

弹性平面扇形域问题及哈密顿体系*

钟 万 颀

(大连理工大学工程力学研究所, 1993年12月24日收到)

摘 要

通过变量代换及变分原理, 将平面弹性扇形域的方程导向哈密顿体系, 从而可用分离变量法、本征函数展开等方法求解扇形域的分析单元, 这样便可以与有限元的程序系统相结合, 显示了哈密顿体系、辛数学的应用潜力。

关键词 弹性力学 哈密顿体系 辛

一、引 言

弹性力学平面问题是一个经典的领域^[1,2], 然而仍有一些课题有待深入. 利用结构力学与最优控制的模拟理论^[3~5], 将哈密顿体系理论引入到弹性力学柱形域问题中, 可以导出一套横向哈密顿算子矩阵的本征函数向量展开解法^[6,7], 用于处理圣维南问题. 本文则将这套方法用于平面扇形区域 (图 1a). 将扇形域的半径方向选作长度方向经过恰当的变量代换以模拟时间, 仍可以将问题导向哈密顿体系, 于是一套辛代数方法就可用于扇形域问题. 这对于确切地求出扇形域顶点的应力奇性也有很大好处, 这在应用上是很重要的^[8]. 对奇点解的扇形域采用分析法单元, 然后将此分析元装进有限元程序系统就可处理该类奇性单元的结构分析问题. 本文只讲这类分析元尤其是其奇点解.

为行文方便, 本文只讲述均匀各向同性平面弹性问题. 这套方法对于均匀各向异性材料也适用, 并且也可用于不同材料在径向线上粘合的问题 (图 1b) 或空间问题.

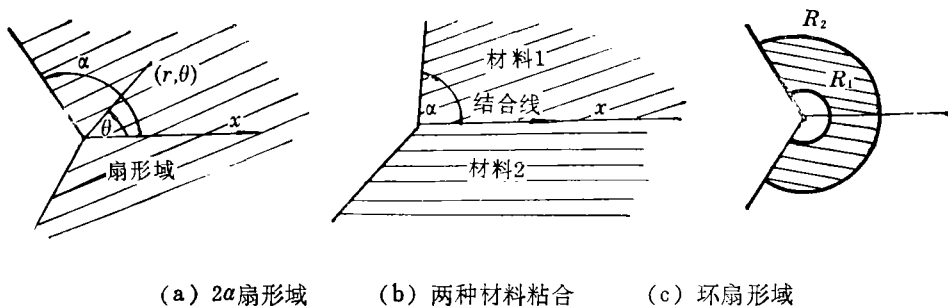


图 1

* 国家自然科学基金及教委博士点基金资助课题。

二、变分原理与基本方程

考虑图1(c)所示的环扇形区域, 为简便起见认为材料是均匀各向同性的, 用 E, ν 表征. 选择极坐标, 其基本方程可以表示为

平衡:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2.1b)$$

应力位移关系:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta), & \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \\ \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

其中符号都是常用的^[1,2]. 当然还应当有适当的边界条件.

以上方程可以从以下变分式导出

$$\begin{aligned} \delta \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{R_1}^{R_2} & \left[\frac{\partial u}{\partial r} \sigma_r + \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \sigma_\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \sigma_{r\theta} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - 2\nu \sigma_r \sigma_\theta + 2(1+\nu) \sigma_{r\theta}^2) \right] r dr d\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $u, v, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}$ 认为是各自独立变分的量. 变分式(2.3)将自由边界条件作为变分的自然边界条件, 而位移边界条件则应另外设定. 以上都是大家熟知的^[9,10].

