应用数学和力学，第15卷 第12期（1994年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

非均匀法向荷载下半空间的二阶弹性效应问题*

刘又文　　郭建林

（长沙 中南工业大学建筑工程系）　（加拿大温莎大学数学与统计系）

（樊大钧推荐，1994年1月5日收到）

摘　要

本文提供各向同性弹性半空间，在非均匀分布法向荷载下，二阶弹性效应的一个封闭形式解。运用积分变换方法，讨论了按 Hertz 规律分布的荷载情形；导出了不可压缩各向同性弹性材料的极限解；算出了上述二阶弹性材料问题在 z 方向的位移和法向应力数值。我们发现，与线弹性情形相比较，在二阶弹性材料中相应位移增大而法向应力减小。

关键词　弹性半空间　二阶弹性效应　积分变换

一、引　言

在有限弹性理论中，控制可压缩各向同性弹性体变形的数学方程是强非线性的，其边值问题的精确解，仅仅在某些限制条件下才能获得，常常求助于采用近似方法获得结果。成功的近似方法成为一种受到高度重视的技术。获得包含位移梯度二次项，并取得特殊椭圆积分形式的二阶解，是一个十分困难的工作。Rivlin[1]、Green 与 Spratt[2]几乎同时首次导出二阶理论，并且 Truesdell 和 Noll[3]，以及 Green 和 Adkins[4] 提出了一个综合的计算方法，Goodman 与 Naghdi[5]用位移势解答了可压缩的二阶弹性问题，其某些方面类似于 Rivlin 的方法；对于不可压缩材料的有关二阶理论的各种求解方法已由 Chan 与 Carlson[6] 给出；Selvadurai 与 Spencer[7]、Carroll 与 Mooney[8]、Choi 与 Shield[9]分别用反变形方法研究了二阶弹性材料的轴对称问题。

上述成功的近似方法都是用一些适当的参数，将位移、应力等量展开成具有非零收敛半径的幂级数形式。Signorini[10] 与 Stoppeli[11,12]则讨论了在适当可微条件下级数解答结果的存在性和唯一性。Stoppeli 还证明了位移能够按某些参数展开为具有非零收敛半径的绝对收敛的幂级数，并提供了足够小的参数和经典线弹性方程的充分光滑解答。

继 Rivlin 文[1]，我们研究可压缩弹性半空间在非均匀分布法向荷载下的二阶效应问题。Rivlin 用近似方法导出了考虑体力时线弹性问题的二阶解答。我们参照 Sneddon

* 中国有色金属工业总公司重点科研项目基金资助课题

文[13]中关于一般线性与二阶问题的解答，采用积分变换方法进行求解。作为特例，导出了按Hertz 规律加载下的解答和不可压缩材料的相应解。最后还给出了上述解答在z方向的位移和法向应力的数值结果。

二、基 本 方 程

设弹性体在单位体积质量所受体力X_i以及在变形前材料单位面积上所受面力X_{vi}作用下发生变形，则平衡方程与边界条件为

$$\frac{\partial\tau}{\partial H_{kj}}\frac{\partial t_{ik}}{\partial x_j}+\rho_0X_i=0 \tag{2.1}$$

$$X_{vi}=\frac{\partial\tau}{\partial H_{ks}}l_st_{ik} \tag{2.2}$$

式中t_{ik}为柯西应力，u_i为位移分量，x_k是变形前弹性体内某点的坐标分量，l_s是变形前弹性体表面法向的方向余弦，且

$$H_{ik}=\frac{\partial u_i}{\partial x_k},\quad \tau=\det\left(\delta_{ik}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\qquad(i,k=1,2,3)$$

对于可压缩各向同性材料，应变能函数W的形式为

$$W=a_1J_2+a_2J_2^2+a_3J_1J_2+a_4J_1^3+a_5J_3 \tag{2.3}$$

式中 $a_1,\cdots,a_5$ 为材料常数，J_1，J_2，J_3 分别是关于应变分量的 1，2，3 次应变不变量。Rivlin[1]证明了方程(2.1)和(2.2)，略去高阶项，得关于位移分量空间导数的二阶方程分别为：

$$\left[(1+\Delta)\delta_{sk}-\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right]\frac{\partial t'_{ik}}{\partial x_s}+\frac{\partial t''_{ik}}{\partial x_k}+\rho_0X_i=0 \tag{2.4}$$

且

$$X_{vi}=\left[(1+\Delta)\delta_{sk}-\frac{\partial u_s}{\partial x_k}\right]l_st'_{ik}+l_kt''_{ik} \tag{2.5}$$

式中

$$t_{ik}=t'_{ik}+t''_{ik} \tag{2.6}$$

且

$$t'_{ik}=2[-a_1e_{ik}+2(a_1+2a_2)\Delta\delta_{ik}]$$

$$t''_{ik}=2[\{(4a_2-2a_3+a_1)\Delta e_{ik}-a_1\alpha_{ik}-(a_1-a_5)E_{ik}\}+\{(a_1+2a_2)\alpha+(a_1+a_3)E+2(6a_4+3a_3-a_1-2a_2)\Delta^2\}\delta_{ik}]$$

式(2.3)中，应变不变量J_i与通常的右柯西格林应变张量C的不变量I_i的关系为

$$J_1=I_1-3,\quad J_2=I_2-2I_1+3,\quad J_3=I_3-I_2+I_1-1$$

且常数a_1，a_2由经典弹性理论确定为：

$$\lambda=4(a_1+2a_2),\quad \mu=-2a_1 \tag{2.7}$$

式中λ和μ为 Lame 常数，另外三个常数a_3，a_4与a_5称为二阶弹性常数。

令

$$u_i=v_i+w_i \tag{2.8}$$

并定义

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{ik}=2[-a_1e'_{ik}+2(a_1+2a_2)\Delta'\delta_{ik}]\\&e'_{ik}=\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i},\quad \Delta'=\frac{1}{2}e'_{ss}\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

且

$$\left.\begin{aligned}&\tau''_{ik}=2[-a_1e''_{ik}+2(a_1+2a_2)\Delta''\delta_{ik}]\\&e''_{ik}=\frac{\partial w_i}{\partial x_k}+\frac{\partial w_k}{\partial x_i},\quad \Delta''=\frac{1}{2}e''_{ik}\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

由上所述，解答一个二阶弹性边值问题，必须：

（Ⅰ） 求解下式表达的线弹性问题：

$$\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_k}+\rho_0X_i=0\tag{2.11}$$

受面力为

$$X_{vi}=l_k\tau_{ik}\tag{2.12}$$

（Ⅱ） 获得由下式给出的二阶弹性问题解

$$\frac{\partial\tau''_{ik}}{\partial x_k}+\rho_0X'_i=0\tag{2.13}$$

且

$$X'_{vi}=l_k\tau''_{ik}\tag{2.14}$$

式中

$$X'_{vi}=-\left[\Delta'\delta_{ik}-\frac{\partial v_s}{\partial x_k}\right]l_s\tau_{ik}-l_k\tau'_{ik}\tag{2.15}$$

$$\rho_0X'_i=\left(\Delta'\delta_{ik}-\frac{\partial v_s}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_s}+\frac{\partial\tau'_{ik}}{\partial x_k}\tag{2.16}$$

