

# 皮肤层蠕变分析的混合解法\*

黄立独 汪勤恂 麦福达

(上海大学) (香港理工学院)

(何福保推荐, 1994年3月15日收到)

## 摘 要

本文利用积分变换方法求解皮肤层在表面压力作用下的蠕变响应问题。使用数值方法分别求解了双积分逆变换和由表面应力边界条件所得的第一类Volterra积分方程。计算所得的加载瞬时和平衡状态时的位移结果分别与不可压缩和可压缩单相弹性体的位移值相同, 证明了本文方法的正确性。文中还给出了皮肤层在压力作用下的蠕变响应曲线。

**关键词** 生物力学 软组织 混合物理论 蠕变 混合解法

## 一、软组织的二相多孔弹性体理论

Torzilli与Mow<sup>[1]</sup>, 及Mow等<sup>[2,3,4]</sup>首先应用现代混合物理论<sup>[5,6,7]</sup>进行关节软骨的生物力学研究, 并建立了二相多孔弹性体理论(Biphasic Poroelastic Theory)。根据这一理论, 可以将软组织看成是一充满了液体的二相多孔弹性体。其固相为各向同性、不可压缩的线弹性体, 液相为不可压缩的无粘性理想流体。使用渗透摩擦力来反映软组织的粘弹特性。软组织在外加压力作用下, 通过排出其中的液体又是可压缩的。为了讨论的完整性, 下面列出了其控制方程, 详细可参阅文献[3, 4]。

软组织在小变形状态下的本构方程

$$\sigma^s = -\alpha PI + \lambda_s e^s I + 2\mu_s \epsilon^s \quad (1.1)$$

$$\sigma^f = -PI \quad (1.2)$$

式中 $\sigma^s$ ,  $\sigma^f$ 分别为固相和液相的应力张量,  $\epsilon^s$ 和 $e^s$ 分别为固相的应变张量和体膨胀率,  $P$ 为液体压力, 相对体积比 $\alpha = V^s/V^f$ 为固相体积与液相体积比,  $\lambda_s$ ,  $\mu_s$ 为固相拉梅常数,  $I$ 为单位张量。

对于软组织, 由于粘性摩擦力比惯性力要大得多, 可以忽略惯性力的作用, 因此在拟静态条件下的二相运动微分方程为

$$\nabla \cdot \sigma^s + F^s = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \sigma^f + F^f = 0 \quad (1.4)$$

式中耐普拉算子 $\nabla = (\partial/\partial x_i) \mathbf{i}$ ,  $F^s$ ,  $F^f$ 分别为作用于固相和液相的摩擦阻力, 其大小与二相相对运动速度成正比。

$$F^s = -F^l = K(V^l - V^s) \quad (1.5)$$

其中  $V^s$ ,  $V^l$  分别为固相与液相的相对速度,  $K$  为摩擦系数, 其与渗透系数  $k$  之间的关系为  $K = 1/(1+\alpha)^2 k$ .

软组织的二相连续方程为

$$\alpha \nabla \cdot V^s + \nabla \cdot V^l = 0 \quad (1.6)$$

## 二、轴对称问题的解析解

使用轴对称条件下的应变一位移关系及上述二相理论的6个方程, 可得下列3个以固相位移  $u_r^s$ ,  $u_z^s$  和液相压力  $P$  为未知量的运动微分方程,

$$(1+\alpha) \frac{\partial P}{\partial r} = H_s \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u_r^s}{\partial r} + \frac{u_r^s}{r} \right) + (\lambda_s + \mu_s) \frac{\partial^2 u_z^s}{\partial z \partial r} + \mu_s \frac{\partial^2 u_r^s}{\partial z^2} \quad (2.1)$$

$$(1+\alpha) \frac{\partial P}{\partial z} = (\lambda_s + \mu_s) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_r^s}{\partial r} + \frac{u_r^s}{r} \right) + H_s \frac{\partial^2 u_z^s}{\partial z^2} + \mu_s \left( \frac{\partial^2 u_z^s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^s}{\partial r} \right) \quad (2.2)$$

$$\left[ (1+\alpha) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{K} H_s \nabla^2 \right] \left( \frac{\partial u_r^s}{\partial r} + \frac{u_r^s}{r} + \frac{\partial u_z^s}{\partial z} \right) + \frac{\alpha}{K} \nabla^2 P = 0 \quad (2.3)$$

