直边上具有混合支撑段薄矩形板的弯曲

陈 立 志　　付 宝 连

（秦皇岛港务局）　　（燕山大学）

（钱伟长推荐，1993年11月22日收到）

摘　要

在本文中，应用功的互等定理法首次给出了直边上具有简支段与自由段混合支撑的矩形板的精确解析解。

作为比较，我们用有限元法计算了同一问题。比较表明，该解析解是正确的。

关键词　功的互等定理法　支撑段　三角级数的转换

一、引　　言

在文章[1]中，我们首先应用功的互等定理求解了悬臂矩形板的弯曲。之后，我们继续推广功的互等定理的应用于求解板壳力学的平衡、振动和稳定，于求解弹性力学问题的位移方程，因此，形成了一个系统的方法，我们称其为功的互等定理法[2~4]。

在本文中，我们将应用功的互等定理法于求解在直边上具有混合支撑段的薄矩形板的挠曲方程并首先给出了在直边上具有简支段与自由段混合支撑的矩形板的精确解析解。

分析和计算表明，功的互等定理法比叠加法要简便有效得多[6]。

二、功的互等定理法

基本系统，即在一单位集中荷载作用下的四边简支矩形板示于图1。图2所示为在均布载荷q_0作用下的实际系统。

我们假设，实际系统直边自由段的挠度表达式分别为

$$W_{xi}(y)=\sum_{s=1,2}^{\infty}E_{s,i}\sin\frac{s\pi(y-b_i)}{l_i}\qquad(i=1,2,\cdots,\alpha)\tag{2.1}$$

$$W_{\bar{x}i}(y)=\sum_{s=1,2}^{\infty}\bar{E}_{s,i}\sin\frac{s\pi(y-\bar{b}_i)}{\bar{l}_i}\qquad(i=1,2,\cdots,\beta)\tag{2.2}$$

$$W_{yi}(x)=\sum_{s=1,2}^{\infty}F_{s,i}\sin\frac{s\pi(x-a_i)}{h_i}\qquad(i=1,2,\cdots,\gamma)\tag{2.3}$$

$$W_{\bar{y}i}(x)=\sum_{s=1,2}^{\infty}\bar{F}_{s,i}\sin\frac{s\pi(x-\bar{a}_i)}{\bar{h}_i}$$

$$(i=1,2,\cdots,\delta) \qquad (2.4)$$

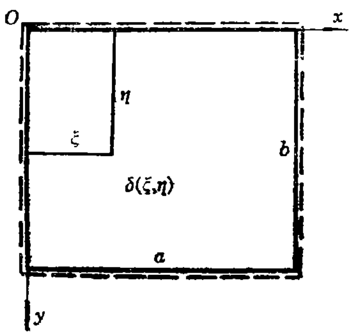

图 1

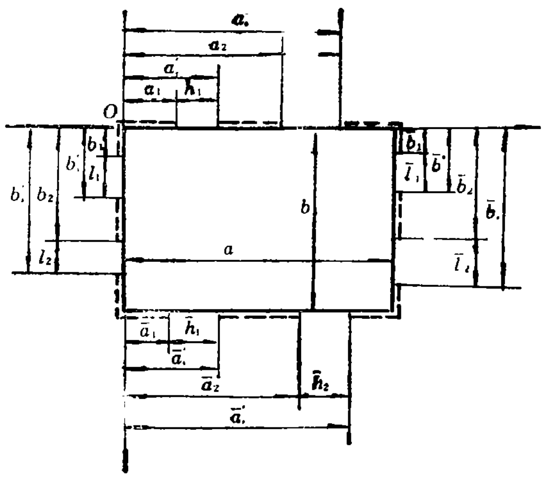

图 2

其中所有的符号示于图2。在基本系统与实际系统之间应用功的互等定理，我们得到

$$W(\xi,\eta)=\int_0^a\int_0^b q_0W_0(x,y,\xi,\eta)dxdy+\sum_{i=1,2}^{\alpha}\int_{b_i}^{b_i'}V_{0x}(x,y,\xi,\eta)\Big|_{x=0}W_{xi}(y)dy$$