式中

$$\begin{aligned}\tau'_{ik}=2[&\{(4a_2-2a_3+a_1)\Delta'e'_{ik}-a_1\alpha'_{ik}-(a_1-a_6)E'_{ik}\}\\&+\{(a_1+2a_2)\alpha'+(a_1+a_3)E'+2(6a_4+2a_3-a_1-2a_2)\Delta'^2\}\delta_{ik}]\end{aligned}\tag{2.17}$$

式中 $\alpha'_{ik}=(\partial v_k/\partial x_s)(\partial v_k/\partial x_s)$，$\alpha'=\alpha'_{ss}$，$E'=E'_{ss}$，且$E'_{ik}$为 $\det e'_{ik}$中e'_{ik}的余因子。

三、圆形分布的非均匀荷载

我们考察一个可压缩的弹性半空间，其表面半径为a的圆内，承受总量为 P 的非均匀法向荷载。选柱坐标$(r,\ \theta,\ z)$，使荷载作用于z方向，$z=0$平面内，边值条件为

$$X_{vr}=0,\quad X_{vz}=-2\mu f(r)\tag{3.1}$$

式中

$$f(r)=\frac{(1+\delta)(a^2-r^2)^\delta H(a-r)P}{2\pi\mu a^{2(1+\delta)}}\tag{3.2}$$

且$\delta>-1$，为常量，X_{iv}为面力分量，H为 Heaviside 单位函数，设无体力。由 Rivlin方法，问题能分解为如下两个子问题：

（Ⅰ） 线性解：

$$\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta}}{r}=0,\quad \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0\tag{3.3}$$

受面力

$$\tau_{rz}(r,0)=0,\quad \tau_{zz}(r,0)=-\frac{(1+\delta)(a^2-r^2)^{\delta}H(a-r)P}{\pi a^{2(1+\delta)}} \tag{3.4}$$

（Ⅱ） 二阶解：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\tau''_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\tau''_{rz}}{\partial z}+\frac{\tau''_{rr}-\tau''_{\theta\theta}}{r}+\rho_0X'_r=0\\&\frac{\partial\tau''_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\tau''_{zz}}{\partial z}+\frac{\tau''_{rz}}{r}+\rho_0X'_z=0\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

受面力

$$\tau''_{rz}(r,0)=-X'_{vr},\quad \tau''_{zz}(r,0)=-X'_{vz} \tag{3.6}$$

式中[14]

$$\left.\begin{aligned}\rho_0X'_r=&-\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial z}+\frac{v_r}{r^2}(\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta})\right.\\&\left.+\frac{\partial v_r}{\partial z}\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}\right]+\frac{\tau'_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\tau'_{rz}}{\partial z}+\frac{\tau'_{rr}-\tau'_{\theta\theta}}{r}\\\rho_0X'_z=&-\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{v_r\tau_{rz}}{r^2}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right]\\&+\frac{\partial\tau'_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\tau'_{zz}}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&X'_{vr}=-\frac{\partial v_z(r,0)}{\partial r}\tau_{rr}(r,0)+\tau'_{rz}(r,0)\\&X'_{vz}=\left[\frac{\partial v_r(r,0)}{\partial r}+\frac{v_r(r,0)}{r}\right]\tau_{zz}(r,0)+\tau'_{zz}(r,0)\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

且

$$\left.\begin{aligned}&\tau'_{rr}=2[(4a_2-2a_3+a_1)\Delta'e'_{rr}-a_1\alpha'_{rr}-(a_1-a_5)E'_{rr}+\Sigma]\\&\tau'_{\theta\theta}=2[(4a_2-2a_3+a_1)\Delta'e'_{\theta\theta}-a_1\alpha'_{\theta\theta}-(a_1-a_5)E'_{\theta\theta}+\Sigma]\\&\tau'_{zz}=2[(4a_2-2a_3+a_1)\Delta'e'_{zz}-a_1\alpha'_{zz}-(a_1-a_5)E'_{zz}+\Sigma]\\&\tau'_{rz}=2[(4a_2-2a_3+a_1)\Delta'e'_{rz}-a_1\alpha'_{rz}-(a_1-a_5)E'_{rz}]\\&\Sigma=(a_1+2a_2)\alpha'+(a_1+a_3)E'+2(6a_4+2a_3-2a_2-a_1)\Delta'^2\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

1. 线性解答

线性解，需解答子问题（Ⅰ）。我们采用 Papkovitch-Neuber 位移解

$$v_i=\frac{\partial(\Phi+x_j\psi_j)}{\partial x_i}-4(1-\eta)\psi_i \tag{3.10}$$

且

$$\Phi=(1-2\eta)\phi(r,z),\quad \psi_1=\psi_2=0,\quad \psi_3=\frac{\partial\phi(r,z)}{\partial z} \tag{3.11}$$

式中ϕ满足

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{3.12}$$

且

$$\eta=\frac{a_1+2a_2}{a_1+4a_2}$$

在柱坐标中，位移和应力分量表示为

$$\left.\begin{aligned}&v_r(r,z)=(1-2\eta)\frac{\partial\phi}{\partial r}+z\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}\\&v_\theta(r,z)=0\\&v_z(r,z)=-2(1-\eta)\frac{\partial\phi}{\partial z}+z\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\end{aligned}\right\}\tag{3.13}$$

且

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{rz}=2\mu z\frac{\partial^3\phi}{\partial z\partial z^2},\quad \tau_{zz}=-2\mu\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-z\frac{\partial^3\phi}{\partial z^3}\right]\\&\tau_{r\theta}=\tau_{z\theta}=0\\&\tau_{rr}=2\mu\left[(1-2\eta)\frac{\partial^2}{\partial r^2}+z\frac{\partial^3\phi}{\partial r^2\partial z}\right]-4\mu\eta\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\\&\tau_{\theta\theta}=2\mu\left[\frac{1-2\eta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{z}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}\right]-4\mu\eta\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\end{aligned}\right\}\tag{3.14}$$

若令

$$\bar{\phi}=\int_0^\infty rJ_0(\xi r)\phi(r,z)dr\tag{3.15}$$

式(3.12)简化为

$$\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial z^2}-\xi^2\bar{\phi}=0\tag{3.16}$$

满足式(3.16)的解是$\bar{\phi}=Ae^{-\xi z}$，式中A为ξ的任意函数，使用边界条件(3.4)，我们得到

$$A(\xi)=\frac{QJ_{(1+\delta)}(a\xi)}{\xi^{3+\delta}}\tag{3.17}$$

式中

$$Q=\frac{(1+\delta)\Gamma(1+\delta)P}{2^{1-\delta}\pi\mu a^{(1+\delta)}}\tag{3.18}$$