为了将方程导入哈密顿体系, 应当先确定纵向, 即模拟时间的坐标方向. 现在选定 r 为纵向, 于是 θ 为横向, 横向的力素应予以消去. 将(2.3)对于 σ_θ 取 \max , 有

$$\sigma_\theta = E \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \nu \sigma_r \quad (2.4)$$

于是变分式(2.3)成为

$$\begin{aligned} \delta \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{R_1}^{R_2} & \left[\sigma_r \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right) + \sigma_{r\theta} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2E} (\sigma_r^2 (1-\nu^2) + 2(1+\nu) \sigma_{r\theta}^2) + \frac{E}{2} \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

现在引入变量 ξ 以代替 r

$$\xi = \ln r \quad (2.6)$$

变分式(2.5)可导向

$$\begin{aligned} \delta \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{\ln R_1}^{\ln R_2} & \left[s_r \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu u + \nu \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + s_\theta \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} - v \right) + \frac{E}{2} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2E} ((1-\nu^2) s_r^2 + 2(1+\nu) s_\theta^2) \right] d\xi d\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

其中引进了

$$s_r = r \sigma_r, \quad s_\theta = r \sigma_{r\theta} \quad (2.8)$$

而 u, v, s_r, s_θ 都看成是 ξ 与 θ 的函数.

至此就可以进入哈密顿体系了, u, v 为位移而 s_r, s_θ 为其对偶变量. 令

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} s_r \\ s_\theta \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

再用一点代表对于 ξ 的微商, 有

$$\delta \int_{1nR_1}^{1nR_2} \int_{-\alpha}^{\alpha} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p})] d\theta d\xi = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = & s_r \left(\nu u + \nu \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + s_\theta \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) + \frac{E}{2} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \\ & - \frac{1}{2E} \left((1-\nu^2) s_r^2 + 2(1+\nu) s_r s_\theta \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

这是场问题的哈密顿体系的表达式, 是变分原理的形式. 将变分原理展开, 有对偶方程组

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}\mathbf{q} - \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (2.12a)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{Q}\mathbf{q} - \mathbf{F}^T\mathbf{p} \quad (2.12b)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} -(1-\nu^2)/E & 0 \\ 0 & -2(1+\nu)/E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -E & -E \frac{d \cdot}{d\theta} \\ \frac{d}{d\theta} (E \cdot) & \frac{d}{d\theta} \left(E \frac{d \cdot}{d\theta} \right) \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} -\nu & -\nu \frac{d \cdot}{d\theta} \\ -\frac{d \cdot}{d\theta} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^T = \begin{bmatrix} -\nu & \frac{d \cdot}{d\theta} \\ \frac{d}{d\theta} (\nu \cdot) & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

以及在 $\theta=0$ 处的对称或反对称条件, 在 $\theta=\alpha$ 处的自由边界条件

$$\text{当 } \theta=\alpha \text{ 时 } s_\theta=0, \quad u + \frac{dv}{d\theta} + \frac{\nu}{E} s_r = 0 \quad (2.14)$$

等边值问题.

三、本征解, 共轭辛正交归一

对偶方程(2.12)连同边界条件可以利用分离变量法求解,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_i \exp[\mu_i \xi] \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_i \exp[\mu_i \xi] \quad (3.1)$$

其中 μ_i 是本征值. 将对偶方程(2.12)写成为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} & -\mathbf{G} \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{F}^T \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$\boldsymbol{\omega}$ 称为全状态函数向量. 于是本征方程成为

$$\mu_i \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{H}\boldsymbol{\psi}_i, \quad \boldsymbol{\psi}_i = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{p}_i \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

式中 $\boldsymbol{\psi}_i$ 是本征函数向量, 它只是 θ 的函数. 当然它应当满足边界条件(2.14). 引入算子 \mathbf{J}

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \text{ 显然 } J^T = J^{-1} = -J, \quad J^2 = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

其中 I 是恒等算子. 现在要说明哈密顿算子矩阵 H 的性质. 它应当与边界条件 (2.14) 同时考虑. 定义对于任一算子矩阵 P

$$\langle \boldsymbol{w}_1^T, P, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \int_{-a}^a \boldsymbol{w}_1^T P \boldsymbol{w}_2 d\theta \quad (3.5)$$

则利用分部积分与边界条件可以验明

$$\langle (J\boldsymbol{w}_1)^T, H, \boldsymbol{w}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{w}_1^T, H^T, (J\boldsymbol{w}_2) \rangle \quad (3.6)$$

式中 $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ 是任意满足边界条件 (2.14) 的函数向量. 而

$$H^T = \begin{bmatrix} F^T & -Q \\ -G & -F \end{bmatrix}, \text{ 且 } H^T = JHJ \quad (3.7)$$

满足 (3.7) 式的算子矩阵 H^T 称为是哈密顿型的.

