应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

求解一类非线性方程的改进的平均法*

张 宝 善

（徐州师范学院数学系，1994年2月28日收到）

摘 要

本文研究确定非线性方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=\varepsilon f\left(u,\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dt^2}\right),\qquad 0<\varepsilon\ll\omega$$

一致有效近似解的平均法，得到KB方法(Krylov-Bogoliubov method)与KBM方法(Krylov-Bogoliubov-Mitropolski method)的改进形式．通过两个例子与多尺度方法的比较，说明改进的平均法的有效性，从而拓广了平均法的应用范围．

关键词 KB方法 KBM方法 多尺度方法 一致有效解

一、引 言

文献[1，2]介绍的平均法（KB方法）及推广的平均法（KBM方法）很好地解决了寻求形如

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=\varepsilon f\left(u,\ \frac{du}{dt}\right),\qquad 0<\varepsilon\ll\omega \tag{1.1}$$

的非线性方程的一致有效解问题．文献[3，4]研究了非线性振动系统

$$\frac{d^2u}{dt^2}+g(u)=\varepsilon f\left(u,\ \frac{du}{dt}\right),\qquad \varepsilon>0 \tag{1.2}$$

分别得到了有很大实用价值的渐近方法．然而，在现实问题和研究中，有些系统往往要比(1.1)和(1.2)复杂，其中的非线性项$f(u,\ du/dt)$很可能还是$d^2u/\partial t^2$的函数．例如，方程[5]

$$\frac{d^2u}{dt^2}+4u+\varepsilon u^2\frac{d^2u}{dt^2}=0,\qquad 0<\varepsilon\ll 2 \tag{1.3}$$

和在转动的抛物线上运动质点所满足的方程

$$(1+4p^2x^2)\frac{d^2x}{dt^2}+qx+4p^2x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0 \tag{1.4}$$

其中，p，q是常数，x小而有限，就是这样的一些方程．一般地，对于非线性方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=\varepsilon f\left(u,\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dt^2}\right) \tag{1.5}$$

---

* 戴世强推荐．
1991年9月9日第一次收到．

如何利用平均法求其一致有效解，我们尚未见有讨论。

本文研究形如(1.5)的非线性方程，首先给出一种较之KB方法和KBM方法改进的平均法，再通过实例与多尺度方法比较来说明这一改进的平均法的有效性。为方便计，我们假定(1.5)已无量纲化，且非线性项$f(x, y, z)$为其宗量的解析函数，ω是正常数，ε是小参数，且$0<\varepsilon\ll\omega$。

二、KB方法的改进

我们先研究用KB方法求解(1.5)的一致有效解问题。按KB方法[2]，可设(1.5)有解

$$u=a\cos\varphi,\quad a=a(t),\quad \varphi=\omega t+\theta(t) \tag{2.1}$$

附以约束条件

$$\frac{da}{dt}\cos\varphi-a\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi=0 \tag{2.2}$$

则有

$$du/dt=-a\omega\sin\varphi \tag{2.3}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=-\frac{da}{dt}\omega\sin\varphi-a\omega\left(\omega+\frac{d\theta}{dt}\right)\cos\varphi \tag{2.4}$$

将(2.1)、(2.3)、(2.4)诸式代入方程(1.5)并整理得

$$\begin{aligned}-\frac{da}{dt}\omega\sin\varphi-a\frac{d\theta}{dt}\omega\cos\varphi=\varepsilon f\Big(&a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\\ &-\frac{da}{dt}\omega\sin\varphi-a\frac{d\theta}{dt}\omega\cos\varphi-a\omega^2\cos\varphi\Big)\end{aligned} \tag{2.5}$$

通常由(2.5)式不能直接解出

$$-\frac{da}{dt}\omega\sin\varphi-a\frac{d\theta}{dt}\omega\cos\varphi$$

从而也就不能与(2.2)式联立解出da/dt和$ad\theta/dt$。但是注意到(2.5)式隐含

$$-\frac{da}{dt}\omega\sin\varphi-a\frac{d\theta}{dt}\omega\cos\varphi=O(\varepsilon) \tag{2.6}$$

故有

$$\begin{aligned}&f\left(a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\ -\frac{da}{dt}\omega\sin\varphi-a\frac{d\theta}{dt}\omega\cos\varphi-a\omega^2\cos\varphi\right)\\ &\quad=f(a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\ -a\omega^2\cos\varphi)\\ &\qquad+f'_z(a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\ -a\omega^2\cos\varphi)\cdot\left(-\frac{da}{dt}\omega\sin\varphi-a\frac{d\theta}{dt}\omega\cos\varphi\right)\\ &\qquad+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{2.7}$$