使用式(3.15)，并进行如下 Hankel 变换$H_1[v_r]$，$H_0[v_z]$，$H_0[\tau_{zz}]$，$H_1[\tau_{rz}]$，$H_0[\tau_{rr}+\tau_{\theta\theta}]$，$H_0[v_r+\tau_{rr}/2\mu]$，然后反演变换，得

$$\left.\begin{aligned}&v_r(r,z)=Q[zK(r,z,-\delta)-(1-2\eta)K(r,z,-(1+\delta))]\\&v_z(r,z)=Q[2(1-\eta)I(r,z,-(1+\delta))+zI(r,z,-\delta)]\\&\tau_{rr}(r,z)=-2\mu Q[I(r,z,-\delta)-zI(r,z,(1-\delta))]\\&\qquad+\frac{2\mu Q}{r}[(1-2\eta)K(r,z,-(1+\delta))-zK(r,z,-\delta)]\\&\tau_{\theta\theta}(r,z)=-4\mu\eta QI(r,z,-\delta)\\&\qquad-\frac{2\mu Q}{r}[(1-2\eta)K(r,z,-(1+\delta))-zK(r,z,-\delta)]\\&\tau_{rz}(r,z)=-2\mu QzK(r,z,(1-\delta))\\&\tau_{zz}(r,z)=-2\mu Q[I(r,z,-\delta)+zI(r,z,(1-\delta))]\end{aligned}\right\}\tag{3.19}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} I(r,z,s)&=\int_0^\infty \xi^s J_0(\xi r)J_{(1+\delta)}(\xi a)e^{-\xi z}d\xi \\ K(r,z,s)&=\int_0^\infty \xi^s J_1(\xi r)J_{(1+\delta)}(\xi a)e^{-\xi z}d\xi \end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

式(3.19)和(3.20)给出了线弹性问题的非零位移和应力分量．然而在许多情形下，我们最感兴趣的是半空间表面的位移和应力值．这里给出在$z=0$的表面解，由文[15]，我们有：

当$r\leqslant a$

$$I(r,0,s)=\frac{2^s\Gamma((2+\delta+s)/2)}{\Gamma((2+\delta-s)/2)a^{s+1}}F_1\left(\frac{2+\delta+s}{2},\ \frac{s-\delta}{2},1,\ \frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$K(r,0,s)=\frac{2^s r\Gamma((3+\delta+s)/2)}{\Gamma((1+\delta-s)/2)a^{2+s}}F_1\left(\frac{3+\delta+s}{2},\ \frac{1-\delta+s}{2},2,\ \frac{r^2}{a^2}\right)$$

当$r>a$

$$I(r,0,s)=\frac{2^s\Gamma((2+\delta+s)/2)a^{1+\delta}}{\Gamma((\delta-s)/2)\Gamma(2+\delta)r^{2+\delta+s}}F_1\left(\frac{2+\delta+s}{2},\ \frac{2+\delta+s}{2},2+\delta,\frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$K(r,0,s)=\frac{2^s\Gamma((3+\delta+s)/2)a^{1+\delta}}{\Gamma((1-\delta-s)/2)\Gamma(2+\delta)r^{2+\delta+s}}F_1\left(\frac{3+\delta+s}{2},\ \frac{1+\delta+s}{2},2+\delta,\frac{a^2}{r^2}\right)$$

式中F_1是超几何函数，表面解的几个典型分量如下：

$$v_r(r,0)=-(1-2\eta)QK(r,0-(1+\delta))$$

$$v_z(r,0)=2(1-\eta)QI(r,0,-(1+\delta))$$

$$\tau_{rz}(r,0)=0$$

$$\tau_{zz}(r,0)=-2\mu QI(r,0,-\delta)$$

$$\tau_{rr}(r,0)=-2\mu QI(r,0,-\delta)+\frac{2\mu(1-2\eta)}{r}QK(r,0,-(1+\delta))$$

$$\tau_{\theta\theta}(r,0)=-4\mu\eta QI(r,0,-\delta)-\frac{2\mu(1-2\eta)}{r}QK(r,0,-(1+\delta))$$

2. 二阶解答

为了求解二阶问题，我们注意到，这里求解的边值问题就是子问题(Ⅱ)，再次使用如下形式的 Papkovitch-Neuber 解

$$\Phi=\phi(r,z),\ \ \psi_1=\psi_2=0,\ \ \psi_3=\psi(r,z)$$

于是位移和应力分量给出如下：

$$\left.\begin{aligned} w_r(r,z)&=\frac{\partial\phi}{\partial r}+z\frac{\partial\psi}{\partial r} \\ w_\theta(r,z)&=0 \\ w_z(r,z)&=\frac{\partial\phi}{\partial z}+z\frac{\partial\psi}{\partial z}-(3-4\eta)\psi \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

且

$$\left.\begin{aligned}
\tau''_{rz}(r,z)&=2\mu\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial z}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}-(1-2\eta)\frac{\partial\psi}{\partial r}\right]\\
\tau''_{zz}(r,z)&=2\mu\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-z(1-\eta)\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\eta}{(1-2\eta)}(\nabla^2\phi+z\nabla^2\psi)\right]\\
\tau''_{rr}(r,z)&=2\mu\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+z\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-2\eta\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\eta}{(1-2\eta)}(\nabla^2\phi+\nabla^2\psi)\right]\\
\tau''_{\theta\theta}(r,z)&=2\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{z}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}-2\eta\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{\eta}{(1-2\eta)}(\nabla^2\phi+\nabla^2\psi)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{3.22}$$

将式(3.22)代入(3.3)，得

$$\nabla^2\phi=\phi_0,\quad \nabla^2\psi=\psi_0\tag{3.23a,b}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
\phi_0&=\frac{\rho_0}{4\eta(1-\eta)}\left[z\frac{\partial}{\partial z}\int_r^\infty X'_r(x,z)dx+2(1-2\eta)\int_r^\infty X'_r(x,z)dx-zX'_z(r,z)\right]\\
\psi_0&=\frac{\rho_0}{4\eta(1-\eta)}\left[X'_z(r,z)-\frac{\partial}{\partial z}\int_r^\infty X'_r(r,z)dx\right]
\end{aligned}\right\}\tag{3.24}$$

再注意到$\bar{\phi}$和$\bar{\psi}$为

$$\bar{\phi}=\int_0^\infty rJ_0(\xi r)\phi(r,z)dr,\quad \bar{\phi}_0=\int_0^\infty rJ_0(\xi r)\phi_0(r,z)dr$$

于是由(3.23a)得

$$\bar{\phi}=Ce^{-\xi z}+e^{-\xi z}\int_0^z\exp[2\xi z_2]\int_0^{z_2}\bar{\phi}_0(\xi,z_1)\exp[-\xi z_1]dz_1dz_2$$

式中C是ξ的任意函数，于是

$$\phi=\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)(C+\phi_0^*)e^{-\xi z}d\xi\tag{3.25}$$