哈密顿算子矩阵 H 的本征问题 (3.3) 有突出的性质^[6,7]. 如 μ_i 是其本征值, 则 $-\mu_i$ 一定也是其本征值. 因此其本征解可以自然划分为 α, β 两组

$$(\alpha) \quad \mu_{\alpha i}, \quad (i=1, 2, \dots); \quad \text{Re}(\mu_{\alpha i}) > 0 \text{ 或 } \text{Re}(\mu_{\alpha i}) = 0 \text{ 时 } \text{Im}(\mu_{\alpha i}) > 0 \quad (3.8a)$$

$$(\beta) \quad \mu_{\beta i}, \quad \mu_{\beta i} = -\mu_{\alpha i} \quad (3.8b)$$

相应的本征函数向量可分别记之为

$$\boldsymbol{\psi}_{\alpha i}, \quad \boldsymbol{\psi}_{\beta i} \quad (3.9)$$

它们有共轭辛正交归一关系

$$\langle \boldsymbol{\psi}_{\alpha i}^T, J, \boldsymbol{\psi}_{\beta j} \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle \boldsymbol{\psi}_{\alpha i}^T, J, \boldsymbol{\psi}_{\alpha j} \rangle = 0, \quad \langle \boldsymbol{\psi}_{\beta i}^T, J, \boldsymbol{\psi}_{\beta j} \rangle = 0 \quad (3.10)$$

基于共轭辛正交归一关系的展开求解法对于这类分析法单元非常有用.

四、按本征函数向量展开

任一全状态函数向量 \boldsymbol{w} 总可以用本征解来展开

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \boldsymbol{\psi}_{\alpha i} + b_i \boldsymbol{\psi}_{\beta i}) \quad (4.1)$$

其中 $\boldsymbol{\psi}_i$ 只是 θ 的函数, 而系数 a_i, b_i 则是 ξ 的函数. 利用共轭辛正交归一关系有

$$a_i = -\langle \boldsymbol{\psi}_{\beta i}^T, J, \boldsymbol{w} \rangle, \quad b_i = \langle \boldsymbol{\psi}_{\alpha i}^T, J, \boldsymbol{w} \rangle \quad (4.2)$$

将 (4.1) 式代入方程 (3.2), 可得

$$\dot{a}_i = \mu_{\alpha i} a_i, \quad \dot{b}_i = -\mu_{\alpha i} b_i \quad (4.3)$$

因此有 (将 $\mu_{\alpha i}$ 写为 μ_i)

$$\dot{a}_i = a_{i0} \exp[\mu_i \xi], \quad \dot{b}_i = b_{i0} \exp[-\mu_i \xi] \quad (4.4)$$

其中常数 a_{i0} 与 b_{i0} 应当由 $\xi_1 = \ln R_1$ 与 $\xi_2 = \ln R_2$ 的边界条件来确定. 以下可令 $R_1 \rightarrow 0$, 即 $\xi_1 \rightarrow -\infty$, 问题就成为对于扇形区顶点的奇性单元的分析了.

五、本征解的分析求解

将本征方程 (3.3) 展开, 有 (已将本征解的下标 i 拿掉)

$$\left. \begin{aligned}
 & -(\mu+\nu)u - \nu \frac{dv}{d\theta} + \frac{(1-\nu)^2}{E} s_r + 0 = 0 \\
 & -\frac{du}{d\theta} + (1-\mu)v + 0 + \frac{2(1+\nu)}{E} s_\theta = 0 \\
 & Eu + E \frac{dv}{d\theta} + (\nu-\mu)s_r - \frac{ds_\theta}{d\theta} = 0 \\
 & -\frac{d}{d\theta}(Eu) - \frac{d}{d\theta}\left(E \frac{dv}{d\theta}\right) - \frac{d}{d\theta}(\nu s_r) - s_\theta(1+\mu) = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