式中  $H_s = \lambda_s + 2\mu_s$

使用势能函数  $\varphi(r, z, t)$  与  $\psi(r, z, t)$ <sup>[8]</sup> 来表示固体的径向位移  $u_r^s$  和轴向位移  $u_z^s$ , 即

$$u_r^s = \frac{\partial \psi}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (2.4a)$$

$$u_z^s = \frac{\partial \psi}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \quad (2.4b)$$

将其代入式(2.1)~(2.3), 可得  $P$  的表达式为

$$P = \frac{2\mu_s}{1+\alpha} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{H_s}{2\mu_s} \nabla^2 \psi \right) \quad (2.5)$$

和势能函数  $\varphi$  与  $\psi$  应适合的偏微分方程组

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2.6)$$

$$H_s \nabla^4 \psi = K(1+\alpha)^2 \nabla^2 \partial \psi / \partial t \quad (2.7)$$

使用下列因子对方程(2.6)和(2.7)作无量纲化

$$\left. \begin{aligned} r &= cr', \quad z = cz', \quad h = ch' \\ \psi &= c^2 \psi', \quad \varphi = c \varphi' \\ \nabla^2 &= \frac{1}{c^2} \nabla'^2 \\ t &= \frac{(1+\alpha)^2 K}{H_s} c^2 t' \\ P &= 2\mu_s P', \quad \sigma_{ij}^s = 2\mu_s \sigma'_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = 2\mu_s \sigma_{ij}^s \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

其中  $c$  为长度无量纲因子, 便可得下列无量纲化方程,

$$\nabla'^2 \varphi' = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla'^4 \psi' = \nabla'^2 \partial \psi' / \partial t' \tag{2.10}$$

对式(2.9)和式(2.10)作双积分变换, 即对 $t'$ 的拉普拉斯变换和对 $r'$ 的零阶黑格尔变换, 可得变换后的方程为

$$\left( \frac{d^2}{dz'^2} - \xi^2 \right) \bar{\varphi} = 0 \tag{2.11}$$

$$\left( \frac{d^2}{dz'^2} - \xi^2 \right) \left[ \frac{d^2}{dz'^2} - (\xi^2 + q) \right] \bar{\psi} = 0 \tag{2.12}$$

其中

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\psi} \end{matrix} \right\}_{(\xi, z', q)} &= \int_0^\infty r' J_0(\xi r') \left\{ \begin{matrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\psi} \end{matrix} \right\}_{(r', z', q)} dr' \\ &= \int_0^\infty r' J_0(\xi r') \int_0^\infty \exp[-qt'] \left\{ \begin{matrix} \varphi' \\ \psi' \end{matrix} \right\}_{(r', z', t')} dt' dr' \end{aligned}$$

上述微分方程的通解为

$$\bar{\varphi} = A_1 \sinh \xi z' + A_2 \cosh \xi z' \tag{2.13}$$

$$\bar{\psi} = B_1 \sinh \xi z' + B_2 \cosh \xi z' + B_3 \sinh \xi z' + B_4 \cosh \xi z' \tag{2.14}$$