式中

$$\phi_0^*(\xi,z)=\int_0^z\exp[2\xi z_2]\int_0^{z_2}\bar{\phi}_0(\xi,z_1)\exp[-\xi z_1]dz_1dz_2$$

类似地导出(3.23b)的解为

$$\psi=\int_0^\infty \xi J_0(\xi,r)(D+\psi_0^*)e^{-\xi z}d\xi\tag{3.26}$$

式中

$$\psi_0^*(\xi,z)=\int_0^z\exp[2\xi z_2]\int_0^{z_2}\psi_0(\xi,z)\exp[-\xi z_1]dz_1dz_2$$

且D是ξ的任意函数，将式(3.25)、(3.26)代入(3.22)，得

$$\tau''_{rz}(r,0)=2\mu\int_0^\infty \xi J_1(\xi r)[C\xi^2+(1-2\eta)D\xi]d\xi$$

$$\tau''_{zz}(r,0)=2\mu\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)[C\xi^2+2(1-\eta)D\xi]d\xi+\frac{2\mu(1-\eta)}{(1-2\eta)}\phi_0(r,0)$$

使用边界条件式(3.6)，得

$$\left.\begin{aligned} C&=\frac{1}{2\mu\xi^2}[(1-2\eta)h_1(\xi)-2(1-\eta)h_2(\xi)] \\ D&=\frac{1}{2\mu\xi}[h_2(\xi)-h_1(\xi)] \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} h_1(\xi)&=\int_0^\infty rJ_0(\xi r)[X'_{vz}(r,\ 0)+\int_0^\infty \rho_0 X'_r(x,\ 0)dx]dr \\ h_2(\xi)&=\int_0^\infty rJ_1(\xi r)X'_{vr}(r,\ 0)dr \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

于是上述二阶问题的位移和应力场给出如下

$$\left.\begin{aligned} w_r(r,\ z)&=-\int_0^\infty \xi^2 J_1(\xi r)[C+Dz+\xi\phi_0^*+\xi z\psi_0^*]e^{-\xi z}d\xi \\ w_z(r,\ z)&=\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\left\{\int_0^z[\bar{\phi}_0(\xi,\ z_1)+z\psi_0(\xi,\ z_1)]\exp[-\xi z_1]dz_1\right\}e^{\xi z}d\xi \\ &\quad-\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)[C\xi+(3-4\eta)D+Dz\xi+\xi\phi_0^* \\ &\quad+(3-4\eta+z\xi)\psi_0^*]e^{-\xi z}dz \end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

且

$$\left.\begin{aligned} \tau''_{rz}(r,\ z)&=2\mu\int_0^\infty \xi^2 J_1(\xi r)[(1-2\eta)D+C\xi+Dz\xi+\xi\phi_0^* \\ &\quad+(1-2\eta+z\xi)\psi_0^*]e^{-\xi z}d\xi-2\mu\int_0^\infty \xi^2 J_1(\xi r)\left\{\int_0^z[\bar{\phi}_0^*(\xi,\ z_1)\right. \\ &\quad\left.+z\psi_0(\xi,\ z_1)]\exp[-\xi z_1]dz_1\right\}e^{\xi z}d\xi \\ \tau''_{zz}(r,\ z)&=\frac{2\mu(1-\eta)[\phi_0(r,\ z)+z\psi_0(r,\ z)]}{(1-2\eta)} \\ &\quad+2\mu\int_0^\infty \xi^2 J_0(\xi r)[2(1-\eta)D+C\xi+Dz\xi+\xi\phi_0^* \\ &\quad+(2-2\eta+\xi z)\psi_0^*]e^{-\xi z}d\xi \\ &\quad-4\mu(1-\eta)\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\left[\int_0^z \bar{\psi}_0(\xi,\ z_1)\exp[-\xi z_1]dz_1\right]e^{\xi z}d\xi \\ \tau''_{rr}(r,z)&=\frac{2\mu\eta}{(1-2\eta)}[\phi_0(r,\ z)+z\psi_0(r,\ z)] \\ &\quad+\frac{2\mu}{r}\int_0^\infty \xi^2 J_1(\xi r)[C+Dz+\phi_0^*+z\psi_0^*]e^{-\xi z}d\xi \\ &\quad+2\mu\int_0^\infty \xi^2 J_0(\xi r)[2\eta D-C\xi-Dz\xi-\xi\phi_0^*+(2\eta-z\xi)\psi_0^*]e^{-\xi z}d\xi \\ &\quad-4\mu\eta\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\left[\int_0^z \bar{\psi}_0(\xi,\ z_1)\exp[-\xi z_1]dz_1\right]e^{\xi z}d\xi \\ \tau''_{\theta\theta}(r,\ z)&=\frac{2\mu\eta}{(1-2\eta)}[\phi_0(r,\ z)+z\psi_0(r,\ z)] \end{aligned}\right\} \tag{3.30}$$

$$-\frac{2\mu}{r}\int_0^\infty \xi^2 J_1(\xi r)[C+Dz+\phi_0^*+z\psi_0^*]e^{-\xi z}d\xi$$
$$+4\mu\eta\int_0^\infty \xi^2 J_0(\xi r)[D\xi+\xi\psi_0^*]e^{-\xi z}d\xi$$
$$-4\mu\eta\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\left[\int_0^z \vec{p}_0(\xi,\ z_1)\exp[-\xi z_1]dz_1\right]e^{\xi z}d\xi$$

τ'_{zz}，τ'_{rz}的表达式可写为

$$\begin{aligned}\frac{\tau'_{zz}(r,\ z)}{2Q^2}=&4(1-2\eta)(4a_2-2a_3+a_1)I(r,\ z,\ -\delta)[(1-2\eta)I(r,\ z,\ 1-\delta)\\&+zI(r,\ z,\ -\delta)]-4(a_1-a_5)\left[\frac{z}{r}K(r,\ z,\ -\delta)\right.\\&\left.-\frac{(1-2\eta)}{r}K(r,\ z,\ -(1+\delta))\right]\left[zI(r,\ z,\ 1-\delta)\right.\\&-\frac{z}{r}K(r,\ z,\ -\delta)-(1-2\eta)I(r,\ z,\ -\delta)+\frac{(1-2\eta)}{r}K(r,\ z,\\&\left.-(1+\delta))\right]-a_1[2(1-\eta)K(r,\ z,\ -\delta)+zK(r,\ z,\ 1-\delta)]^2\\&-a_1[I(r,\ z,\ -\delta)+zI(r,\ z,\ 1-\delta)]^2+\frac{\Sigma}{Q^2}\end{aligned}\tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau'_{rz}(r,\ z)}{2Q^2}=&4(1-2\eta)z(4a_2-2a_3+a_1)I(r,\ z,\ -\delta)K(r,\ z,\ 1-\delta)\\&+2a_1(1-\eta)K(r,\ z,\ -\delta)\left[2zI(r,\ z,1-\delta)-\frac{z}{r}K(r,\ z,\ -\delta)\right.\\&\left.+\frac{(1-2\eta)}{r}K(r,\ z,\ -(1+\delta))\right]+a_1zK(r,\ z,\ -\delta)\\&\cdot\left[-\frac{z}{r}K(r,\ z,\ -\delta)-2(1-2\eta)I(r,\ z,\ -\delta)\right.\\&\left.+\frac{(1-2\eta)}{r}K(r,z,-(1-\delta))\right]-4(a_1-a_5)zK(r,\ z,\ 1-\delta)\\&\cdot\left[\frac{z}{r}K(r,\ z,\ -\delta)-\frac{(1-2\eta)}{r}K(r,\ z,\ -(1+\delta))\right]\end{aligned}\tag{3.32}$$

