应用数学和力学，第16卷 第1期(1995年1月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高阶导数的插值公式*

桂 祖 华

(上海交通大学，1994年3月15日收到)

摘　要

本文我们得到一种插值公式，它通过一系列点，且满足该点列上的初始高阶导数值．最后还给出这种插值公式的误差估计

关键词　多中心泰勒定理　插值公式　误差估计

一、引　言

在造船工业、航空工业和汽车制造工业中经常遇到几何外形设计问题．例如：当设计者对于船体的肋骨线进行设计时，他必须根据平面上若干点画出一条曲线进行贴近拟合．当制造汽车时，人们先做一个手型粘土模型，把模型的各块曲面分成曲线网，然后进行设计，如此等等．

样条函数和有限元法是解决这类问题的很好方法．

通常以给定若干点函数值 $f(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为基础的插值称为拉格朗日(Lagrange)插值．当在给定的若干点上已知其初始函数值$f(x_i)$和导数值$f'(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$时，我们还可以有导数插值，即埃米特(Hermite)插值．

本文我们研究更一般情况，并得到一种新的插值公式，它不仅满足初始函数值$f(x_i)$，而且满足初始高阶导数值$f^{(j)}(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,h_i-1$，$h_i$是正整数)，称它为高阶导数插值公式．

将这种插值公式应用于曲线拟合和匹配曲面，可以得到很好的结果．

最后，我们还给出这种插值公式的误差估计．显然在近似计算中它是很有用的．

二、已 知 定 理

在论文[1]，[2]中笔者已得到下面的多中心泰勒定理．

设$f(x)$是在闭区间$[a,b]$上，具有$S=\sum\limits_{i=1}^{n} h_i$阶导数的函数．

我们用论文[3]的记号

* 戴世强推荐．

$$X_i \equiv x - x_i,\ x_i \neq \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$Q(x) \equiv X_1^{h_1} X_2^{h_2} \cdots X_n^{h_n} \qquad (h_1 \geqslant h_2 \geqslant \cdots \geqslant h_n \geqslant 0)$$

$h_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是正整数。

$$f\left[X_i^{h_i}\right] \equiv \left(\frac{f(x)}{Q(x)} X_i^{h_i}\right)_{x=x_i} + \left(\frac{f(x)}{Q(x)} X_i^{h_i}\right)'_{x=x_i} X_i +$$

$$\cdots + \left(\frac{f(x)}{Q(x)} X_i^{h_i}\right)^{(h_i-1)}_{x=x_i} \frac{X_i^{h_i-1}}{(h_i-1)!} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$P(x) \equiv f\left[X_1^{h_1}\right] X_2^{h_2} \cdots X_n^{h_n} + X_1^{h_1} f\left[X_2^{h_2}\right] X_3^{h_3} \cdots X_n^{h_n} + \cdots + X_1^{h_1} \cdots X_{n-1}^{h_{n-1}} f\left[X_n^{h_n}\right].$$

定理 设$f(x)$是在闭区间$[a,\ b]$上，具有S阶导数，对于$x,\ x_i \in [a,\ b]\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则至少存在一点$C \in (m,\ M)$. 这里 $M=\max(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x)$，$m=\min(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x)$。

使成立

$$R_f(x) = \frac{Q(x)}{S!} f^{(S)}(C),$$

其中 $$R_f(x) \equiv f(x) - P(x).$$

三、高阶导数的插值公式

公式 当给定上述的函数$f(x)$的函数值$f(x_i)$和高阶导数值$f^{(j)}(x_i)\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ h_i-1)$时，则有

$$f(x) = F(x) + R_f(x)$$

其中 $$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{h_i-1} f^{(j)}(x_i) a_{ij}(x),$$

$$a_{ij}(x) = \frac{Q(x)}{X_i^{h_i}} \sum_{k=0}^{h_i-1-j} \frac{1}{j!k!} \left(\frac{X_i^{h_i}}{Q(x)}\right)^{(k}_{x=x_i} X_i^{j+k}$$