式中 $\xi^2 = \xi^2 + q$ , 积分常数 $A_i$ 与 $B_i$ 均是积分变换常数 $\xi$ 与 $q$ 的函数。

### 三、边界条件及积分常数间的关系

如图1所示, 由于皮肤表皮的特点, 体液是无法渗出皮肤表面的, 同时, 假定加载区域与表皮之间无摩擦力的作用, 在皮肤表面的边界条件为

$$z=0, \sigma'_{zz}(r, t) = Q(r, t), \quad 0 \leq r \leq a \tag{3.1a}$$

$$\sigma'_{zz}(r, t) = 0, \quad r > a \tag{3.1b}$$

$$\partial P / \partial z = 0 \tag{3.2}$$

$$\sigma'_{zr} = 0 \tag{3.3}$$

同样, 在软组织与骨的交接面上, 液体也是无法渗入骨表面的, 并假设软组织与骨之间为固定连接。其边界条件为,

$$z=h, \partial P / \partial z = 0 \tag{3.4}$$

$$u'_r = 0 \tag{3.5}$$

$$u'_z = 0 \tag{3.6}$$

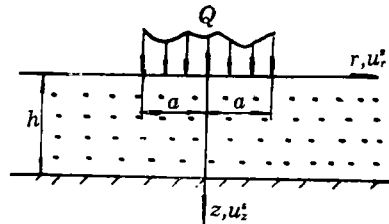


图1 皮肤层的二相多孔弹性体模型

对边界条件(3.2)~(3.6)作无量纲化与双积分变换, 并将通解式(2.13)和(2.14)代入, 可得六个未知常数间的关系为

$$A_2 = - \frac{H_s}{2\mu_s} \frac{\xi q}{\xi^2} B_3 \tag{3.7a}$$

$$B_1 = - \frac{\xi}{\xi} B_3 \tag{3.7b}$$

$$[D] \begin{Bmatrix} A_1'' \\ B_2'' \\ B_4'' \end{Bmatrix} = \{T\} \quad (3.7c)$$

式中

$$A_1'' = A_1/B_3, \quad B_2'' = B_2/B_3, \quad B_4'' = B_4/B_3$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{2\mu_s}{H_s} \xi^2 \sinh \xi h' & 0 & \xi q \sinh \xi h' \\ h' \sinh \xi h' & \cosh \xi h' & \cosh \xi h' \\ \xi h' \cosh \xi h' - \sinh \xi h' & \xi \sinh \xi h' & \xi \sinh \xi h' \end{bmatrix}$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} \xi q (\cosh \xi h' - \cosh \xi h') \\ \frac{\xi}{\xi} \sinh \xi h' - \sinh \xi h' + \frac{H_s}{2\mu_s} h' \frac{\xi q}{\xi^2} \cosh \xi h' \\ \frac{H_s}{2\mu_s} \frac{\xi q}{\xi^2} (\xi h' \sinh \xi h' - \cosh \xi h') + \xi (\cosh \xi h' - \cosh \xi h') \end{Bmatrix}$$

#### 四、Volterra积分方程及其数值解

从式(3.7)可以看到,通解式(2.13)和(2.14)中的6个未知量中只有一个未知量 $B_3$ 有待确定,这可通过边界条件(3.1)来求解。在皮肤表面, $z=0$ ,固相与液相的轴向正应力之和 $\bar{\sigma}_{z,z}^*$ 经无量纲化和双积分变换后为

$$\bar{\sigma}_{z,z}^* = \xi [-1, \xi, \xi] \begin{Bmatrix} A_1'' \\ B_2'' \\ B_4'' \end{Bmatrix} B_3 \quad (4.1)$$

设函数 $G(\xi, q) = \xi \bar{\sigma}_{z,z}^*$ , 并利用式(3.7c)得

$$G(\xi, q) = \xi^2 [-1, \xi, \xi] [D]^{-1} \{T\} B_3 \quad (4.2)$$

将其代入经无量纲化和对 $t'$ 作拉普拉斯变换后的边界条件(3.1)中,便可得下列对偶积分方程

$$\int_0^\infty G(\xi, q) J_0(\xi r') d\xi = 0, \quad r' > 1 \quad (4.3a)$$

$$\int_0^\infty G(\xi, q) J_0(\xi r') d\xi = \bar{Q}(r', q), \quad 0 \leq r' \leq 1 \quad (4.3b)$$