从而

$$\begin{aligned}-\frac{da}{dt}\omega\sin\varphi-a\frac{d\theta}{dt}\omega\cos\varphi&=\frac{\varepsilon f(a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\ -a\omega^2\cos\varphi)}{1-\varepsilon f'_z}+O(\varepsilon^3)\\ &=\varepsilon f(a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\ -a\omega^2\cos\varphi)+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{2.8}$$

因此，我们可将下式

$$-\frac{da}{dt}\omega\sin\varphi-a\frac{d\theta}{dt}\omega\cos\varphi=\varepsilon f(a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\ -a\omega^2\cos\varphi) \tag{2.9}$$

与(2.2)式联立来确定da/dt和$ad\theta/dt$，然后在[0，π]上对φ取积分平均，再取t积分来求出(1.5)的一致有效解．

综上讨论，我们得到如下改进的KB方法：设（1.5）有解(2.1)，将(2.1)，(2.3)代入(1.5)，将(2.4)代入(1.5)左端而用

$$du^2/dt^2=-a\omega^2\cos\varphi \tag{2.10}$$

代入(1.5)右端得到(2.9)，再将(2.2)、(2.9)两式联立解出da/dt和$ad\theta/dt$：

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}f(a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\ -a\omega^2\cos\varphi)\sin\varphi\\ a\frac{d\theta}{dt}&=-\frac{\varepsilon}{\omega}f(a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\ -a\omega^2\cos\varphi)\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

最后对(2.11)式在[0，π]上取积分平均，再对t积分da/dt和$ad\theta/dt$，求得$a(t)$，$\theta(t)$代入(2.1)即得(1.5)的一阶一致有效解．

我们将在第四节中以方程(1.3)为例说明改进的KB方法与通常多尺度方法的一致性．

三、KBM 方法的改进

现在我们给出改进的KBM方法．首先按熟知的KBM方法[2]，设(1.5)有解的渐近展开式

$$u=a\cos\varphi+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i u_i(a,\ \varphi)+O(\varepsilon^{N+1}) \tag{3.1}$$

并且

$$\frac{da}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i A_i(a)+O(\varepsilon^{N+1}) \tag{3.2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i\varphi_i(a)+O(\varepsilon^{N+1}) \tag{3.3}$$

于是由链式法则可算出du/dt，d^2u/dt^2．再设$f(u,\ du/dt,\ d^2u/dt^2)$可展成

$$\begin{aligned}f\left(u,\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dt^2}\right)&=f(a\cos\varphi,\ -a\omega\sin\varphi,\ -a\omega^2\varphi)\\&+\sum_{i=1}^{N-1}\varepsilon^i f_i(a,\ \varphi,\ A_1,\cdots,\ A_i,\ \varphi_1,\cdots,\ \varphi_i,\ u_1,\ u_2,\cdots,\ u_i)+O(\varepsilon^N)\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中，$f_i(a,\ \varphi,\ A_1,\cdots,\ A_i,\ \varphi_1,\cdots,\ \varphi_i,\ u_1,\ u_2,\cdots,\ u_i)$中含有$A_1,\cdots,\ A_i,\ \varphi_1,\cdots,\ \varphi_i$的关于$a$的一阶和二阶导数，$u_1,\ \cdots,\ u_i$的关于$a$，$\varphi$的一阶二阶偏导数且$u_i=u_i(a,\ \varphi)$($i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$)．那么将(3.1)～(3.4)代入(1.5)便可比较ε的各同次幂系数并依次得到一系列方程．

$$\begin{cases}\omega^2\partial^2u_1/\partial\varphi^2+\omega^2u_1=F_1(a,\ \varphi,\ A_1,\ \varphi_1) & (3.5)\\ \omega^2\partial^2u_i/\partial\varphi^2+\omega^2u_i=F_i(a,\ \varphi,\ A_1,\cdots,\ A_i,\ \varphi_1,\cdots,\ \varphi_i,\ u_1,\cdots,\ u_{i-1}) & (3.6)\end{cases}$$