$$-\sum_{i=1,2}^{\beta}\int_{\bar{b}_i}^{\bar{b}_i'}V_{0x}(x,y,\xi,\eta)\Big|_{x=a}W_{\bar{x}i}(y)dy$$

$$+\sum_{i=1,2}^{\gamma}\int_{a_i}^{a_i'}V_{0y}(x,y,\xi,\eta)\Big|_{y=0}W_{yi}(x)dx$$

$$-\sum_{i=1,2}^{\delta}\int_{\bar{a}_i}^{\bar{a}_i'}V_{0y}(x,y,\xi,\eta)\Big|_{y=b}W_{\bar{y}i}(x)dx \qquad (2.5)$$

其中　$W_0(x,y,\rho,\eta)$为基本系统的基本解，V_{0x}和V_{0y}是基本解的等效切力。

实际系统的边界条件为

$$V_\xi|_{\xi=0}=0 \qquad (b_i\leqslant\eta\leqslant b_i',i=1,2,\cdots,\alpha) \qquad (2.6)$$

$$V_\xi|_{\xi=a}=0 \qquad (\bar{b}_i\leqslant\eta\leqslant\bar{b}_i',i=1,2,\cdots,\beta) \qquad (2.7)$$

$$V_\eta|_{\eta=0}=0 \qquad (a_i\leqslant\xi\leqslant a_i',i=1,2,\cdots,\gamma) \qquad (2.8)$$

$$V_\eta|_{\eta=b}=0 \qquad (\bar{a}_i\leqslant\xi\leqslant\bar{a}_i',i=1,2,\cdots,\delta) \qquad (2.9)$$

剩下的简支段边界条件自动满足。

转换展开在矩形板每边的三角级数为展开在每一自由段的三角级数，我们得到

$$W(\xi,\eta)=\frac{4q_0b^4}{\pi^5D}\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{1}{n^5}\Big\{1+\frac{1}{2\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{2}}\Big[\frac{\alpha_n}{a}\left(\xi-\frac{a}{2}\right)\operatorname{sh}\frac{\alpha_n}{a}\left(\xi-\frac{a}{2}\right)$$

$$-\left(2+\frac{\alpha_n}{2}\operatorname{th}\frac{\alpha_n}{2}\right)\operatorname{ch}\frac{\alpha_n}{a}\left(\xi-\frac{a}{2}\right)\Big]\Big\}\sin\frac{n\pi\eta}{b}$$

$$-\frac{1}{\pi b}\sum_{i=1,2}^{\alpha} l_i \sum_{s=1,2}^{\infty} sE_{s,i}\sum_{n=1,2}^{\infty}\left\{2+(1-\nu)\left[\alpha_n \operatorname{cth}\alpha_n\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\alpha_n(a-\xi)}{a}\operatorname{cth}\frac{\alpha_n(a-\xi)}{a}\right]\right\}\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}\operatorname{sh}\frac{\alpha_n(a-\xi)}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}$$

$$\cdot\Phi_{sn}(b,l_i)-\frac{1}{\pi b}\sum_{i=1,2}^{\beta}\bar{l}_i\sum_{q=1,2}^{\infty} s\bar{E}_{s,i}\sum_{n=1,2}^{\infty}\left[2+(1-\nu)\right.$$

$$\left.\cdot\left(\alpha_n\operatorname{cth}\alpha_n-\frac{\alpha_n\xi}{a}\operatorname{cth}\frac{\alpha_n\xi}{a}\right)\right]\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_n}\operatorname{sh}\frac{\alpha_n\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\Phi_{sn}(b,\bar{l}_i)$$

$$-\frac{a^3}{b^4}\frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1,2}^{\gamma}h_i\sum_{s=1,2}^{\infty}sF_{s,i}\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}\frac{n\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}$$

$$\cdot\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\Phi_{sm}(a,h_i)+\frac{a^3}{b^4}\frac{4}{\pi^2}\sum_{i=1,2}^{\delta}\bar{h}_i$$

$$\cdot\sum_{s=1,2}^{\infty}s\bar{F}_{s,i}\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}\frac{(-1)^n n\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}$$

$$\cdot\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\Phi_{sm}(a,\bar{h}_i)\tag{2.10}$$

其中　$\alpha_n=\frac{n\pi a}{b}$和$\beta_m=\frac{m\pi b}{a}$.

