(2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.5)和(2.8)满足，且

$$1<p<n,\ p^*\geqslant\max_i\{p_i\},\ \lambda\geqslant 0,\ q=p,\ s>\frac{n}{p}.$$

设　$u\in W^1_{(p_i)}(G)$满足(2.6)且是(2.1)的广义解，那么存在仅依赖于n，p_i，κ、$\|c_i(x)\|_{L_{n}(G)}$和G的常数$c>0$，使

$$\operatorname{ess\,sup}_G u^+\leqslant M+c\|f\|^{1/(p-1)}_{L_s(G)} \tag{2.10}$$

定理5　设(2.2)、(2.3)和(2.4)满足而且$p\geqslant n$，$\lambda>0$，$p\leqslant q<\infty$，$s=\infty$，

$1-\frac{1}{r}\leqslant\frac{\gamma_i}{p_i}\leqslant 1\ (i=1,2,\cdots,n)$

并设

当　$\max\left\{\frac{\gamma_i}{p_i}\right\}<1$时，$u\in W^1_{(p_i)}(G)$，

当　$\max\left\{\frac{\gamma_i}{p_i}\right\}=1$时，$u\in W^1_{(r_i)}(G)\cap L_\infty(G)$

且u是(2.1)的广义解，那么，倘若(2.6)满足，则有

$$\operatorname{ess\,sup}_G u^+\leqslant\max\left\{M,\ \left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{q-1}}\right\} \tag{2.9}$$

三、定理的证明

为证明定理成立，我们需要下面的引理：

引理1 设$u\in W^1_{(p_i)}(G)$，那么

$$\|u\|_{L_{p^*}(G)}\leqslant c(n,\ p_i)\|u\|_G^{1/p} \qquad (1<p<n) \tag{3.1}$$

$$\|u\|_{L_t(G)}\leqslant c(n,p,t)\,|G|^{1/t}\,\|u\|_G^{1/p} \qquad (1<t<\infty,\ p\geqslant n) \tag{3.2}$$

其中$|G|$记G的Lebesgue测度，而

$$\|u\|_G=\int_G\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^{p_i}dx.$$

证明 如所巳知（例如见[4]或[7]），对$u\in \mathring{W}^1_{(p_i)}(G)$，成立

$$\|u\|_{L_{p^*}(G)}\leqslant c(G)\prod_{i=1}^n\|u_{x_i}\|_{L_{p_i}(G)}^{\frac{1}{n}} \qquad (1<p<n)$$

取$u(x)=0$（当$x\bar{\in}G$），开拓u在$B(R)=\{|x|<R\}\supset G$，那么，通过相似变换，可知c和G无关。然后，利用关于算术平均和几何平均的代数不等式即可得到(3.1)式。

为证(3.2)，取$q\geqslant\max\{p_i,t\}$，并变动p_i'使

$$1<p_i'\leqslant p_i\leqslant q=p'^*,\ \frac{1}{p'}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{p_i'}\ \text{且}1<p'<n.$$

那么

$$\|u\|_{L_q(G)}\leqslant c(n,p_i')\prod_{i=1}^n\|u_{x_i}\|_{L_{p_i'}(G)}^{\frac{1}{n}}.$$

然后利用Hölder不等式，给出

$$\|u\|_{L_t(G)}\leqslant c(n,p_i')\,|G|^{\frac{1}{t}}\prod_{i=1}^n\|u_{x_i}\|_{L_{p_i}(G)}^{\frac{1}{n}}.$$

对p_i'极小化c，即得到(3.2)式。

引理2 设$u\in L_1(G)$满足

$$\int_G(u-k)^+dx\leqslant F\,|G\cap\{u>k\}|^{1+\tau} \qquad (\forall k\geqslant k_0\geqslant 0),$$

其中 F，τ为正数，那么

$$\operatorname*{ess\,sup}_G\ u^+\leqslant k_0+\left(1+\frac{1}{\tau}\right)F\,|G|^{\tau}.$$

注： 引理2是[9]中第二章引理5.1的一个特款。

定理1 的证明 我们定义

$$k(\theta)=\left(\frac{1}{\lambda(1+2\theta)}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{q-1}} \qquad (\theta\geqslant 0).$$