在这套方程的写法中, E, ν 可以是与 θ 有关的. 以下认为 E, ν 与 θ 无关, 求解(5.1)应先求解行列式方程

$$\begin{vmatrix}
 -(\mu+\nu) & -\nu\lambda & (1-\nu^2)/E & 0 \\
 -\lambda & (1-\mu) & 0 & 2(1+\nu)/E \\
 E & E\lambda & (\nu-\mu) & -\lambda \\
 -E\lambda & -E\lambda^2 & -\nu\lambda & -(1+\mu)
 \end{vmatrix} = 0$$

展开此行列式, 得到对于 λ 的方程

$$\left. \begin{aligned}
 & \lambda^4 + \lambda^2(2+2\mu^2) + (1-\mu^2)^2 = 0 \\
 & \lambda_{1,2} = \pm i(1+\mu), \quad \lambda_{3,4} = \pm i(1-\mu)
 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

先寻求对于 $\theta=0^\circ$ 线为对称的解, 有

$$\left. \begin{aligned}
 u &= A_u \cos(1+\mu)\theta + C_u \cos(1-\mu)\theta \\
 v &= A_v \sin(1+\mu)\theta + C_v \sin(1-\mu)\theta \\
 s_r &= A_r \cos(1+\mu)\theta + C_r \cos(1-\mu)\theta \\
 s_\theta &= A_\theta \sin(1+\mu)\theta + C_\theta \sin(1-\mu)\theta
 \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

这些常数 $A_u, C_u, A_v, \dots, C_\theta$ 应当满足方程(5.1), 从而有

$$\left. \begin{aligned}
 & -(\mu+\nu)A_u - \nu(1+\mu)A_v + ((1-\nu^2)/E)A_r + 0 = 0 \\
 & (1+\mu)A_u + (1-\mu)A_v + 0 + (2(1+\nu)/E)A_\theta = 0 \\
 & EA_u + E(1+\mu)A_v + (\nu-\mu)A_r - (1+\mu)A_\theta = 0 \\
 & E(1+\mu)A_u + E(1+\mu)^2A_v + \nu(1+\mu)A_r - (1+\mu)A_\theta = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

及

$$\left. \begin{aligned}
 & -(\mu+\nu)C_u - \nu(1-\mu)C_v + \frac{1}{E}(1-\nu^2)C_r + 0 = 0 \\
 & (1-\mu)C_u + (1-\mu)C_v + 0 + \frac{2}{E}(1+\nu)C_\theta = 0 \\
 & EC_u + E(1-\mu)C_v + (\nu-\mu)C_r - (1-\mu)C_\theta = 0 \\
 & E(1-\mu)C_u + E(1-\mu)^2C_v + \nu(1-\mu)C_r - (1+\mu)C_\theta = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

这二个方程组各有一个方程是多余的, 因此实际上各有一个独立参数, 设为 A_θ, C_θ . 当然本征值 μ 仍为待定.

将(5.3)的解代入边界条件(2.14), 建立两个对于 A_θ 与 C_θ 的齐次方程, 由于它们不能同时为零, 因此其行列式为零, 这就给出了本征值的方程.

从(5.4)式有

$$A_r = -A_\theta, \quad A_u = -A_v, \quad A_o = \frac{1+\nu}{E\mu} A_\theta \quad (5.6)$$

而从(5.5)式可解出

$$\left. \begin{aligned} \mu(1-\mu)C_u + \frac{C_\theta}{E}(-3+\nu+\mu+\nu\mu) &= 0, \quad (1-\mu)C_r - (3-\mu)C_\theta = 0 \\ \mu(1-\mu)C_v + \frac{C_\theta}{E}(3-\nu+\mu+\nu\mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

边界条件(2.14)给出

$$\left. \begin{aligned} A_\theta \sin(1+\mu)\alpha + C_\theta \sin(1-\mu)\alpha &= 0 \\ \left(A_u + A_v(1+\mu) + \frac{\nu}{E} A_r \right) \cos(1+\mu)\alpha + \left(C_u + C_v(1-\mu) + \frac{\nu}{E} C_r \right) \cos(1-\mu)\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

将(5.6)及(5.7)代入上式, 经过一番推导有

$$\left. \begin{aligned} A_\theta \sin(1+\mu)\alpha + C_\theta \sin(1-\mu)\alpha &= 0 \\ (1-\mu)A_\theta \cos(1+\mu)\alpha + (1+\mu)C_\theta \cos(1-\mu)\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

令其行列式为零即得本征方程, 经化简得

$$\sin 2\mu\alpha + \mu \sin 2\alpha = 0 \quad (5.10)$$

从这个方程立即看出, 如 μ 是本征根则 $-\mu$ 也是本征根.