设函数 $G(\xi, q)$ 表示为以下积分

$$G(\xi, q) = \int_0^1 g(\gamma, q) \sin \xi \gamma d\gamma \quad (4.4)$$

那么,式(4.3)中的左端项,即 $\bar{\sigma}_{z,z}^*$ 的零阶黑格尔逆变换可表示为

$$\int_0^1 g(\gamma, q) \int_0^\infty \sin \xi \gamma J_0(\xi r') d\xi d\gamma$$

根据积分变换的性质,可知

$$\text{当 } 0 < \gamma \leq r' \text{ 时 } \int_0^\infty \sin \xi \gamma J_0(\xi r') d\xi = 0$$

$$\text{当 } r' < \gamma < 1 \text{ 时 } \int_0^\infty \sin \xi \gamma J_0(\xi r') d\xi = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - r'^2}}$$

由于  $r' > 1$  时,  $0 < \gamma < r'$ , 因此, 积分方程 (4.3a) 自然成立, 方程 (4.3b) 也可变为下列第一类Volterra积分方程

$$\int_{r'}^1 g(\gamma, q) \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - r'^2}} d\gamma = \bar{Q}(r', q) \tag{4.5}$$

设表面轴对称载荷沿径向的分布函数为  $Q_r(r)$ , 随时间  $t$  的变化规律为  $Q_t(t)$ , 则载荷函数可表示为  $Q(r, t) = Q_r(r) \cdot Q_t(t)$ , 经无量纲化和对  $t'$  的拉普拉斯变换后为

$$\bar{Q}(r', q) = Q'_r(r') \cdot \bar{Q}_t(q) \tag{4.6}$$

令

$$g(\gamma, q) = g_1(\gamma) \cdot \bar{Q}_t(q) \tag{4.7}$$

将上述二式代入积分方程(4.5), 得

$$\int_{r'}^1 g_1(\gamma) \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - r'^2}} d\gamma = -Q'_r(r') \tag{4.8}$$

式中与  $r'$  无关的未知函数  $g_1(\gamma)$  可用一多项式来逼近,

$$g_1(\gamma) \approx \sum_{i=0}^n a_i \gamma^i \tag{4.9}$$

在闭区间  $[0, 1]$  内取  $n+1$  个点  $0 \leq r'_j \leq 1 (j=1, 2, \dots, n+1)$ , 可得  $n+1$  个以  $a_i$  为未知量的积分方程组,

$$\int_{r'_j}^1 \sum_{i=0}^n a_i \gamma^i \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 - r'^2}} d\gamma = -Q'_r(r'_j) \tag{4.10}$$

使用Gauss-Legendre数值积分, 即

$$\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^M \beta_m \sum_{i=0}^n a_i \gamma_{im}^i \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma_{im}^2 - r'^2}} = -Q'_r(r'_j) \tag{4.11}$$

式中  $N$  为区域  $[r'_j, 1]$  上的积分区间数,  $M$  为各积分区间内的数值积分点数,  $\beta_m$  与  $\gamma_{im}$  为与积分区间长度和积分点数有关的积分参数。这样由方程组 (4.11) 可求得  $n+1$  个系数  $a_i$ , 并由式(4.2)、(4.4)和式(4.9)可得

$$B_3 = \frac{\bar{Q}_t(q) \int_0^1 g_1(\gamma) \sin \xi \gamma d\gamma}{\xi^2 [-1, \xi, \xi] [D]^{-1} \{T\}} \tag{4.12}$$

将  $B_3$  代入式 (3.7) 可得通解式 (2.13) 和 (2.14) 中的其余5个积分常数。这样, 在表面分布载荷作用下的响应  $\bar{R}(\xi, z', q)$ , 如固相位移和液相压力等就可由式(2.4)和式 (2.5) 求得, 此等响应均是积分变换变量  $\xi$  与  $q$  的函数, 可通过下列双积分逆变换和有量纲化来求解, 即

$$R = \frac{d}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_0^\infty \xi \bar{R}(\xi, z', q) J_0(\xi r') d\xi \exp[qt'] dq \tag{4.13}$$