$\tau'_{\theta\theta}$与τ'_{rr}具有与上相类似的表达式，且式中

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma}{Q^2}=&(a_1+2a_2)\left\{\left[zI(r,\ z,\ 1-\delta)-\frac{z}{r}K(r,\ z,\ -\delta)-(1-2\eta)I(r,\ z,\ -\delta)\right.\right.\\&\left.+\frac{(1-2\eta)}{r}K(r,\ z,\ -(1+\delta))\right]^2+[-zK(r,\ z,\ 1-\delta)\\&+2(1-\eta)K(r,\ z,\ -\delta)]^2+\left[\frac{z}{r}K(r,\ z,\ -\delta)\right.\\&\left.-\frac{(1-2\eta)}{r}K(r,\ z,\ -(1+\delta))\right]^2+[zI(r,\ z,\ 1-\delta)\\&\left.+(1-2\eta)I(r,\ z,\ -\delta)]^2+[zK(r,\ z,\ 1-\delta)+2(1-\eta)K(r,\ z,\ -\delta)]^2\right\}\end{aligned}$$

$$+(a_1+a_3)\Big\{-4[(1-2\eta)I(r,\ z,\ -\delta)$$
$$+zI(r,\ z,\ 1-\delta)][zI(r,\ z,\ 1-\delta)$$
$$-(1-2\eta)I(r,\ z,\ -\delta)]-4z^2K^2(r,\ z,\ 1-\delta)$$
$$+4\Big[\frac{z}{r}K(r,\ z,\ -\delta)-\frac{(1-2\eta)}{r}K(r,\ z,\ -(1+\delta))\Big]\Big[zI(r,\ z,\ 1-\delta)$$
$$-\frac{z}{r}K(r,\ z,\ -\delta)-(1-2\eta)I(r,\ z,\ -\delta)+\frac{(1-2\eta)}{r}K(r,\ z,$$
$$-(1+\delta))\Big]\Big\}+8(1-2\eta)^2(6a_4+2a_3-a_1-2a_2)I^2(r,\ z,\ -\delta) \tag{3.33}$$

式(3.29)、(3.30)、(3.19)和(3.20)与τ'_{ij}的表达式构成了这个二阶问题的解。在$z=0$的表面，这些解答可以表示为

$$w_r(r,\ 0)=-\frac{1}{2\mu}\Big[(1-2\eta)\int_0^\infty xX'_{vz}(x,\ 0)dx+\int_0^\infty \rho_0X'_r(y,\ 0)dyK_1(x)dx$$
$$-2(1-\eta)\int_0^\infty xX'_{vr}(x,\ 0)K_3(x)dx\Big]$$

$$w_z(r,\ 0)=-\frac{1}{2\mu}\Big[(1-2\eta)\int_0^\infty xX'_{vr}(x,\ 0)K_2(x)dx$$
$$-2(1-\eta)\int_0^\infty xX'_{vz}(x,\ 0)dx+\int_0^\infty \rho_0X'_r(y,\ 0)dyK_4(x)dx\Big]$$

$$\tau''_{rz}(r,\ 0)=-X'_{vr}(r,\ 0)=-\Big[c_6I(r,\ 0,\ -\delta)K(r,\ 0,\ -\delta)$$
$$+\frac{c_7}{r}K(r,\ 0,\ -\delta)K(r,\ 0,\ -(1+\delta))\Big]$$

$$\tau''_{zz}(r,\ 0)=-X'_{vz}(r,0)=-\Big[c_8I^2(r,\ 0,\ -\delta)-\frac{c_9}{r}I(r,\ 0,\ -\delta)K(r,\ 0,$$
$$+(1+\delta))+\frac{c_9}{r^2}K^2(r,\ 0,\ -(1+\delta))+c_{10}K^2(r,\ 0,\ -\delta)\Big]$$

$$\tau'_{rz}(r,\ 0)=\frac{4(1-\eta)(1-2\eta)a_1Q^2}{r}K(r,\ 0,\ -\delta)K(r,\ 0,\ -(1+\delta))$$

$$\tau'_{zz}(r,\ 0)=2(1-2\eta)^2Q^2\Big\{(a_1+4a_2+12a_3+48a_4)I^2(r,\ 0,\ -\delta)$$
$$-\frac{a_1+2a_2-2a_3-2a_5}{r}I(r,\ 0,\ -\delta)K(r,\ 0,\ -(1+\delta))$$
$$+\frac{a_1+2a_2-2a_3-2a_5}{r^2}K^2(r,\ 0,\ -(1+\delta))\Big\}$$
$$+8(1-\eta)^2(a_1-4a_2)Q^2K^2(r,\ 0,\ -\delta)$$

τ'_{rr}与$\tau'_{\theta\theta}$也有类似的表达式，且式中

$$\rho_0X'_r(r,\ 0)=\frac{c_1}{r}\Big[I(r,\ 0,\ -\delta)-\frac{2}{r}K(r,\ 0,\ -(1+\delta))\Big]^2$$
$$+\frac{c_2}{r}K(r,\ 0,\ 1-\delta)K(r,\ 0,\ -(1+\delta))$$

$$+c_3 I(r,\ 0,\ -\delta)K(r,\ 0,\ 1-\delta)$$

$$+c_4 I(r,\ 0,\ 1-\delta)K(r,\ 0,\ -\delta)+\frac{c_5}{r}K^2(r,\ 0,\ -\delta)$$

其中c_{ij}为常数，且在附录Ⅰ中列出，Kernel函数给出如下．

$$K_1(x)=\begin{cases}1/r, & x<r\\ 0, & x>r\end{cases}$$

$$K_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi x}\left[F\left(\dfrac{x}{r}\right)\cdot E\left(\dfrac{x}{r}\right)\right], & x<r\\[2ex] \dfrac{1}{\pi r}\left[F\left(\dfrac{r}{x}\right)-E\left(\dfrac{r}{x}\right)\right], & x>r\end{cases}$$

$$K_3(x)=\begin{cases}0, & x<r\\ 1/x, & x>r\end{cases}$$

$$K_4(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r}F\left(\dfrac{x}{r}\right), & x<r\\[2ex] \dfrac{2}{\pi x}F\left(\dfrac{r}{x}\right), & x>r\end{cases}$$