$$f^{(0)}(x_i) \equiv f(x_i).$$

$a_{ij}(x)$称为插值基函数。

证明 记

$$G_i(x) = G_i^{(0)}(x) = \frac{X_i^{h_i}}{Q(x)},$$

我们有

$$\sum_{j=0}^{h_i-1} \left(f(x) G_i(x)\right)^{(j)}_{x=x_i} \frac{X_i^j}{j!}$$

$$= f(x_i) G_i(x_i) + \left(f(x_i)\, G_i'(x_i) + f'(x_i) G_i(x_i)\right) X_i$$

$$+\left(f(x_i)G_i''(x_i)+2f'(x_i)G_i'(x_i)+f''(x_i)G_i(x_i)\right)\frac{1}{2}X_i^2+$$

$$\cdots+\sum_{j=0}^{h_i-1}C_{h_i-1}^{j}f^{(j)}(x_i)G_i^{(h_i-1-j)}(x_i)\frac{X_i^{h_i-1}}{(h_i-1)!}$$

$$=\sum_{j=0}^{h_i-1}\sum_{k=0}^{h_i-1-j}\frac{1}{j!k!}G_i^{(k)}(x_i)f^{(j)}(x_i)X_i^{j+k}$$

其中
$$C_j^i=\frac{j!}{i!(j-i)!},$$

利用这些式子，即可证得。

四、应　用

例1　在上述插值公式中，取$h_i=2(i=1,2,\cdots,n)$，得

$$f(x)=F(x)+R_f(x)$$

其中
$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{1}f^{(j)}(x_i)a_{ij}(x),$$

$$a_{i1}(x)=\frac{H_i(x)}{H_i(x_i)}(x-x_i),$$

$$a_{i0}(x)=\frac{H_i(x)}{H_i(x_i)}+H_i(x)\left(\frac{1}{H_i(x)}\right)'_{x=x_i}(x-x_i)$$

$$H_i(x)=(x-x_1)^2\cdots(x=x_{i-1})^2(x-x_{i+1})^2\cdots(x-x_n)^2$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

$$R_f(x)=\frac{(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(C).$$

例2　在上述公插值公式中，取$h_1=m$，$h_2=n$，得

$$F(x)=\sum_{i=0}^{m-1}f^{(i)}(x_i)a_{1i}(x)+\sum_{j=0}^{n-1}f^{(j)}(x_j)a_{2j}(x)$$

其中

$$a_{1i}(x)=(x-x_2)^n\sum_{k=0}^{m-1-i}\frac{1}{i!k!}(-1)^k\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(x_1-x_2)^{n+k}}(x-x_1)^{i+k},$$

$$a_{2j}(x)=(x-x_1)^m\sum_{k=0}^{n-1-j}\frac{1}{j!k!}(-1)^k\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!(x_2-x_1)^{m+k}}(x-x_2)^{j+k},$$

$$(i=0,1,\cdots,m-1;\ j=0,1,\cdots,n-1)$$

$$R_f(x)=\frac{(x-x_1)^m(x-x_2)^n}{(m+n)!}f^{(m+n)}(C)$$

例3　在上述插值公式中，取$h_i=1(i=1,2,\cdots,n)$得

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)a_i(x)$$

其中
$$a_i(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

$$R_f(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{n!}f^{(n)}(C)$$

这就是拉格朗日(Lagrange)插值公式

参 考 文 献

[1] 桂祖华，多中心泰勒多项式，上海交大科技，4(1992)，62—73.
[2] 桂祖华，多中心泰勒定理及其应用，上海交通大学学报 (1994)(待发表).
[3] 桂祖华，有理函数积分的公式解法，应用数学和力学，15(1))1994)，19—27.

An Interpolation Fomula of the Derivatives of Higher Order

Gui Zu-hua

(The Department of Apllied Mathematics, Shanghai Jiao-tong University, Shanghai)

Abstract

In this article we shall obtain an interpolation formula passing a given serial points and satisfying initial values of the derivatives of higher order in preceding points. Finally we shall give the erroneous estimate of the preceding interpolation formula.

Key words Taylor's theorem of several centers, interpolation formula, erroneous estimate