将式(2.10)代入式(2.6)～(2.9)并转换三角级数，我们分别得到

$$\sum_{i=1,2}^{\alpha} l_i\sum_{s=1,2}^{\infty}sE_{s,i}\sum_{n=1,2}^{\circ}n^3\frac{(1-\nu)\alpha_n+\frac{3+\nu}{2}\operatorname{sh}2\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}\Phi_{sn}(b,l_i)\Phi_{kn}(b,l_j)$$

$$-\sum_{i=1,2}^{\beta}\bar{l}_i\sum_{s=1,2}^{\infty}s\bar{E}_{s,i}\sum_{n=1,2}n^3\frac{(1-\nu)\alpha_n\operatorname{ch}\alpha_n+(3+\nu)\operatorname{sh}\alpha_n}{\operatorname{sh}^2\alpha_n}$$

$$\cdot\Phi_{sn}(b,\bar{l}_i)\Phi_{kn}(b,l_j)+\frac{4}{\pi(\nu-1)}\sum_{i=1,2}^{\gamma}h_i\sum_{s=1,2}^{\infty}sF_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{n=1,2}^{\infty}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{mn\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}\Phi_{sm}(a,h_i)$$

$$\cdot\Phi_{kn}(b,l_j)-\frac{4}{\pi(\nu-1)}\sum_{i=1,2}^{\delta}\bar{h}_i\sum_{s=1,2}s\bar{F}_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{n=1,2}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{(-1)^n mn\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2}$$

$$\cdot\Phi_{sm}(a,\bar{h}_i)\Phi_{kn}(b,l_j)-\frac{q_0b^5}{D}\frac{1}{\pi^4(\nu-1)}\sum_{n=1,2}^{\infty}\frac{\alpha_n(\nu-1)+(3-\nu)\mathrm{sh}\alpha_n}{n^2\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_n}{2}}$$

$$\cdot\Phi_{kn}(b,l_j)=0\qquad(k=1,2,\cdots,\infty;j=1,2,\cdots,\alpha)\qquad(2.11)$$

$$\sum_{i=1,2}^{\alpha}l_i\sum_{s=1,2}^{\infty}sE_{s,i}\sum_{n=1,2}^{\infty}n^3\frac{(1-\nu)\alpha_n\mathrm{ch}\alpha_n+(3+\nu)\mathrm{sh}\alpha_n}{\mathrm{sh}^2\alpha_n}\Phi_{sn}(b,l_i)\Phi_{kn}(b,l_j)$$

$$-\sum_{i=1,2}^{\beta}\bar{l}_i\sum_{s=1,2}^{\infty}s\bar{E}_{s,i}\sum_{n=1,2}^{\infty}n^3\frac{(1-\nu)\alpha_n+\frac{3+\nu}{2}\mathrm{sh}2\alpha_n}{\mathrm{sh}^2\alpha_n}\Phi_{sn}(b,\bar{l}_i)\Phi_{kn}(b,\bar{l}_j)$$

$$+\frac{4}{\pi(\nu-1)}\sum_{i=1,2}^{\gamma}h_i\sum_{s=1,2}^{\infty}sF_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{n=1,2}^{\infty}\sum_{m=1,2}\frac{(-1)^{m+n}mn\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}$$

$$\cdot\Phi_{sm}(a,h_i)\Phi_{kn}(b,l_j)-\frac{4}{\pi(\nu-1)}\sum_{i=1,2}^{\delta}\bar{h}_i\sum_{s=1,2}^{\infty}s\bar{F}_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{n=1,2}^{\infty}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}mn\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{b}n\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}\Phi_{sm}(a,\bar{h}_i)\Phi_{kn}(b,\bar{l}_l)$$