如果$M<k(0)$，那么存在$\theta_0>0$，使得

$$M<k(\theta) \qquad (\theta\in(0,\ \theta_0))$$

下面我们只限于考虑$k\geqslant\max\{M,\ k(\theta)\}$的情形，

在$G\cap\{u>k\}$上，有

$$f(x)-\lambda|u|^{q-2}u\leqslant F=\begin{cases}0, & (\text{当}M\geqslant k(0))\\ \dfrac{2\theta}{1+2\theta}\|f\|_{L_\infty(G)} & (\text{当}M<k(0))\end{cases}\tag{3.3}$$

由于(2.6)，对任何$h>k$，

$$\mathring{W}^1_{(p_i)}(G)\cap L_\infty(G)\ni V=(u-k)^+-(u-h)^+=\begin{cases}h-k & (\text{当}u(x)\geqslant h)\\ u-k & (\text{当}k<u(x)<h)\\ 0 & (\text{当}u(x)\leqslant k)\end{cases}$$

取这样的V作试验函数，将它代入(2.1)′即得

$$\int_{G\cap\{k<u<h\}}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^{p_i}dx$$

$$\leqslant\int_{G\cap\{u>k\}}((u-k)^+-(u-h)^+)\Big(\sum_{i=1}^n c_i(x)|u_{x_i}|^{\gamma_i}+F\Big)dx\tag{3.4}$$

命$h\to\infty$，由(3.4)继续得

$$\int_{G\cap\{u>k\}}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^{p_i}dx$$

$$\leqslant\int_{G\cap\{u>k\}}(u-k)\Big(\sum_{i=1}^n c_i(x)|u_{x_i}|^{\gamma_i}+F\Big)dx\tag{3.5}$$

设$\varepsilon>0$满足

$$\varepsilon 2^{p^*}ns\leqslant\frac{1}{4}\tag{3.6}$$

s是出现在(3.1)式右端的常数．我们取$N>0$这样大，使

$$\sum_{i=1}^n\Big(\int_{G\cap\{c_i(x)>N\}}|c_i(x)|^n dx\Big)^{\frac{1}{n}}\leqslant\varepsilon.$$

因(3.4)式右端积分的被积函数包含有u的导数，积分的有效区域排除形如$G\cap\{u=\text{const}\}$的正测度集．因此，我们不妨设对任何h，$|G\cap\{u=h\}|=0$．于是我们可以取

$$h_0=\infty>h_1>h_2>\cdots\cdots>h_m=k\geqslant\max\{M,\ k(\theta)\}$$

使$G_j=G\cap\{h_j<u<h_{j-1}\}$满足

$$N|G_j|^{\frac{1}{n}}=\varepsilon\ (j<m)\ \text{和}\ N|G_m|^{\frac{1}{n}}\leqslant\varepsilon,$$

那么

$$(m-1)\Big(\frac{\varepsilon}{N}\Big)^n\leqslant\sum_{j=1}^m|G_j|\leqslant|G|.\tag{3.7}$$

对$j=1,2,\cdots,n$，定义$u^{(j)}=(u-h_j)^+-(u-h_{j-1})^+$，则对几乎处处的$x\in G$，我们有

$$u^{(j)}_{x_i}=u_{x_i}\quad(\text{当}x\in G_j),\quad u^{(j)}_{x_i}=0\quad(\text{当}x\in G\setminus G_j),$$

根据(3.4)，对$\nu\geqslant2$，有

$$\int_{G_\nu}\sum_{i=1}^n|u^{\nu}_{x_i}|^{p_i}dx$$

$$\leqslant\int_{G_\nu} u^{(\nu)}\sum_{i=1}^{n} c_i(x)|u_{x_i}|^{\gamma_i}dx+\int_{G\cap\{u>k\}}(u-k)dxF \tag{3.8}$$

在G_ν上，$(u-h_\nu)^+=\sum_{j=1}^{\nu}u^{(j)}$，因此，有

$$u^{(\nu)}|u_{x_i}|^{\gamma_i}=u^{(\nu)}\Big|\sum_{j=1}^{\nu}u_{x_i}^{(j)}\Big|^{\gamma_i}$$

$$\leqslant 2^{p^*}u^{(\nu)}\Big(|u_{x_i}^{(\nu)}|^{\gamma_i}+\Big|\sum_{j=1}^{\nu-1}u_{x_i}^{(j)}\Big|^{\gamma_i}\Big)$$

$$\leqslant 2^{p^*}u^{(\nu)}\Big(|u_{x_i}^{(\nu)}|^{\gamma_i}+m^{p^*}\sum_{j=1}^{\nu-1}|u_{x_i}^{(j)}|^{\gamma_i}\Big),$$

$$\int_{G_\nu}u^{(\nu)}c_i(x)|u_{x_i}^{(j)}|^{\gamma_i}dx$$

$$\leqslant\|u^{(\nu)}\|_{L_p^*(G)}\|u_{x_i}^{(j)}\|^{\gamma_i}_{L_{p_i}(G)}\|c_i(x)\|_{L_n(G)}$$

$$\leqslant c\|u^{(\nu)}\|_G^{\frac{1}{p}}\|u^{(j)}\|_G^{\gamma_i/p_i} \tag{3.9}$$