($i=2,\ 3,\cdots,\ N$)其中F_i有类于f_i的性质．

综上所述，我们改进的KBM方法是：设（1.5）有解（3.1），利用（3.1)～(3.3)确定

(3.4)，再将(3.1)～(3.4)代入(1.5)式比较ε各同次幂系数依次确定(3.5)和(3.6)．最后通过消长期项依次确定A_i，φ_i，$u_i(i=1, 2, \cdots, N)$．从而得到(1.5)的N阶一致有效近似解．

值得指出，如取$N=1$，(3.4)就与(2.7)一样．可见这一改进的KBM方法也是改进的KB方法的推广．在下一节，我们将用改进的KBM方法求解(1.4)，并通过与多尺度方法的比较说明本方法的一致有效性．

四、应 用 举 例

我们知道，用多尺度方法可求得方程(1.3)的一阶一致有效解[5, §4.3, (64)式]

$$u=a\cos\left[\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon a^2\right)2t+\theta_0\right]+\cdots \tag{4.1}$$

现在我们用改进的KB方法求解(1.3)．这里

$$f\left(u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}\right)=-u^2\frac{d^2u}{dt^2}, \qquad \omega=2 \tag{4.2}$$

$\varepsilon=0$时(1.3)的退化方程有解

$$u=a\cos\varphi, \quad \varphi=2t+\theta \tag{4.3}$$

于是，$\varepsilon>0$时，设(1.3)有解

$$u=a\cos\varphi, \quad a=a(t), \quad \varphi=2t+\theta(t) \tag{4.4}$$

将(4.4)式及

$$du/dt=-2a\sin\varphi, \quad d^2u/dt^2=-4a\cos\varphi \tag{4.5}$$

代入(4.2)式，由(2.11)式知

$$da/dt=-2\varepsilon a^3\cos^3\varphi\sin\varphi, \quad a d\theta/dt=-2\varepsilon a^3\cos^4\varphi \tag{4.6}$$

利用恒等式

$$\cos^4\varphi=(\cos4\varphi+4\cos2\varphi+3)/8 \tag{4.7}$$

对(4.6)在$[0, \pi]$上取积分平均

$$\frac{da}{dt}=-\frac{2\varepsilon a^3}{\pi}\int_0^\pi\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi=0 \tag{4.8}$$

$$a\frac{d\theta}{dt}=-\frac{2\varepsilon a^3}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{8}(\cos4\varphi+4\cos2\varphi+3)d\varphi=-\frac{3}{4}\varepsilon a^3 \tag{4.9}$$

从而得到

$$a=\text{const}, \quad \theta=-\frac{3}{4}\varepsilon a^2t+\theta_0, \qquad (\theta_0=\text{const}) \tag{4.10}$$

将(4.10)代入(4.4)得

$$u=a\cos\left(2t-\frac{3}{4}\varepsilon a^2t+\theta_0\right) \tag{4.11}$$

故(1.3)的一阶近似解为

$$u=a\cos\left(2t-\frac{3}{4}\varepsilon a^2t+\theta_0\right)+\cdots=a\cos\left[\left(1-\frac{3}{8}\varepsilon a^2\right)2t+\theta_0\right]+\cdots \tag{4.12}$$

此即(4.1)，故与多尺度方法结果一致．

作为第二个例子，我们考虑方程(1.4)的二阶有效近似解．为此，取$x=\varepsilon_1^{1/2}u$，$q=\omega^2$，将(1.4)化为无量纲化方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=-4p^2\varepsilon_1\left(u^2\frac{d^2u}{dt^2}+u\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right) \tag{4.13}$$

故我们只须求方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=-\varepsilon\left(u^2\frac{d^2u}{dt^2}+u\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right),\qquad 0<\varepsilon=4p^2\varepsilon_1\ll\omega \tag{4.14}$$

的二阶一致有效近似就可以了．先用改进的KBM方法求解(4.14)，这里，$N=2$，

$$u=a\cos\varphi+\varepsilon u_1(a,\ \varphi)+\varepsilon^2u_2(a,\ \varphi)+O(\varepsilon^3) \tag{4.15}$$

$$da/dt=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2A_2(a)+O(\varepsilon^3) \tag{4.16}$$

$$d\varphi/dt=\omega+\varepsilon\varphi_1(a)+\varepsilon^2\varphi_2(a)+O(\varepsilon^3) \tag{4.17}$$