$$+\frac{q_0b^5}{D}\frac{1}{\pi^4(\nu-1)}\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{\alpha_n(\nu-1)+(3-\nu)\mathrm{sh}\alpha_n}{n^2\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_n}{2}}\Phi_{kn}(b,\bar{l}_j)=0$$

$$(k=1,2\cdots\infty;j=1,2\cdots\beta)\qquad(2.12)$$

$$\sum_{i=1,2}^{\alpha}l_i\sum_{s=1,2}^{\infty}sE_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{m=1,2}^{\infty}\sum_{n=1,2}^{\infty}\frac{mn\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}\Phi_{sn}(b,l_i)\Phi_{km}(a,h_j)$$

$$-\sum_{i=1,2}^{\beta}\bar{l}_i\sum_{s=1,2}s\bar{E}_{s,i}\sum_{n=1,2}^{\infty}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{(-1)^m mn\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{a}{a}n\right)^2\right]\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}$$

$$\cdot\Phi_{sn}(b,\bar{l}_i)\Phi_{km}(a,l_j)+\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{\pi(\nu-1)}{4}\sum_{i=1,2}^{\gamma}h_i\sum_{s=1,2}^{\infty}sF_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{m=1,2}^{\infty} m^3 \frac{(1-\nu)\beta_m+\frac{3+\nu}{2}\mathrm{sh}^2\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}\Phi_{sm}(a,h_i)\Phi_{km}(a,h_j)$$

$$-\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{\pi(\nu-1)}{4}\sum_{i=1,2}^{\delta}\bar{h}_i\sum_{s=1,2}^{\infty}s\bar{F}_{s,i}\sum_{m=1,2}^{\infty}m^3\frac{(1-\nu)\beta_m\mathrm{ch}\beta_m+(3+\nu)\mathrm{sh}\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}$$

$$\cdot\Phi_{sm}(a,\bar{h}_i)\Phi_{km}(a,h_j)-\frac{q_0ab^4}{D}\frac{1}{4\pi^3}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{\beta_m(\nu-1)+(3-\nu)\mathrm{sh}\beta_m}{m^2\mathrm{ch}^2\frac{\beta_m}{2}}$$

$$\cdot\Phi_{km}(a,h_j)=0 \qquad (k=1,2,\cdots,\infty;\ j=1,2,\cdots,\gamma) \qquad (2.13)$$

$$\sum_{i=1,2}^{\alpha}l_i\sum_{s=1,2}^{\infty}sE_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{n=1,2}^{\infty}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{(-1)^n mn\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}$$

$$\cdot\Phi_{sn}(b,l_i)\Phi_{km}(a,\bar{h}_j)-\sum_{i=1,2}^{\beta}\bar{l}_i\sum_{s=1,2}^{\infty}s\bar{E}_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{n=1,2}^{\infty}\sum_{m=1,2}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}mn\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}$$

$$\cdot\Phi_{sn}(b,\bar{l}_i)\Phi_{km}(a,\bar{h}_j)+\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{\pi(\nu-1)}{4}\sum_{i=1,2}^{\gamma}h_i\sum_{s=1,2}^{\infty}sF_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{m=1,2}^{\infty}m^3\frac{(1-\nu)\beta_m\mathrm{ch}\beta_m+(3+\nu)\mathrm{sh}\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}\Phi_{sm}(a,h_i)\Phi_{km}(a,\bar{h}_j)$$

$$-\left(\frac{b}{a}\right)^4\frac{\pi(\nu-1)}{4}\sum_{i=1,2}^{\delta}\bar{h}_i\sum_{s=1,2}^{\infty}s\bar{F}_{s,i}$$