其中为简单，我们把常数$\|c_i(x)\|_{L_n(G)}$吸收到常数c中，c还依赖于n,p_i。此外，

$$\int_{G_\nu}u^{(\nu)}c_i(x)\ |u_{x_i}^{(\nu)}|^{\gamma_i}dx$$

$$\leqslant\|u^{(\nu)}\|_{L_p^*}\|u_{x_i}^{(\nu)}\|^{\gamma_i}_{L_{p_i}(G)}\|c_i(x)\|_{L_n(G_\nu)}$$

$$\leqslant 2\varepsilon s\|u^{(\nu)}\|_G^{\frac{1}{p}}\|u^{(\nu)}\|_G^{\gamma_i/p_i} \tag{3.10}$$

因为

$$\|c_i(x)\|_{L_n(G_\nu)}\leqslant\Big(\int_{G\cap\{c_i(x)>N\}}|c_i(x)|^n dx\Big)^{\frac{1}{n}}+N|G_\nu|^{\frac{1}{n}}\leqslant 2\varepsilon,$$

联合(3.8)～(3.10)、(3.6)和(2.5)式，即得

$$\|u^{(\nu)}\|_G\leqslant c\Big(\sum_{j=1}^{\nu-1}\|u^{(j)}\|_G+F\|(u-k)^+\|_{L_p^*(G)}|A(k)|^{1-\frac{1}{p^*}}\tag{3.11}$$

$$(\nu=2,\cdots,m)$$

其中 $A(k)=|G\cap\{u>k\}|$，常数$c>0$和k，F无关．另一方面，根据(3.5)（其中的k用h_1来代），用同样的方式我们推导出

$$\|u^{(1)}\|_G\leqslant cF\|(u-k)^+\|_{L_p^*(G)}A(k)^{1-\frac{1}{p^*}} \tag{3.12}$$

利用(3.11)、(3.12)进行迭代，给出

$$\|u^{(\nu)}\|_G\leqslant cF\|(u-k)^+\|_{L_p^*(G)}A(k)^{1-\frac{1}{p^*}}\qquad(\nu=1,2,\cdots,m) \tag{3.13}$$

其中 常数$c>0$还要依赖于m，但由于(3.6)、(3.7)，m可以控制，由(3.13)继续得

$$\|(u-k)^+\|_{L_{p^*}(G)}\leqslant\sum_{j=1}^{m}\|u^{(j)}\|_{L_{p^*}(G)}\leqslant s\sum_{j=1}^{m}\|u^{(j)}\|_{G}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant(cF\|(u-k)^+\|_{L_{p^*}(G)}A(k)^{1-\frac{1}{p^*}})^{\frac{1}{p}}.$$

从而，有

$$\int_G(u-k)^+dx\leqslant cF^{\frac{1}{p-1}}A(k)^{1+\frac{p}{n(p-1)}}.$$

根据引理2，我们有

$$\operatorname*{ess\,sup}_G u^+\leqslant\max(M,k(\theta))+cF^{\frac{1}{p-1}}|G|^{\frac{p}{n(p-1)}}. \tag{3.14}$$

如果$M\geqslant k(0)$，我们有$F=0$，

$$\operatorname*{ess\,sup}_G u^+\leqslant M.$$

相反的情形，我们有

$$M<k(\theta)\,(\forall\theta\in(0,\ \theta_0))\ 而且\ F=\frac{2\theta}{1+2\theta}\|f\|_{L_\infty(G)}.$$

(3.14)式隐含了

$$\operatorname*{ess\,sup}_G u^+\leqslant\left(\frac{1}{\lambda(1+2\theta)}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{q-1}}+c|G|^{\frac{p}{n(p-1)}}\left(\frac{2\theta}{1+2\theta}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{3.15}$$

在$q=p\in(1,2)$的情形，我们可以取$\theta>0$这样小，使

$$(\lambda(1+2\theta))^{-\frac{1}{p-1}}+c|G|^{\frac{p}{n(p-1)}}\left(\frac{2\theta}{1+2\theta}\right)^{\frac{1}{p-1}}\leqslant(\lambda(1+\theta))^{-\frac{1}{p-1}},$$