式中  $d$  为相应物理量的有量纲化因子, 上述积分逆变换只有在十分特别的情况下才可解析求得。本文使用数学库IMSL中的DINLAP和DGQRUL函数进行数值求解。

### 五、结果与结论

一皮肤层在表面一半半径  $c$  的圆面内受一阶跃分布载荷的作用,  $Q_r = 4c(N/\pi^2)$ , 设皮肤

层的固相拉梅常数为 $\lambda_s = (1/3) \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ,  $\mu_s = (2/3) \times 10^5 \text{ N/m}^2$ , 渗透系数 $k = 3.5 \times 10^{-13} \text{ m}^4/\text{N}\cdot\text{s}$ , 相对体积比 $\alpha = 0.2$ .

在突然加载瞬时, 由于皮肤层内液体不能及时向两侧运动, 因此, 在该瞬时 ( $t=0^+$ ) 的固相位移应与一具有相同弹性模量  $E = 1.56 \times 10^5 \text{ N/m}^2$  的单相不可压缩弹性体的位移相同. 随着内部液体不断地向外侧转移, 并经缓慢的蠕变变形之后, 其固相平衡位移 ( $t \rightarrow \infty$ ) 应与具有相同弹性常数  $\lambda_s$  和  $\mu_s$  的可压缩弹性体的位移结果相同. 表1所示的结果为使用本文方法求得的二个极限时刻的轴向位移与不可压缩/可压缩弹性体的位移结果比较.

表1 二相多孔弹性解与单相弹性解的表面中点位移 (mm) ( $h/a=2$ )

皮肤层厚度 $h(\text{mm})$	二相多孔弹性解		单相弹性解 <sup>[10]</sup>		相对误差(%)	
	加载瞬时 $t_0^+$	平衡状态 $t_\infty$	$\nu_1=0.167$	$\nu_2=0.5$	$t_0^+$ 与 $\nu_2$	$t_\infty$ 与 $\nu_1$
1	0.1134	0.1738	0.1749	0.1128	-0.063%	0.053%
4	0.4538	0.7024	0.6995	0.4510	0.041%	0.062%

从表1的结果看出, 皮肤层在上述二个极限时刻 ( $t=0^+$ ,  $t \rightarrow \infty$ ) 的位移分别与具有相同弹性模量、不同泊松比 ( $\nu_2=0.5$ ,  $\nu_1=0.167$ ) 的单相弹性体的位移相同, 证明了本方法的正确性及其数值解法的可靠性. 使用本文提出的二相多孔弹性体的混合法, 还可以求得皮肤层在任一时刻,  $0 < t < \infty$ , 的粘弹性蠕变响应.

使用与上例相同的物理常数, 皮肤层厚度  $h=4\text{mm}$ , 分布载荷作用区域半径  $a=2\text{mm}$ , 阶跃分布载荷定义为

$$Q = 400 \cos \frac{\pi r}{2a} H(t), \quad (r \leq a)$$

式中  $H(t)$  为海维赛函数. 使用本文方法求得的表面中点位移与内部水压力随时间的变化规律分别如图2与图3所示.

图2的位移-时间曲线显示, 在阶跃载荷作用瞬间, 皮肤层内有一个瞬时的位移响应, 其大小与具有相同弹性模量的不可压弹性体的位移相同, 其后, 经显著的蠕变过程达到平衡状态. 达到平衡状态的时间与渗透系数和弹性常数  $H_s$  成反比, 即如果皮肤层内的体液越容易渗透、固相刚性越大, 其达到平衡状态所需的时间就越短. 达到平衡状态的时间还与压力作用区域半径的平方  $a^2$  成正比.