$$\cdot\sum_{m=1,2}^{\infty}m^3\frac{(1-\nu)\beta_m+\frac{3+\nu}{2}\mathrm{sh}^2\beta_m}{\mathrm{sh}^2\beta_m}\Phi_{sm}(a,\bar{h}_i)\Phi_{km}(a,\bar{h}_j)$$

$$+\frac{q_0ab^4}{D}\frac{1}{4\pi^3}\sum_{m=1,3}^{\infty}\beta_m\frac{(\nu-1)+(3-\nu)\mathrm{sh}\beta_m}{m^2\mathrm{ch}^2\frac{\beta_m}{2}}\Phi_{km}(a,\bar{h}_j)=0$$

$$(k=1,2\cdots\infty;\ j=1,2\cdots\delta) \qquad (2.14)$$

我们应当指出，为加快收敛速度，一些三角级数必须转换成双曲函数。

三、四边中部为自由段、其余部分为简支段的矩形板

图3所示为一在均布载荷作用下的实际系统。其中 $a_1=\bar{a}_1$，$h_1=\bar{h}_1$，$b_1=\bar{b}_1$ 和 $l_1=\bar{l}_1$，因

此 该板的弯曲是对称的，并且$E_{s,1}=\bar{E}_{s,1}$和$F_{s,1}=\bar{F}_{s,1}$。我们假设

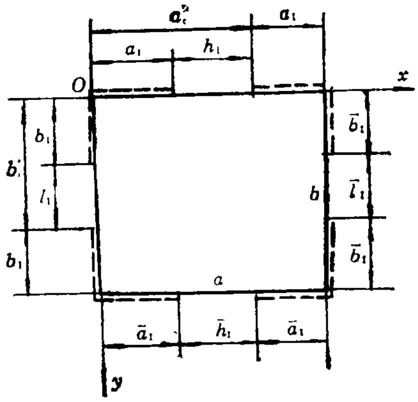

图 3

$$W_{x1}(y)=W_{\bar{x}1}(y)=\sum_{s=1,3}^{\infty}E_{s,1}\sin\frac{s\pi(y-b)}{l_1}\qquad(b_1\leqslant y\leqslant b_1') \tag{3.1}$$

$$W_{y1}(x)=W_{\bar{y}1}(x)=\sum_{s=1,3}^{\infty}F_{s,1}\sin\frac{s\pi(x-a_1)}{h_1}\qquad(a_1\leqslant x\leqslant a_1') \tag{3.2}$$

注意到

$$\Phi_{sm}(a,\ h_1)=-2\frac{\sin\frac{m\pi}{a}}{s^2-\left(\frac{h_1}{a}m\right)^2}\qquad(\text{当}m+s=\text{偶数}) \tag{3.3}$$

$$\Phi_{sm}(a,h_1)=0\qquad(\text{当}m+s=\text{奇数}) \tag{3.4}$$

我们能简化四个边界条件(2.11)～(2.14)为两个边界条件(2.12)和(2.13)，且它们分别为

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1,3}^{\infty}sE_{s,1}\sum_{n=1,3}^{\infty}n^3\frac{(1-\mathrm{ch}\alpha_n)[(1-\nu)\alpha_n-(3+\nu)\mathrm{sh}\alpha_n]}{\mathrm{sh}^2\alpha_n}\\&\cdot\frac{\sin^2\frac{n\pi b_1}{b}}{\left[s^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]\left[k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]}+\frac{8}{\pi(\nu-1)}\frac{h_1}{l_1}\\&\cdot\sum_{s=1,3}^{\infty}sF_{s,1}\sum_{n=1,3}^{\infty}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{mn\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{a}{b}\ \right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}\\&\cdot\frac{\sin\frac{m\pi a_1}{a}}{s^2-\left(\frac{h_1}{a}m\right)^2}\cdot\frac{\sin\frac{n\pi b_1}{b}}{k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2}=-\frac{q_0b^5}{l_1D}\frac{1}{2\pi^4(\nu-1)}\\&\cdot\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{\alpha_n(\nu-1)+(3-\nu)\mathrm{sh}\alpha_n}{n^2\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_n}{2}}\frac{\sin\frac{n\pi b_1}{b}}{k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2}\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\sum_{s=1,3}^{\infty} sE_{s1}, \sum_{m=1,3}^{\infty}\sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{mn\left[m^2+(2-\nu)\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]\left[n^2+(2-\nu)\left(\frac{b}{a}m\right)^2\right]}{\left[m^2+\left(\frac{a}{b}n\right)^2\right]^2}$$