这等价于要求θ满足

$$c|G|^{\frac{p}{n(p-1)}}\left(\frac{2\lambda\theta}{1+2\theta}\right)^{\frac{1}{p-1}}\leqslant\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{\frac{1}{p-1}}-\left(\frac{1}{1+2\theta}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

$$=\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{1+\sigma\theta}\right)^{1+\frac{1}{p-1}}\theta\qquad(对某个\sigma\in(1,2)) \tag{3.16}$$

显然，如果$\theta\leqslant1$，且

$$3c|G|^{\frac{p}{n(p-1)}}(2\lambda)^{\frac{1}{p-1}}\theta^{\frac{2-p}{p-1}}\leqslant\frac{1}{p-1},$$

那么(3.16)就能满足．由(3.15)得

$$\operatorname*{ess\,sup}_G u^+\leqslant\left(\frac{1}{\lambda(1+\theta)}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

定理1 于是获证．

定理2 的证明 首先考虑 $\max\left\{\frac{\gamma_i}{p_i}\right\}<1$的情形，这时$t=\max\{t_i\}<+\infty$．可以用上述证明(3.14)式的方法，在这种情形下同样证明(3.14)成立，只有少许的修改：

取$N>0$，使

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{G\cap\{c_i(x)>N\}}|c_i(x)|^{r_i}dx\right)^{\frac{1}{r_i}}<\varepsilon.$$

再取

$$N|G_j|^{\min\left\{\frac{1}{r_i}\right\}}=\varepsilon \qquad (\text{当} j<m)$$

$$N|G_m|^{\min\left\{\frac{1}{r_i}\right\}}\leqslant\varepsilon,$$

ε为预给，满足

$$\varepsilon 2^{p^*}n\max_i\{s^{\alpha_i}|G|^{\beta_i}\|u\|^{1-\alpha_i}_{L_t(G)}\}\leqslant\frac{1}{4},$$

$$\alpha_i=p\left(1-\frac{\gamma_i}{p_i}\right)\in(0,1)$$

$$\beta_i=1-\frac{\gamma_i}{p_i}-\frac{1}{r_i}-\frac{\alpha_i}{p^*}-\frac{(1-\alpha_i)}{t}\geqslant 0.$$

相应地，(3.9)、(3.10)修改如下：

$$\int_{G_\nu}u^\nu c_i(x)|u^\nu_{x_i}|^{\gamma_i}dx$$

$$\leqslant\|u^\nu\|^{\alpha_i}_{L_{p^*}(G)}\|u^\nu_{x_i}\|^{\gamma_i}_{L_{p_i}(G)}\|u\|^{1-\alpha_i}_{L_t(G)}\|c_i(x)\|_{L_{r_i}(G)}|G|^{\beta_i}$$

$$\leqslant c\|u^\nu\|_G^{1-\frac{\gamma_i}{p_i}}\|u^\nu\|_G^{\gamma_i/p_i} \tag{3.9$'$}$$

上式最后的结果中我们把$\|c_i(x)\|_{Lr_i(G)}$，$\|u\|_{Lt(G)}$和$|G|$吸收到常数c中，

$$\int_{G_\nu}u^\nu c_i(x)|u^\nu_{x_i}|^{\gamma_i}dx$$

$$\leqslant\|u^\nu\|^{\alpha_i}_{L_{p^*}(G)}\|u^\nu_{x_i}\|^{\gamma_i}_{L_{p_i}(G)}\|u\|^{1-\alpha_i}_{Lt(G)}\|c_i(x)\|_{Lt(G_\nu)}|G|^{\beta_i}$$

$$\leqslant 2\varepsilon s\|u^\nu\|_G^{1-\gamma_i/p_i}\|u^\nu\|_G^{\gamma_i/p_i} \tag{3.10$'$}$$

剩下的证明直至得到(3.15)和前面定理1一样，只是常数c要依赖于$\|u\|_{Lt(G)}$。因为$p\in(1,2)$，根据(3.15)，存在$\theta>0$依赖于$\|u\|_{Lt(G)}$、$\|f\|_{L_\infty(G)}$，使

$$\operatorname*{ess\,sup}_G u^+\leqslant\left(\frac{1}{\lambda(1+\theta)}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{q-1}}<\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L_\infty(G)}\right)^{\frac{1}{q-1}}.$$