当 $\alpha > \pi/2$ 时, 扇形区域的顶点($\xi \rightarrow -\infty$)有奇性, 亦即 $0 < \mu < 1$ 是有根的, 此时必有 $2\mu\alpha \leq \pi$. 经数值求解有

表1 各向同性材料扇形域对称变形本征值的计算结果 (表达顶点奇性)

$2\alpha/\pi$	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0
μ	0.5	0.500310	0.502530	0.508800	0.521711	0.544484	0.581142	0.636728	0.717799	0.833691	1

请注意(2.8)式, 这相当在顶点的应力奇性为 $r^{(\mu-1)}$

当 $\alpha < \pi/2$ 时, 扇形区顶点应当没有奇性. 此时 $\sin 2\alpha > 0$, 因此 $0 < \mu < 1$ 不可能是方程(5.10)的根, 符合上述断言.

现在寻求对于 $\theta = 0^\circ$ 线为反对称的解. 此时

$$\left. \begin{aligned} u &= B_u \sin(1+\mu)\theta + D_u \sin(1-\mu)\theta \\ v &= B_v \cos(1+\mu)\theta + D_v \cos(1-\mu)\theta \\ s_r &= B_r \sin(1+\mu)\theta + D_r \sin(1-\mu)\theta \\ s_\theta &= B_\theta \cos(1+\mu)\theta + D_\theta \cos(1-\mu)\theta \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

其中应当有

$$B_r = B_\theta, \quad B_u = B_v, \quad \mu B_v = (1+\nu)B_\theta/E \quad (5.12)$$

$$\left. \begin{aligned} (1-\mu)D_r &= (\mu-3)D_\theta, \quad E\mu(1-\mu)D_u + (3-\nu-\mu-\nu\mu)D_\theta = 0 \\ E\mu(1-\mu)D_v + (3-\nu+\mu+\nu\mu)D_\theta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

自由边界条件(2.14)给出

$$\left. \begin{aligned} B_\theta \cos(1+\mu)\alpha + D_\theta \cos(1-\mu)\alpha &= 0 \\ \left(B_u - B_v(1+\mu) + \frac{\nu}{E} B_r \right) \sin(1+\mu)\alpha + \left(D_u - D_v(1-\mu) + \frac{\nu}{E} D_r \right) \sin(1-\mu)\alpha &= 0 \end{aligned} \right\}$$

将(5.12)与(5.13)代入上式,有

$$B_0 \sin(1+\mu)\alpha + \frac{1+\mu}{1-\mu} D_0 \sin(1-\mu)\alpha = 0$$

因为 B_0, D_0 不应同时为零,因此可导出本征方程

$$\sin 2\mu\alpha - \mu \sin 2\alpha = 0 \quad (5.14)$$

由此看出,如 μ 是根则 $-\mu$ 也是根.

当 $2\alpha > 1.430297\pi$ 时, μ 的奇性根可见表2($0 < \mu \leq 1$).

表2 各向同性材料扇形域反对称变形的奇性本征值

$2\alpha/\pi$	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.45	1.4303
μ	0.5	0.555202	0.621710	0.701175	0.795785	0.908529	0.972947	0.999999

再考虑两种材料相粘合的情形(图1b),设其中一种材料的 E_2 很大,因此可以当成为刚性,从而有边界条件

$$u = v = 0, \text{ 当 } \theta = 0 \text{ 时} \quad (5.15)$$

而当 $\theta = \alpha$ 时则为自由边界条件(2.14).