$$\cdot\frac{\sin\frac{n\pi b_1}{b}}{s^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2}\frac{\sin\frac{m\pi a_1}{a}}{k^2-\left(\frac{h_1}{a}m\right)^2}+\frac{b^4}{a^4}\frac{\pi(\nu-1)}{8}$$

$$\cdot\frac{h_1}{l_1}\sum_{s=1,3}^{\infty} sF_{s,1}\sum_{m=1,3}^{\infty} m^3\frac{(1-\mathrm{ch}\beta_m)[(1-\nu)\beta_m-(3+\nu)\mathrm{sh}\beta_m]}{\mathrm{sh}^2\beta_m}$$

$$\cdot\frac{\sin^2\frac{m\pi a_1}{a}}{\left[s^2-\left(\frac{h_1}{a}m\right)^2\right]\left[k^2-\left(\frac{h_1}{a}m\right)^2\right]}=-\frac{q_0b^4a}{l_1D}\frac{1}{16\pi^3}$$

$$\cdot\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{\beta_m(\nu-1)+(3-\nu)\mathrm{sh}\beta_m}{m^2\mathrm{ch}^2\frac{\beta_m}{2}}\frac{\sin\frac{m\pi a_1}{a}}{k^2-\left(\frac{h_1}{a}m\right)^2} \tag{3.6}$$

如果$a=b$和$l_1=h_1=1/3a$，则有$E_{s,1}=F_{s,1}$，(3.5)和(3.6)是相互等价的，且(3.5)成为

$$\sum_{s=1,3}^{\infty} sE_{s,1}\left\{\sum_{n=1,3}^{\infty} n^3\frac{(1-\mathrm{ch}\alpha_n)[(1-\nu)\alpha_n-(3+\nu)\mathrm{sh}\alpha_n]}{\mathrm{sh}^2\alpha_n}\right.$$

$$\cdot\frac{\sin^2\frac{n\pi b_1}{b}}{\left[s^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]\left[k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]}+\frac{8}{\pi(\nu-1)}$$

$$\left.\cdot\sum_{n=1,3}^{\infty}\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{mn[n^2+(2-\nu)m^2][m^2+(2-\nu)n^2]}{(m^2+n^2)^2}\frac{\sin^2\frac{n\pi b_1}{b}}{\left[s^2-\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2\right]\left[k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]}\right\}$$

$$=-\frac{39_0b^4}{D}\frac{1}{2\pi^4(\nu-1)}\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{\alpha_n(\nu-1)+(3-\nu)\mathrm{sh}\alpha_n}{n^2\mathrm{ch}^2\frac{\alpha_n}{2}}\frac{\sin\frac{n\pi b_1}{b}}{k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2}$$

$$(k=1,3,\cdots,\infty) \tag{3.7}$$

由附录，三角级数到双曲函数的转换，式(3.7)转换为

$$\sum_{s=1,3}^{\infty} sE_{s,1}\left\{\sum_{n=1,3}^{\infty} n^3\left[\frac{\alpha_n}{2}(1-\nu)\left(1-\mathrm{th}^2\frac{\alpha_n}{2}\right)-(3+\nu)\,\mathrm{th}\frac{\alpha_n}{2}\right]\right.$$

$$\cdot\frac{\sin^2\frac{n\pi b_1}{b}}{\left[s^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]\left[k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]}-2(1-\nu)$$

$$
\cdot\sum_{m=1,3}^{\infty}\frac{m^4}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\frac{\sin\frac{m\pi b_1}{b}}{s^2-\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\left[\frac{m\left(\frac{l_1}{b}\right)^2}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\frac{\mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}\right.
$$