这里

$$F(x)=\int_0^{\pi/2}(1-x^2\sin^2\tau)^{-1/2}d\tau \text{且} E(x)=\int_0^{\pi/2}(1-x^2\sin^2\tau)^{1/2}d\tau$$

分别为第一、二类完全椭圆积分．

四、实　　例

现在我们用上述方法，求解在圆形域内按Hertz规律加载下的位移和应力场．在上述诸公式中令$\delta=1/2$便得此解．关于δ取不同值的某些解答，在Guo文[16]中进行了叙述．

令$\delta=1/2$，在$z=0$的表面，线性解答如下（参见Sneddon[17]）

当$r\leqslant a$

$$\left.\begin{aligned}
&v_r(r,\ 0)=-\frac{(1-2\eta)P}{4\pi\mu}\frac{[1-(1-r^2/a^2)^{3/2}]}{r}\\
&v_z(r,\ 0)=\frac{3(1-\eta)P}{8\mu a}\left[1-\frac{r^2}{2a^2}\right]\\
&\tau_{rz}(r,\ 0)=0\\
&\tau_{zz}(r,0)=-\frac{3P\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi a^3}\\
&\tau_{rr}(r,\ 0)=-\frac{3P\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi a^3}+\frac{(1-2\eta)P}{2\pi r^2}\left[1-\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{3/2}\right]\\
&\tau_{\theta\theta}(r,0)=-\frac{3\eta P\sqrt{a^2-r^2}}{\pi a^3}-\frac{(1-2\eta)P}{2\pi r^2}\left[1-\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}\right\}\tag{4.1a}$$

当$r>a$

$$
\left.\begin{aligned}
&v_r(r,\ 0)=-\frac{(1-2\eta)P}{4\pi\mu r}\\
&v_z(r,\ 0)=\frac{3(1-\eta)P}{8\pi\mu a}\left[\left(2-\frac{r^2}{a^2}\right)\arcsin\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{1}{a}\sqrt{r^2-a^2}\right]\\
&\tau_{rz}(r,\ 0)=0,\ \tau_{zz}(r,\ 0)=0\\
&\tau_{rr}(r,\ 0)=\frac{(1-2\eta)P}{2\pi r^2},\ \tau_{\theta\theta}(r,0)=-\frac{(1-2\eta)P}{2\pi r^2}
\end{aligned}\right\}\tag{4.1b}
$$

为了得到二阶解，首先导出τ'_{ij}的表达式如下：

当$r\leqslant a$

$$
\left.\begin{aligned}
&\tau'_{rz}(r,0)=\frac{2(1-\eta)(1-2\eta)a_1}{3r}Q^2\left[1-\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\\
&\tau'_{zz}(r,\ 0)=2(1-2\eta)^2Q^2\left\{\frac{2(a_1+4a_2+12a_3+48a_4)}{\pi a^3}(a^2-r^2)\right.\\
&\qquad-\frac{2(a_1+2a_2+2a_3+2a_6)}{3\pi r^2}a\left[\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^2\right]\\
&\qquad\left.+\frac{2(a_1+2a_2+2a_3+2a_6)}{9\pi r^4}\left[1-\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2\right\}\\
&\qquad+\frac{(1-\eta)^2(a_1+4a_2)}{a^3}Q^2r^2
\end{aligned}\right\}\tag{4.2}
$$

τ'_{rr}，$\tau'_{\theta\theta}$具有类似表达式，并且

当$r>a$

$$
\left.\begin{aligned}
&\tau'_{rz}(r,0)=\frac{4(1-\eta)(1-2\eta)a_1aQ^2}{3\pi r^2}\left[\frac{r}{a}\arcsin\left(\frac{a}{r}\right)-\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\tau'_{zz}(r,0)=\frac{4(1-2\eta)^2(a_1+2a_2-2a_3-2a_5)}{9\pi r^4}a^3Q^2\\
&\qquad+\frac{4(1-\eta)^2(a_1+4a_2)Q^2}{\pi a}\left[\frac{r}{a}\arcsin\left(\frac{a}{r}\right)-\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2
\end{aligned}\right\}\tag{4.3}
$$

$\tau'_{rr}(r,\ 0)$，$\tau_{\theta\theta}(r,\ 0)$具有类似表达式，式中$Q=3P/(4\sqrt{2\pi}\,\mu a^{3/2})$。

于是二阶弹性问题的解成为

当$r\leqslant a$

$$
\begin{aligned}
w_r(r,\ 0)=&-\frac{1-2\eta}{2\mu}\left\{\left(c_{12}+\frac{4-\pi^2}{2}c_{11}\right)\frac{r}{a}+\left(c_{13}+\frac{c_{14}}{4}\right)\frac{r^3}{a^3}\right.\\
&+\frac{c_1+c_2}{3\pi\mu a}\left[r^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2-r^2}}{a}+a^2-a\sqrt{a^2-r^2}\right]\\
&\left.-\frac{2(c_1+c_9)}{9\pi r}\left[\frac{a^3-(a^2-r^2)^{3/2}}{a^2}+\frac{a^3}{r^2}-\frac{(a^2-r^2)^{5/2}}{a^2r^2}-\frac{5a}{2}\right]\right\}\\
&+\frac{1-\eta}{\mu}\left\{\frac{c_6I_3(r)}{2\pi a^3}-\frac{c_7I_4(r)}{6\pi a^3}+\frac{c_8ar^2I_5(r)}{2\pi}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&+\frac{c_7 a I_6(r)}{6\pi}+\frac{c_7 a I_7(r)}{3\pi r^2}\Big\}\\
w_z(r,\ 0)=&\frac{1-2\eta}{2\mu}\Big\{\frac{(4I_1+\pi)c_7}{12\pi}+\frac{3c_6+c_7}{18}\,\frac{(a^2-r^2)^{3/2}}{a^3}\\
&+\frac{c_7}{6}\left[\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a}+\ln\frac{a}{a+\sqrt{a^2-r^2}}\right]\Big\}\\
&+\frac{1-\eta}{\mu}\Big\{\frac{2(c_{15}+4c_{11}-\pi^2c_{11})}{\pi}\,E\left(\frac{r}{a}\right)+\frac{7(c_{14}+c_{16})}{3\pi}\,\frac{r^3}{a^3}\\
&+\frac{4(3c_1-c_9)}{9\pi^2 r}[I_9(r)+I_{12}(r)]+\frac{4(c_1+c_2)}{3\pi^2}\left[\frac{I_{10}(r)}{ar}\right.\\
&\left.+rI_{13}(r)\right]-\frac{8(9c_1+c_9)}{27\pi^2 r}[aI_{11}(r)+I_{14}(r)]\\
&+\frac{2(c_{14}+c_{16})}{9\pi a^2}\left[(a^2+4r^2)E\left(\frac{r}{a}\right)+2(a^2-r^2)F\left(\frac{r}{a}\right)\right]\\
&+\frac{4(c_1+c_9)I_{15}(r)}{9\pi^2 r^3}-\frac{8c_{14}rI_{16}(r)}{\pi^3}-\frac{8c_{11}rI_{17}(r)}{\pi}\Big\}\\
\tau''_{rz}(r,\ 0)=&\frac{c_6 r\sqrt{a^2-r^2}}{2a^3}+\frac{c_7[a^3-(a^2-r^2)^{3/2}]}{6a^3 r}\\
\tau''_{zz}(r,\ 0)=&-\frac{2c_8(a^2-r^2)}{\pi a^3}-\frac{2c_9}{9\pi}\,\frac{[a^3-(a^2-r^2)^{3/2}]^2}{a^3 r^4}\\
&+\frac{2c_9}{3\pi}\,\frac{a^3\sqrt{a^2-r^2}-(a^2-r^2)^2}{a^3r^2}-\frac{\pi c_{10}r^2}{8a^3}
\end{aligned}\right\}\qquad(4.4)
$$