该问题的一般本征解应当是(5.3)及(5.11)之和,其中的系数仍应当满足(5.6),(5.7),(5.12)及(5.13).因此独立可变的参数只有 A_0, B_0, C_0, D_0 4个,当然 μ 是待定的.根据边界条件(5.15),有 $A_0 = -C_0, B_0 = -D_0$.根据(5.6),(5.7)与(5.12)及(5.13),有

$$A_0 = \frac{(3-\nu-\mu-\nu\mu)}{(1+\nu)(1-\mu)} C_0, \quad B_0 = \frac{(3-\nu+\mu+\nu\mu)}{(1+\nu)(1-\mu)} D_0 \quad (5.16)$$

将一般本征解代入自由边界条件(2.14),也利用(5.6),(5.7),(5.12),(5.13),有

$$\left. \begin{aligned} A_0 \sin(1+\mu)\alpha + B_0 \cos(1+\mu)\alpha + C_0 \sin(1-\mu)\alpha + D_0 \cos(1-\mu)\alpha &= 0 \\ A_0 \cos(1+\mu)\alpha - B_0 \sin(1+\mu)\alpha + C_0 \frac{1+\mu}{1-\mu} \cos(1+\mu)\alpha \\ - D_0 \frac{1+\mu}{1-\mu} \sin(1-\mu)\alpha &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.17)^*$$

将(5.16)代入上式,就成为对于 C_0 与 D_0 的联立方程.由于它们不能同时为零,因此其行列式必为零,这就是对 μ 的本征方程.

$$\begin{vmatrix} (3-\nu-\mu-\nu\mu)\sin(1+\mu)\alpha & (3-\nu+\mu+\nu\mu)\cos(1+\mu)\alpha \\ + (1+\nu)(1-\mu)\sin(1-\mu)\alpha & + (1+\nu)(1-\mu)\cos(1-\mu)\alpha \\ (3-\nu-\mu-\nu\mu)\cos(1+\mu)\alpha & - (3-\nu+\mu+\nu\mu)\sin(1+\mu)\alpha \\ + (1+\nu)(1+\mu)\cos(1-\mu)\alpha & - (1+\nu)(1+\mu)\sin(1-\mu)\alpha \end{vmatrix} = 0$$

将行列式展开,可求得方程

$$4 - (1+\nu)(3-\nu)\sin^2\mu\alpha - \mu^2(1+\nu)^2\sin^2\alpha = 0 \quad (5.18)$$

当 $\alpha = \pi/2$ 及 π 时,分别成为

$$4 - (1+\nu)(3-\nu)\sin^2\frac{\mu\pi}{2} - (1+\nu)^2\mu^2 = 0 \quad \left(\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ 时}\right) \quad (5.18)'$$

$$\sin\mu\pi = \sqrt{\frac{4}{(1+\nu)(3-\nu)}} > 1 \quad (\alpha = \pi \text{ 时}) \quad (5.18)''$$

(5.18)''必无实根,而式(5.18)'则有实根.这说明在 $\alpha = \pi/2 \sim \pi$ 之间必有实根到复根的过渡

* 在进一步工作中,张洪武副教授发现了原文公式(5.17)中弄错了正负号,并建议了直至表3的修改.作者对此深表感谢.

表3 $\nu=0.3$ 时, 扇形域一边夹住问题的本征根

α°	180	170	160	150	140	131	126	119	115	108	90			
$\text{Re}(\mu)$	0.500	0.530	0.567	0.611	0.665	0.730	0.730	0.679	0.849	0.675	0.990	0.680	0.692	0.758
$\text{Im}(\mu)$	0.116	0.122	0.123	0.117	0.097	0	0	0	0	0	0	0	0	0

点。取 $\nu=0.3$ 求解, 其各 α 角的本征根 μ 列于表3。计算表明 $\bar{\alpha}\approx 131^\circ$ 为实根与复根的分界, 当 $90^\circ\leq\alpha\leq\bar{\alpha}$ 时为实根, 且在 $119^\circ\leq\alpha\leq\bar{\alpha}$ 时有两个小于1的实根。