于是由链式法则得到

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=\frac{da}{dt}\cdot\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi}\\&=-a\omega\sin\varphi+\varepsilon\left(A_1\cos\varphi+\omega\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}-a\varphi_1\sin\varphi\right)\\&\quad+\varepsilon^2\left(A_1\frac{\partial u_1}{\partial a}+A_2\cos\varphi-a\varphi_2\sin\varphi+\varphi_1\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}+\omega\frac{\partial u_2}{\partial\varphi}\right)+O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}&=\frac{da}{dt}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{du}{dt}\right)+\frac{d\varphi}{dt}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{du}{dt}\right)\\&=-a\omega^2\cos\varphi+\varepsilon\left(\omega^2\frac{\partial^2u_1}{\partial\varphi^2}-2a\omega\varphi_1\cos\varphi-2A_1\omega\sin\varphi\right)\\&\quad+\varepsilon^2\left(\omega^2\frac{\partial^2u_2}{\partial\varphi^2}-a\varphi_1^2\cos\varphi-2a\omega\varphi_2\cos\varphi+2\omega\varphi_1\frac{\partial^2u_1}{\partial\varphi^2}-2A_1\varphi_1\sin\varphi\right.\\&\quad\left.+2A_1\omega\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\varphi}-2A_2\omega\sin\varphi-aA_1\frac{d\varphi_1}{da}\sin\varphi+A_1\frac{dA_1}{da}\cos\varphi\right)+O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{4.19}$$

将(4.15)，(4.18)，(4.19)，代入

$$f\left(u,\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dt^2}\right)=-\left(u^2\frac{d^2u}{dt^2}+u\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right)$$

得

$$\begin{aligned}f\left(u,\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dt^2}\right)&=a^3\omega^2\cos\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+\varepsilon\left(-a^2\omega^2\frac{\partial^2u_1}{\partial\varphi^2}\cos^2\varphi\right.\\&\quad+2a^2\omega^2\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi+2a^3\varphi_1\cos\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\\&\quad\left.+4A_1a^2\omega\sin\varphi\cos^2\varphi+a^2\omega^2u_1(2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\right)+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{4.20}$$

于是将(4.15)、(4.19)、(4.20)代入(4.14)并比较ε，ε^2同次幂项系数得到

$$\omega^2\partial^2u_1/\partial\varphi^2+\omega^2u_1=2a\omega\varphi_1\cos\varphi+2A_1\omega\sin\varphi+a^3\omega^2\cos\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\omega^2\partial^2u_2/\partial\varphi^2+\omega^2u_2&=2a\omega\varphi_2\cos\varphi+2A_2\omega\sin\varphi+2A_1\varphi_1\sin\varphi\\&\quad+aA_1\frac{d\varphi_1}{da}\sin\varphi-2\varphi_1\omega\frac{\partial^2u_1}{\partial\varphi^2}-2A_1\omega\frac{\partial^2u_1}{\partial a\partial\varphi}-A_1\frac{dA_1}{da}\cos\varphi\\&\quad+a\varphi_1^2\cos\varphi-a^2\omega^2\frac{\partial^2u_1}{\partial\varphi^2}\cos^2\varphi+2a^2\omega^2\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}\sin\varphi\cos\varphi\end{aligned}$$

$$+2a^3\varphi_1\cos\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)+4A_1a^2\omega\sin\varphi\cos^2\varphi$$
$$+a^2\omega^2u_1(2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi) \tag{4.22}$$

利用三角恒等式并对(4.21)式右端消长期项得

$$A_1=0,\ \ \varphi_1=-a^2\omega/4 \tag{4.23}$$

从而(4.21)式变为

$$\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}+\omega^2 u_1=\frac{1}{2}a^3\omega^2\cos3\varphi \tag{4.24}$$

其解为

$$u_1=-\frac{1}{16}a^3\cos3\varphi \tag{4.25}$$

再将(4.23)、(4.25)代入(4.22)并利用三角恒等式得

$$\omega^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial\varphi^2}+\omega^2 u_2=\left(2a\ \omega\varphi_2-\frac{9}{32}a^5\omega^2\right)\cos\varphi+2A_2\omega\sin\varphi$$
$$-\frac{9}{32}a^5\omega^2(\cos3\varphi+\cos5\varphi) \tag{4.26}$$