$$
\left.+\frac{\pi}{4}\left\{\mathrm{th}\frac{m\pi}{2}\frac{\mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}-\frac{l_1}{b}\frac{\mathrm{sh}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}\right\}-\frac{1}{m}\frac{\mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}\right]\Bigg\}
$$

$$
=\frac{3q_0b^4}{D}\frac{1}{2\pi^4(\nu-1)}\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[\alpha_n(\nu-1)\left(1-\mathrm{th}^2\frac{\alpha_n}{2}\right)\right.
$$

$$
\left.+2(3-\nu)\ \mathrm{th}\frac{\alpha_n}{2}\right]\frac{\sin\frac{n\pi b_1}{b}}{k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2}\qquad(k=1,3,\cdots,\infty)\tag{3.8}
$$

当$s:n=l_1:b=1:3$，$k:n=l_1:b=1:3$和$s:m=l_1:b=1:3$时，方程(3.8)是可解的。对k和s都取前十二项，且在VAX-780计算机上计算，我们得表1～表4。

图 1 自由段的挠度系数 $\left(\frac{q_0a^4}{D}\times10^{-3}\right)$

$E_{1.1}$	$E_{3.1}$	$E_{5.1}$	$E_{7.1}$	$E_{9.1}$	$E_{11.1}$
0.27949	−0.015169	−0.0053437	−0.0023878	−0.0012499	−0.00072258

$E_{13.1}$	$E_{15.1}$	$E_{17.1}$	$E_{19.1}$	$E_{21.1}$	$E_{23.1}$
−0.00044555	−0.00028643	−0.00018873	−0.00012553	−0.000082880	−0.000053021

表 2 $y=0$ 自由段的挠度分布$\left(\frac{q_0a^4}{D}\times10^{-3}\right)$

方法 \ x/a	9/24	10/24	11/24	12/24
本文	0.0886	0.192	0.265	0.291
有限元(144单元)	0.083	0.185	0.257	0.283
误差	−6.3%	−3.6%	−3.0%	−2.7%

表 3 $x=\frac{a}{2}$的挠度分布$\left(10^{-2}\times\frac{q_0a^4}{D}\right)$

方法 \ y/b	2/12	2/12	3/12	4/12	5/12	6/12
本文	0.1297	0.2263	0.3081	0.3697	0.4078	0.4207
有限元(144单元)	0.1296	0.2256	0.3073	0.3687	0.4068	0.4196
误差	−0.77%	−0.31%	−0.26%	−0.27%	−0.25%	−0.26%

表 4　　$x=\frac{a}{2}$ 的弯矩分布($10^{-1}\times q_0a^2$)

类别 / 方法 / y/b	M_x			M_y		
	本　文	有限元(144单元)	误　差	本　文	有限元(144单元)	误　差
1/12	0.2438	0.2701	10.8%	0.1587	0.1529	−3.7%
2/12	0.3099	0.3156	1.8%	0.2905	0.2889	−0.55%
3/12	0.3807	0.3811	0.11%	0.3818	0.3818	0
4/12	0.4374	0.4369	−0.11%	0.4404	0.4403	−0.023%
5/12	0.4726	0.4721	−0.11%	0.4736	0.4731	−0.11%
6/12	0.4844	0.4839	−0.10%	0.4844	0.4837	−0.14%