不同材料粘结问题对于复合材料或微电子器件很有用。虽然本文只计算了 $\alpha=\pi/2$ 的结果, 然而 α 的值是可以有所选择的。方程(5.18)可以用于求解本征值。按实际工艺的可能选择恰当的 α 角, 相当于做一次优化, 是可以考虑的一项措施。

上文对各向同性材料的平面问题给出了分析的计算方法。采用 Airy 应力函数与复变函数法也可求得这些解的。但本文介绍的哈密顿体系的方法可以用于任一自模拟的线弹性理论问题。因此对于各向异性材料以及三维弹性问题都可以应用。

上文所做的计算只是求取了一个奇点解的本征值, 本征方程还有无穷多个解, 其中一般有许多复本征根。当将本征值代入联立方程(5.9)等, 并确定了其常数后, 由(5.3), (5.11)就得到相应的本征函数向量。这些解的本征函数向量之间相互共轭辛正交归一。本征值的计算只说明奇点的性质, 而奇点的强度则应当另外计算, 这方面的情况与断裂力学相类。奇点的强度与扇形域和周围结构的连结及其受力情况有关。结构分析一般用有限元法来计算, 而扇形域则成为整个结构的一个超级单元。扇形域的分析法单元刚度阵则可以用本征函数向量展开的方法结合变分原理推出来。

六、扇形域刚度阵的计算公式

对于环扇形域(图1c), 其内、外圆弧 $r=R_1, R_2$ 上设都有 n_r 个出口点, 内半径可以与塑性区域相连接, 而外半径则可与结构相连接。对于环形域, μ 与 $-\mu$ 的本征解都是需要的。当考虑弹性奇点元时, $R_1\rightarrow 0$, 只有 $\text{Re}(\mu)>0$ 的本征解才是适当的。

设弹性元 $r=R_2$ 外半径上划分了 n_r 个节点与与结构有限元节点相连, 因此扇形元的单元刚度阵应当是对于这 n_r 点的出口位移而言的, 这是一个分析法的超级单元。对于平面问题, 每个节点有2个位移 u, v , 超级单元出口位移为 $2n_r$ 个自由度。因此至少应当解出 $\text{Re}(\mu)>0$ 的 $2n_r$ 个本征解。扇形奇点元的解为

$$\boldsymbol{w}(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^{2n_r} A_i \boldsymbol{\psi}_i(\theta) \exp(\mu_i \xi) \quad (6.1)$$

其中 A_i 为待定常数。对于复本征解, 其复共轭解必然也是本征解, 相应的 A_i 也应当取共轭值。 $\boldsymbol{\psi}_i$ 为本征函数向量, 由 $u_i, v_i, s_{r,i}, s_{\theta,i}$ 所组成。由于当今的有限元通用程序采用的都是位移法, 通用解(6.1)也应当换算成出口刚度阵。

根据 n_r 个节点上的共 $2n_r$ 个 u, v 位移, 可以将 $2n_r$ 个实常数 A_i (或其实、虚部)确定。当 $2n_r$ 个位移 u, v 顺次取成 $\{1, 0, 0, 0; \dots; 0, 0\}^T$, $\{0, 1, 0, 0; \dots; 0, 0\}^T$, $\{0, 0, 1, 0; \dots; 0, 0\}^T, \dots$, $\{0, 0, 0, 0; \dots; 0, 1\}^T$ 共 $2n_r$ 组独立位移时, 当然就可以解出这 $2n_r$ 组常数 A_i 。将这些解作为列, 可以组成一个 $2n_r \times 2n_r$ 的矩阵 \mathbf{T} , 它可以扇形元出口节点位移转换到常数 A_i 。

计算单元刚度阵就是计算整个单元的变形能, 而变形能其实就是式(2.3)中的泛函, 也

就是(2.7)或(2.10)中的泛函。将(6.1)代入(2.10)的泛函，并利用分部积分以及解(6.1)是满足全部方程及边界条件 ($r=R_2$ 除外) 的特点，有单元变形能

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} [s_r(\theta) \cdot u(\theta) + s_\theta(\theta) \cdot v(\theta)] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{R}_e \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (6.2)$$