$\tau''_{rr}(r,\ 0)$与$\tau''_{\theta\theta}(r,\ 0)$具有类似的表达式。

当$r>a$

$$
\left.\begin{aligned}
w_r(r,\ 0)=&-\frac{1-2\eta}{2\mu}\Big\{c_{10}\frac{a}{r}-\frac{c_1+c_9}{9\pi}\,\frac{a^3}{r^3}+\frac{c_{14}}{\pi^2}\left[\frac{r}{a}+\frac{r^3}{a^3}\arcsin^2\frac{a}{r}\right]\\
&+\frac{2c_{14}}{3\pi^2}\,\frac{r\sqrt{r^2-a^2}\,\mathrm{arc\,sin}(a/r)}{a^2}\\
&-\frac{8c_{14}}{3\pi^2}\,\frac{(r^2-a^2)^{3/2}\mathrm{arc\,sin}(a/r)}{a^2 r}+\frac{2c_{10}+4c_{14}+5c_6}{12\pi}\\
&\cdot\frac{\sqrt{r^2-a^2}\,\arcsin(a/r)}{r}-2c_{11}\frac{r}{a}\arcsin^2\frac{a}{r}\Big\}\\
&+\frac{1-\eta}{\mu}\Big\{\frac{c_6I_3(r)}{2\pi a^3}+\frac{c_7I_4(r)}{6\pi a^3}+\frac{ac_7I_8(r)}{3\pi^2}+\frac{ac_7I_7(r)}{3\pi r^2}\Big\}\\
w_z(r,\ 0)=&-\frac{(1-2\eta)ac_7}{6\pi\mu}\left[\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{2r^2}+\frac{\arcsin(a/r)}{2a}+I_2(r)\right]\\
&+\frac{1-\eta}{\mu}\Big\{\frac{2(c_{15}+4c_{11}-\pi^2c_{11})}{\pi ar}\left[r^2E\left(\frac{a}{r}\right)+(a^2-r^2)F\left(\frac{a}{r}\right)\right]\\
&+\frac{2(c_{14}+c_{16})}{9\pi ar^3}\left[(a^2+4r^2)(a^2-r^2)F\left(\frac{a}{r}\right)\right.
\end{aligned}\right\}\qquad(4.5)
$$

$$+(4r^4+a^2r^2)E\left(\frac{a}{r}\right)\Big]+\frac{4(3c_1-c_9)}{9\pi^2 r}I_9(a)+\frac{4(c_1+c_2)}{3\pi^2 ar}I_{10}(a)$$

$$-\frac{8(9c_1+c_9)a}{27\pi^2 r}I_{11}(a)+\frac{4(c_1+c_9)a^3}{9\pi^2 r}I_{18}(r)-\frac{8c_{14}}{\pi^3 ar}I_{19}(r)$$

$$-\frac{8c_{11}}{\pi ar}I_{20}(r)+\frac{4(c_1+c_9)}{9\pi^2 r^3}I_{15}(a)-\frac{8c_{14}r}{\pi^3}I_{16}(a)$$

$$-\frac{8c_{11}r}{\pi}I_{17}(a)\Big\}$$

$$\tau''_{rz}(r,0)=-\frac{c_7}{3\pi}\frac{r^2\arcsin(a/r)-a\sqrt{r^2-a^2}}{r^3}$$

$$\tau''_{zz}(r,0)=-\frac{2c_9a^3}{9\pi r^4}-\frac{c_{10}}{2\pi a}\left[\frac{r}{a}\arcsin\frac{a}{r}-\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\right]^2$$

$\tau''_{rr}(r,0)$，$\tau''_{\theta\theta}(r,0)$具有类似表达式，且式中$I_j$在附录 I 中列出，$c_{ij}$在附录 II 中列出。

我们注意到，与由式(4.1)给出的线性解答相比较，二阶理论中位移和应力的表达式非常复杂。特殊地，对于线弹性的简单抛物面形状，式(4.1a)变成由$(4.4)_2$给出的一种新形式。类似地，与线弹性理论，$(4.1a)_2$与$(4.1b)_2$，相比较，在二阶理论中，$z=0$处的变形边界形状又发生相当大的变化（参见$(4.4)_2$和$(4.5)_2$）。

五、不可压缩情形的简化

我们采用Rivlin[1]中引出的极限过程，获得不可压缩各向同性材料的结果。首先在保持(a_3-2a_2)有限条件下，令a_2和a_3趋于无穷大，且设

$$a_1=-(C_1+C_2),\quad a_5=-(C_1+2C_2)\tag{5.1}$$

则应变能函数取得 Mooney 的形式

$$W=C_1(I_1-3)+C_2(I_2-3)\tag{5.2}$$

式中C_1，C_2为常数，由上述极限过程，且令$\eta=1/2$，得到这种特殊情形的二阶解答，并简化为

当$r\leqslant a$

$$\left.\begin{aligned}u_r(r,0)&=-\frac{Q^2}{2\pi}\left[\frac{I_3(r)}{a^3}+ar^2I_5(r)\right]\\u_z(r,0)&=-\frac{3P}{32a_1a}\left[1-\frac{r^2}{2a^2}\right]-\frac{Q^2}{4}\left\{\frac{3(4-\pi^2)}{\pi^2}E\left(\frac{r}{a}\right)-\frac{13rI_{17}(r)}{\pi}\right\}\end{aligned}\right\}\tag{5.3a}$$

当$r>a$

$$\left.\begin{aligned}u_r(r,0)&=-\frac{I_3(a)Q^2}{2\pi a^3}\\u_z(r,0)&=-\frac{3P}{32a_1a\pi}\left[\left(2-\frac{r^2}{a^2}\right)\arcsin\frac{a}{r}+\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{a}\right]\\&\quad-\frac{Q^2}{4}\left\{\frac{3(4-\pi^2)}{\pi^2ar}\left[rE\left(\frac{a}{r}\right)+(a^2-r^2)F\left(\frac{a}{r}\right)\right]\right.\\&\quad\left.-\frac{12I_{20}(r)}{\pi^2ar}-\frac{12rI_{17}(a)}{\pi^2}\right\}\end{aligned}\right\}\tag{5.3b}$$