由此消长期项得

$$A_2=0;\ \ \varphi_2=\frac{9}{64}a^4\omega \tag{4.27}$$

最后由(4.26)、(4.27)解得

$$u_2=\frac{9}{256}a^5\cos3\varphi+\frac{9}{768}a^5\cos5\varphi \tag{4.28}$$

这样，我们得到(4.14)的二阶近似解

$$u=a\cos\varphi-\frac{1}{16}\varepsilon a^3\cos3\varphi+\frac{9}{768}\varepsilon^2a^5(3\cos3\varphi+\cos5\varphi)+O(\varepsilon^3) \tag{4.29}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dt}=\omega-\frac{1}{4}\varepsilon a^2\omega+\frac{9}{64}\varepsilon^2a^4\omega+O(\varepsilon^3)\\&\varphi=\varphi_0+\omega\left(1-\frac{1}{4}\varepsilon a^2+\frac{9}{64}\varepsilon^2a^4\right)t+O(\varepsilon^3)\end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

其中a，φ_0为常数。

我们再用多尺度方法求解(4.14)。取三尺度$T_0=t$，$T_1=\varepsilon t$，$T_2=\varepsilon^2t$，设(4.14)有解

$$u=u_0(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon u_1(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon^2u_2(T_0,T_1,T_2)+O(\varepsilon^3) \tag{4.31}$$

利用公式

$$d/dt=D_0+\varepsilon D_1+\varepsilon^2D_2+\cdots \tag{4.32}$$
$$d^2/dt^2=D_0^2+\varepsilon(2D_0D_1)+\varepsilon^2(2D_0D_2+D_1^2)+\cdots \tag{4.33}$$

其中 $D_i=\dfrac{\partial}{\partial T_i}\qquad(i=0,\ 1,\ 2)$

得

$$du/dt=D_0u_0+\varepsilon(D_0u_1+D_1u_0)+O(\varepsilon^2) \tag{4.34}$$
$$d^2u/dt^2=D_0^2u_0+\varepsilon(D_0^2u_1+2D_0D_1u_0)+\varepsilon^2(D_0^2u_2+2D_0D_1u_1$$
$$+2D_0D_2u_0+D_1^2u_0)+O(\varepsilon^3) \tag{4.35}$$

将(4.31)、(4.34)，(4.35)代入(4.14)并比较ε^0，ε^1，ε^2同次项系数得

$$D_0^2u_0+\omega^2u_0=0 \tag{4.36}$$
$$D_0^2u_1+\omega^2u_1=-2D_0D_1u_0-u_0^2D_0^2u_0-u_0(D_0u_0)^2 \tag{4.37}$$

$$D_0^2u_2+\omega^2u_2=-2D_0D_1u_1-2D_0D_2u_0-D_1^2u_0-u_0^2D_0^2u_1-2u_0u_1D_0^2u_0$$
$$-u_1(D_0u_0)^2-2u_0D_0u_0(D_0u_1+D_1u_0)-2u_0^2D_0D_1u_0 \tag{4.38}$$

(4.36)有复式解

$$u_0=A\exp[i\omega T_0]+\text{c. c.} \tag{4.39}$$

其中$A=A(T_1,T_2)$为复函数，c. c.代表$A\exp[i\omega T_0]$的共轭。将(4.39)代入(4.37)整理得

$$D_0^2u_1+\omega^2u_1=2\omega^2A^3\exp[3i\omega T_0]+(-2i\omega D_1A+2\omega^2A^2\bar{A})\exp[i\omega T_0]+\text{c. c.} \tag{4.40}$$

由此消长期项得

$$-iD_1A+\omega A^2\bar{A}=0 \tag{4.41}$$

且由(4.41)决定(4.40)的解u_1为

$$u_1=B\exp[i\omega T_0]-\frac{1}{4}A^3\exp[3i\omega T_0]+\text{c. c.} \tag{4.42}$$

其中$B=B(T_1,T_2)$。将(4.39)，(4.42)代入(4.38)并注意到(4.41)，整理得

$$D_0^2u_2+\omega^2u_2=-\frac{9}{2}A^5\omega^2\exp[5i\omega T_0]+\left(6A^2B-\frac{9}{2}A^4\bar{A}\right)\omega^2\exp[3i\omega T_0]$$
$$+\left(\omega^2A^2\bar{B}-2i\omega D_2A-2i\omega D_1B-2A\bar{A}B\omega^2-\frac{9}{2}\omega^2A^3\bar{A}^2\right)\exp[i\omega T_0]+\text{c. c.} \tag{4.43}$$