式中 \mathbf{a} 是由 $A_i (i=1, 2, \dots, 2n_r)$ 所组成的向量，而 \mathbf{R}_e , $2n_r \times 2n_r$ ，是单元刚度阵，相对于向量 \mathbf{a} 而言的。

设将单元出口位移向量记为 \mathbf{d}_e ，则有

$$\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{d}_e, \quad E_e = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{R}_e \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{R}_e \mathbf{d}_e \quad (6.3)$$

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{T} \quad (6.4)$$

\mathbf{R}_e 即是单元刚度阵。

\mathbf{R}_a 的元素计算公式为

$$(\mathbf{R}_a)_{i,j} = \int_{-\alpha}^{\alpha} [s_{ri}(\theta) u_j(\theta) + s_{\theta i}(\theta) v_j(\theta)] d\theta \quad (6.5)$$

Betti原理保证了 \mathbf{R}_a 阵的对称性。

七、奇点元的有限元法的议论

上节讨论了分析元与有限元的连结，为的是应力强度因子。这里议论奇点元本身的有限元。上文给出了分析法对各向同性奇点元的计算，对较复杂情况或三维问题，纯分析法就困难了。哈密顿体系分离变量只能将偏微分方程降低一维，此时横向用有限元分析其本征问题不失为一条可行的途径。推导有限元的列式最好有变分原理可供使用，而本文的推导着重运用了变分原理，而且自由边界条件可以由变分的自然边界条件来满足。这些给有限元法的运用打下了良好的基础。应当看到，对于半径向的坐标 ξ (或 r) 并未用有限元法离散，因此对于本征方程(3.3)的有限元分析仍是半解析的有限元，这一点很重要。本征值给出了奇点的性质。

具体的有限元列式及计算留待以后了。

八、结 语

应用力学中有许多自模拟的课题，弹性力学扇形区问题是其中之一。这类问题往往可以通过变分原理及变量代换等手段将方程导向哈密顿体系，然后可以用分离变量、本征函数展开及共轭辛正交归一等相应的数学工具来处理一些应用问题。本文通过平面弹性扇形域的本征解显示了其数学方法。这套方法可用于某些有断裂或复合材料的有限元分析程序中。

参 考 文 献

- [1] Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 2nd ed, McGraw-Hill, NY (1951).
- [2] 钱伟长、叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社 (1956).

- [3] 钟万颢、钟翔翔, 计算结构力学、最优控制及偏微分方程半解析法, 计算结构力学及其应用, 7(1) (1990), 1—15.
- [4] 钟万颢、钟翔翔, LQ 控制区段混合能矩阵的微分方程及其应用, 自动化学报, 18(3) (1992), 325—331.
- [5] Zhong Wan-xie and Zhong Xiang-xiang, Elliptic partial differential equation and optimal control, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 8(2) (1992), 149—169.
- [6] 钟万颢, 条形域平面弹性问题与哈密尔顿体系, 大连理工大学学报, 31(4) (1991), 373—384.
- [7] Zhong Wan-xie and Yang Zai-shi, Partial differential equations and Hamiltonian system, *Computational Mechanics in Structural Engineering*, eds. Cheng, F. Y. and Fu Zi-zhi, Elsevier (1992), 32—48.
- [8] 俞寿文, 薄膜—基底的几个力学问题, 力学与实践, 15(4) (1993), 1—8.
- [9] 钱伟长, 《变分法及有限元 (上册) 》, 科学出版社 (1980).
- [10] 胡海昌, 《弹性力学中的变分原理及应用》, 科学出版社 (1981).

Plane Elasticity in Sectorial Domain and the Hamiltonian System

Zhong Wan-xie

(*Dalian University of Technology, Dalian*)

Abstract

The governing equations of plane elasticity in sectorial domain are derived to be in Hamiltonian form via variable substitutes and variational principles. The method of separation of variables and eigenfunction expansion method are derived to solve the finite element analytically for the sectorial domain elasticity problem, so that such kind of analytical element can be installed into FEM program systems. It demonstrates the potential of the Hamiltonian system theory and symplectic mathematics.

Key words elasticity, Hamiltonian system, symplectic