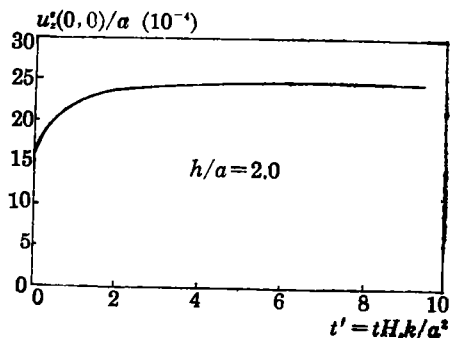


图2 皮肤表面中点轴向位移的蠕变曲线

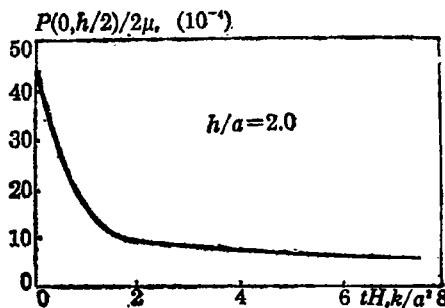


图3 液相压力随时间的变化曲线 ( $r=0, z=h/2$ )

从图3看到, 在突然加载瞬时, 由于软组织内的液体无法瞬时排出, 因而使其内部的小孔水压力迅速升高, 随着液体向远离承载区域的方向运动, 其水压力开始下降, 并逐渐降低至零.

## 参 考 文 献

- [1] Torzilli, P. A. and V. C. Mow., On the fundamental fluid transport mechanisms through normal and pathological articular cartilage during function, Part I: The analysis, solution and conclusions, *J. Biomechanics*, 9 (1976), 587—606.
- [2] Mow, V. C. and J. M. Mansour, The nonlinear interaction between cartilage deformation and interstitial fluid flow, *J. Biomechanics*, 10 (1977), 31—39.
- [3] Mow, V. C., S. C. Kuei, W. M. Lai and C. G. Armstrong, Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: Theory and experiments, *J. Biomechanical Engineering*, 102 (1980), 73—84.
- [4] Mow, V. C., M. K. Kwan, W. M. Lai and W. H. Holmes, A finite deformation theory for nonlinear permeable soft hydrated biological tissues, in *Frontiers in Biomechanics*, ed. by G. W. Schmid-Schonbein, S. L. Y. Woo and B. W. Zweifach, Springer-Verlag (1986).
- [5] Bowen, R. M., Theory of mixtures, *Continuum Physics*, I, ed. by A. C. Eringen, Academic Press, New York (1976).
- [6] Crane, R. E., A. E. Green and P. M. Naghdi, A mixture of viscoelastic materials with different constituent temperatures, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 23 (1970), 171—184.
- [7] Green, A. E. and P. M. Naghdi, The flow of fluid through an elastic solid, *Acta Mech.*, 9 (1970), 329—340.
- [8] Mak, A. F. T., W. M. Lai and V. C. Mow, Biphasic indentation of articular cartilage, Part I: Theoretical analysis, *J. Biomechanics*, 20 (1987), 703—714.
- [9] Monard, J. and R. E. Gibson, Displacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 13 (1960), 98—111.
- [10] Poulos, H. G. and E. H. Davis, *Elastic Solutions for Soil and Rock Mechanics*, Wiley (1974).
- [11] Sneddon, I. N., *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York (1951).
- [12] 钱伟长、叶开沅、《弹性力学》，科学出版社（1980）。

## A Mixed Method for the Creep of a Skin Layer

Huang Li-du    Wang Qin-que

*(Shanghai University, Shanghai)*

Mak Fak-tat Arthur

*(Hong Kong University of Polytechnic, Hong Kong)*

### Abstract

The creep of a skin layer under a distributed surface pressure was solved by an analytical method using Hankel transform and Laplace transform. The surface stress boundary conditions lead to a Volterra integral equation of the first kind, which was then solved by a numerical method. The IMSL subroutines DINLAP and DGQRUL were employed to numerically obtain the Hankel-Laplace inversion. The calculated displacements at two distinctive moments were compared respectively with those obtained by an elastic solution for either incompressible or compressible solid. The transient creep responses of the skin layer were also presented.

**Key words** biomechanics, soft tissue, mixture theory, creep, mixed method