由此消长期项，得

$$\omega^2A^2\bar{B}-2i\omega D_2A-2i\omega D_1B-2A\bar{A}B\omega^2-\frac{9}{2}\omega^2A^3\bar{A}^2=0 \tag{4.44}$$

且由(4.44)决定(4.43)的解u_2为

$$u_2=C\exp[i\omega T_0]+\left(\frac{9}{16}A^4\bar{A}-\frac{3}{4}A^2B\right)\exp[3i\omega T_0]+\frac{9}{48}A^5\exp[5i\omega T_0]+\text{c. c.} \tag{4.45}$$

其中$C=C(T_1,T_2)$。选取$B=C=0$，我们得到(4.14)的复式解

$$u=A\exp[i\omega T_0]-\frac{1}{4}\varepsilon A^3\exp[3i\omega T_0]+\varepsilon^2\left(\frac{9}{16}A^4\bar{A}\exp[3i\omega T_0]+\frac{9}{48}A^5\exp[5i\omega T_0]\right)$$
$$+\text{c. c.}+O(\varepsilon^3) \tag{4.46}$$

其中A由(4.41)及(4.44)($B=C=0$)决定。

为了得实式解，我们设

$$A=\frac{1}{2}ae^{i\beta} \tag{4.47}$$

代入(4.41)得

$$-i\left(\frac{1}{2}D_1a+\frac{1}{2}iaD_1\beta\right)+\frac{1}{8}\omega a^3=0 \tag{4.48}$$

比较实虚部有

$$D_1a=0,\quad aD_1\beta=-\omega a^3/4 \tag{4.49}$$

即

$$a=a(T_2),\quad \beta=-\frac{1}{4}\omega a^2T_1+\theta(T_2) \tag{4.50}$$

再将(4.47)、(4.50)代入(4.44)($B=0$)得

$$-2i\omega\left(\frac{1}{2}D_2a-\frac{1}{4}i\omega a^2T_1D_2a+iaD_2\theta\right)-\frac{9}{64}a^5\omega=0 \tag{4.51}$$

同样比较实虚部有

$$D_2a=0,\quad aD_2\theta-\frac{1}{2}\omega^2a^2T_1D_2a=\frac{9}{64}a^5\omega \tag{4.52}$$

从而

$$a=a_0\,(\text{常数}),\quad \theta=\frac{9}{64}a^4\omega T_2+\theta_0,\quad (\theta_0\text{为常数}) \tag{4.53}$$

最后由(4.47)、(4.50)、(4.53)和(4.46)以及$T_i=\varepsilon^i t$ $(i=0,1,2)$容易得到(4.29)、(4.30)，这样两种方法结果一致。

五、结 束 语

综上所述，我们看到改进的平均法不仅拓广了平均法的适用范围，而且可避免多尺度方法的复杂运算。此外，这一方法可望用于求解非线性振动系统(1.2)以及更一般的非线性方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+g(u)=\varepsilon f\left(u,\ \frac{du}{dt},\ \frac{d^2u}{dt^2}\right) \tag{5.1}$$

参 考 文 献

[1] Nayfeh, A. H., 《摄动方法导引》，宋家骕，戴世强译，上海翻译出版公司(1990).

[2] Nayfeh, A. H., 《摄动方法》，王辅俊等译，上海科学技术出版社(1984).

[3] 戴世强，强非线性振子的渐近分析，应用数学和力学，6(5)(1985)，395—400.

[4] 戴世强、庄峰青，一类非线性振动系统的渐近解，中国科学(A辑)，(1)(1986)，34—40.

[5] Nayfeh, A. H., 《振动方法习题集》，宋家骕、戴世强编译，上海翻译出版公司(1990).

A Modified Method of Averaging for Solving a Class of Nonlinear Equations

Zhang Bao-shan

(Department of Math., Xuzhou Teachers College, Xuzhou)

Abstract

In this paper, we studied a method of averaging which decides a uniform valid solution for nonlinear equation

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=\varepsilon f\left(u,\frac{du}{dt},\frac{d^2u}{dt^2}\right),\qquad 0<\varepsilon\ll\omega$$

and got the modified forms for KB method (Krylov-Bogoliubov method) and KBM method (Krylov-Bogoliubov-Mitropolski method). Through the comparison of two examples with the method of multiple scales it can be shown that the modified averaging methods here are uniformly valid and thereby the applied area of the method of averaging are extended.

Key words KB method, KBM method, method of multiple scales, uniformly valid solution