这正是欲证的断言(ii)。

在 $\max\limits_i\left\{\frac{\gamma_i}{p_i}\right\}=1$的情形，$t=\max\limits_i\{t_i\}=\infty$，取

$$v=\exp[\tau u]((u-k)^+-(u-h)^+),\ h>k\geqslant\max(M,\ k(\theta))$$

$$\tau\geqslant\sum_{\gamma_i=p_i}\|c_i(x)\|_{L_\infty(G)}$$

$(h,k,\tau$都是常数)，这样的v可取作试验函数。由(2.1)$'$推得

$$\int_{G\cap\{k<u<h\}}\exp[\tau u]\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^{p_i}dx$$

$$\leqslant\int_{G\cap\{u>k\}}\exp[\tau u]((u-k)^+-(u-h)^+)\Big(\sum_{\gamma_i<p_i}c_i(x)|u_{x_i}|^{\gamma_i}+F\Big)dx \qquad (3.4)'$$

其中F和(3.3)中的相同．因为$u\in L_\infty(G)$，故可设$H\geqslant M$和$|u|\leqslant H$．由(3.4)′得

$$\int_{G\cap\{k<u<h\}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{p_i}dx$$

$$\leqslant c\int_{G\cap\{u>k\}}((u-k)^+-(u-h)^+)\Big[\sum_{\gamma_i<p_i}c_i(x)|u_{x_i}|^{\gamma_i}+F\Big]dx \qquad (3.4)''$$

其中的常数$c>0$仅依赖于τH．由(3.4)″再一次可以推导出定理2的断言．于是定理2证讫．

关于定理3～5的证明与上述方法都相同，只是证定理 3 和定理 5 时，取

$$k\geqslant\max(M,\ k(0)),$$

而证定理4时取$k\geqslant M$．此外，在证定理4时还要利用：

$$\int_{G\cap\{k<u<h\}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^{p_i}dx$$

$$\leqslant\int_{G\cap\{u>k\}}((u-k)^+-(u-h)^+)\sum_{i=1}^{n}c_i(x)|u_{x_i}|^{\gamma_i}dx$$

$$+\int_{G\cap\{u>h\}}(u-k)+f(x)dx$$

和

$$\int_{G\cap\{u>k\}}(u-k)^+f(x)dx\leqslant\|(u-k)^+\|_{L^{p^*}(G)}\|f\|_{L_s(G)}A(k)^{1-\frac{1}{p^*}-\frac{1}{s}}$$

参 考 文 献

[1] Lu Wen-duan, The Dirichlet problem for a class of quasilinear elliptic equations of sencond order, 数学进展, 14, (1985), 276—278.

[2] Lu Wen-duan, Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic equations, 数学研究与评论, 6(1986), 51—56.

[3] Chen Zu-chi and Shen Yao-tian, Nontrivial solutions of the Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic equations, *Acta. Math. Sci.*, 7, (1987), 63—74.

[4] Lu Wen-duan, Global boundness for weak solutions of second order quasilinear elliptic equations in divergence form, *J. part. Diff. Equ.*, Ser. B, 1(2)(1988), 12—16.

[5] 王向东、梁鑫廷, 一类椭圆型方程广义解的有界性, 怀化师院学报(自然科学版), 9, (1990), 89—96.

[6] 王向东, 梁鑫廷, The local boundedness for-solutions of quasilinear elliptic equations in anisotropic Sobolev Space, 应用数学.

[7] Fusco, N. and C. Sbordone, Local boundedness of minimizers in a limited case, Manuscripts Math., 69(1990), 19—25.

[8] Lyladyzenskaja, O.A. and N.N. ural′ ceva, Linear and quasilinear equations

of elliptic type, "Nauka", Moscow, (1973).

[9] 梁鋆廷,王向东, A priori estimate for maximum modulus of generalized solutions of quasilinear elliptic equations, *Appl. Math. Mech.* (English ed), 11(1990), 941—953.

A Priori Estimates to the Maximum Modulus of Generalized Solutions of a Class of Quasilinear Elliptic Epuations with Anisotropic Growth Conditions

Liang Xi-ting

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou)

Wang Xiang-dong

(Department of Mathematics, Xuchang Teachers College, Zhengzhou)

Abstract

In this paper we give a priori estimates for the maximum modulus of generalized solutions of the quasilinear elliptic equations with arisoteropic growth conditions.

Key words quasilinear elliptic equation, nonstandard growth condition, anisotropic Sobolev space, generalized solution maximum modulus, a priori estimate