应力分量如下：

当$r\leqslant a$

$$\left.\begin{aligned}
t_{rr}(r,0)=&-\frac{3P\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi a^3}-\frac{2a_1aQ^2rI_5(r)}{\pi}-\frac{8a_1Q^2I_{22}(r)}{\pi ar}\\
&+\frac{4a_1Q^2(3I_{23}(r)-I_{24}(r))r}{\pi a}-\frac{2a_1Q^2(I_3(r)+6I_{21}(r))}{\pi a^3r}\\
t_{zz}(r,0)=&-\frac{3P\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi a^3},\quad t_{rz}(r,0)=\frac{2a_1Q^2r\sqrt{a^2-r^2}}{a^3}\\
t_{\theta\theta}(r,0)=&-\frac{3P\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi a^3}+\frac{\pi a_1Q^2r^2}{4a^3}+\frac{2a_1Q^2(I_3(r)+6I_{21}(r))}{\pi a^3r}\\
&+\frac{4a_1Q^2r(3I_{23}(r)-I_{24}(r))}{\pi a}+\frac{2a_1Q^2rI_5(r)}{\pi}-\frac{4a_1Q^2I_{22}(r)}{\pi ar}
\end{aligned}\right\}\tag{5.4a}$$

当$r>a$

$$\left.\begin{aligned}
t_{rr}(r,\ 0)=&\frac{2a_1Q^2(12I_{21}(a)-I_{24}(a))}{\pi a^3r}-\frac{8a_1Q^2I_{22}(a)}{\pi ar}\\
t_{zz}(r,\ 0)=&0,\ t_{rz}(r,\ 0)=0\\
t_{\theta\theta}(r,0)=&\frac{a_1Q^2}{4\pi r}\left[\frac{r}{a}\arcsin\frac{a}{r}\ \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\right]^2+\frac{2a_1Q^2(I_3(a)+6I_{21}(a))}{\pi a^3r}\\
&-\frac{4a_1Q^2I_{22}(r)}{\pi ar}
\end{aligned}\right\}\tag{5.4b}$$

显然，不可压缩材料情形下的表达式较可压缩情形要简单得多．特别是，我们发现，在不可压缩条件下，在$z=0$的表面，位移分量发生一个重要变化，其二阶解答中没有法向应力t_{zz}的效应．

六、数 值 结 果

为了显示二阶效应，我们给出一些数值结果．在下面的计算中，主要项是线弹性解，而其余项为二阶解．我们感兴趣的是z方向的位移和应力．对于可压缩材料，应变不变量J_1，J_2和J_3能够写为

$$J_1=2e_{rr},\ J_2=2(e_{rr}e_{ss}-e_{rs}e_{rs}),\ J_3=8\det(e_{rs})\tag{6.1}$$

式中

$$e_{rs}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s}+\frac{\partial u_s}{\partial x_r}+\frac{\partial u_k}{\partial x_r}\ \frac{\partial u_k}{\partial x_s}\right)$$

由文[18]，利用三个另外的应变不变量I_1，I_2，I_3，可将J_1，J_2，J_3表示为

$$J_1=2I_1,\ J_2=4I_2,\ J_3=8I_3\tag{6.2}$$

式中

$$I_1=e_{rr},\ I_2=(e_{rr}e_{ss}-e_{rs}e_{rs})/2,\ I_3=\det(e_{rs})$$

文[18]使用的五个弹性常数是λ，μ，l，m，n，而Murnaghan的和Rivlin的系数之间的关系由Truesdell和Noll[3]给出

应力分量如下：

当$r\leqslant a$

$$\left.\begin{aligned}
t_{rr}(r,0)=&-\frac{3P\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi a^3}-\frac{2a_1aQ^2rI_5(r)}{\pi}-\frac{8a_1Q^2I_{22}(r)}{\pi ar}\\
&+\frac{4a_1Q^2(3I_{23}(r)-I_{24}(r))r}{\pi a}-\frac{2a_1Q^2(I_3(r)+6I_{21}(r))}{\pi a^3r}\\
t_{zz}(r,0)=&-\frac{3P\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi a^3},\quad t_{rz}(r,0)=\frac{2a_1Q^2r\sqrt{a^2-r^2}}{a^3}\\
t_{\theta\theta}(r,0)=&-\frac{3P\sqrt{a^2-r^2}}{2\pi a^3}+\frac{\pi a_1Q^2r^2}{4a^3}+\frac{2a_1Q^2(I_3(r)+6I_{21}(r))}{\pi a^3r}\\
&+\frac{4a_1Q^2r(3I_{23}(r)-I_{24}(r))}{\pi a}+\frac{2a_1Q^2rI_5(r)}{\pi}-\frac{4a_1Q^2I_{22}(r)}{\pi ar}
\end{aligned}\right\}\tag{5.4a}$$

当$r>a$

$$\left.\begin{aligned}
t_{rr}(r,0)=&\frac{2a_1Q^2(12I_{21}(a)-I_{24}(a))}{\pi a^3r}-\frac{8a_1Q^2I_{22}(a)}{\pi ar}\\
t_{zz}(r,0)=&0,\ t_{rz}(r,0)=0\\
t_{\theta\theta}(r,0)=&\frac{a_1Q^2}{4\pi r}\left[\frac{r}{a}\text{arc sin}\frac{a}{r}-\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\right]^2+\frac{2a_1Q^2(I_3(a)+6I_{21}(a))}{\pi a^3r}\\
&-\frac{4a_1Q^2I_{22}(r)}{\pi ar}
\end{aligned}\right\}\tag{5.4b}$$

显然，不可压缩材料情形下的表达式较可压缩情形要简单得多．特别是，我们发现，在不可压缩条件下，在$z=0$的表面，位移分量发生一个重要变化，其二阶解答中没有法向应力t_{zz}的效应．

六、数 值 结 果

为了显示二阶效应，我们给出一些数值结果．在下面的计算中，主要项是线弹性解，而其余项为二阶解．我们感兴趣的是z方向的位移和应力．对于可压缩材料，应变不变量J_1，J_2和J_3能够写为

$$J_1=2e_{rr},\quad J_2=2(e_{rr}e_{ss}-e_{rs}e_{rs}),\quad J_3=8\det(e_{rs})\tag{6.1}$$

式中

$$e_{rs}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial x_s}+\frac{\partial u_s}{\partial x_r}+\frac{\partial u_k}{\partial x_r}\frac{\partial u_k}{\partial x_s}\right)$$

由文[18]，利用三个另外的应变不变量I_1，I_2，I_3，可将J_1，J_2，J_3表示为

$$J_1=2I_1,\quad J_2=4I_2,\quad J_3=8I_3\tag{6.2}$$

式中

$$I_1=e_{rr},\quad I_2=(e_{rr}e_{ss}-e_{rs}e_{rs})/2,\quad I_3=\det(e_{rs})$$

文[18]使用的五个弹性常数是λ，μ，l，m，n，而Murnaghan的和Rivlin的系数之间的关系由Truesdell和Noll[3]给出