板单元的划分示于图4。

四、结　论

由分析和计算我们可得出下述结论：对于求解直边上有混合支撑段矩形板的挠曲方程，

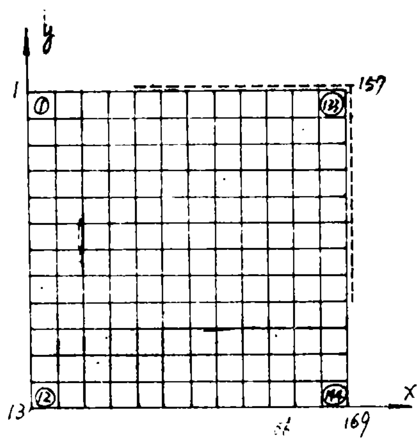

图 4

功的互等定理法是简单、方便和有效的。

必须指出，本法比国内外长期广泛采用的叠加法要简单的多。

附　录

在方程(3.7)左边第二项中，我们假设

$$A=(2-\nu)m^6A_1+[1+(2-\nu)^2]m^3A_2+(2-\nu)mA_3 \tag{A.1}$$

其中

$$A_1=\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi b_1}{b}}{(m^2+n^2)^2\left[k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]} \tag{A.2}$$

$$A_2=\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{n^3\sin\frac{n\pi b_1}{b}}{(m^2+n^2)^2\left[k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]} \tag{A.3}$$

$$A_3=\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{n^5\sin\frac{n\pi b_1}{b}}{(m^2+n^2)^2\left[k^2-\left(\frac{l_1}{b}n\right)^2\right]} \tag{A.4}$$

利用和[5]中(D1)～(D7)相同的推导，我们得

$$A_1=\frac{\pi}{4m}\frac{1}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\left\{\frac{m\left(\frac{l_1}{b}\right)^2}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\frac{\mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{4}\left[\mathrm{th}\frac{m\pi}{2}\frac{\mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}-\frac{l_1}{b}\frac{\mathrm{sh}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}\right]\right\} \tag{A.5}$$

利用和[5]中(D1)相似的方法，我们得到

$$A_2=-\frac{\left(\frac{b}{l_1}\right)^2}{\left[m^2+\left(\frac{b}{l_1}k\right)^2\right]^2}\left[\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{n^3}{n^2-\left(\frac{b}{l_1}k\right)^2}\sin\frac{n\pi b_1}{b}\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{n^3}{n^2+m^2}\sin\frac{n\pi b_1}{b}\right]+\frac{\left(\frac{b}{l_1}\right)^2}{m^2+\left(\frac{b}{l_1}k\right)^2}\sum_{n=2,3}^{\infty}\frac{n^3}{(n^2+m^2)^2}\sin\frac{n\pi b_1}{b} \tag{A.6}$$

注意到

$$\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{n^3}{n^2-\left(\frac{b}{l_1}k\right)^2}\sin\frac{n\pi b_1}{b}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{b}{l_1}k\right)^2\frac{\cos\frac{\pi}{2}k}{\cos\frac{b}{2l_1}k}=0 \quad (k\text{是奇数}) \tag{A.7}$$

$$\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{n^3}{n^2+m^2}\sin\frac{n\pi b_1}{b}=-\frac{\pi}{4}m^2\frac{\mathrm{ch}\frac{m\pi b_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}} \tag{A.8}$$

和

$$\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{n^3}{(n^2+m^2)^2}\sin\frac{n\pi b_1}{b}=-\frac{m\pi^2}{16\mathrm{ch}^2\frac{m\pi}{2}}\left(\mathrm{sh}\frac{m\pi}{2}\ \mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}\right.$$
$$\left.-\frac{l_1}{b}\mathrm{sh}\frac{m\pi l_1}{2b}\ \mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}-\frac{4}{m\pi}\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}\ \mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}\right) \tag{A.9}$$

并且将它们代入到(A.6)中，我们得到

$$A_2=-\frac{\pi}{4}m\frac{1}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\left\{\frac{m\left(\frac{l_1}{b}\right)^2}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\frac{\mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{4}\left[\mathrm{th}\frac{m\pi}{2}\frac{\mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}-\frac{l_1}{b}\frac{\mathrm{sh}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}-\frac{4}{m\pi}\frac{\mathrm{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\mathrm{ch}\frac{m\pi}{2}}\right]\right\} \tag{A.10}$$

用和导出A_2的相同方法，我们得

$$A_3=\frac{\pi}{4}m^3\frac{1}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\left\{\frac{m\left(\frac{l_1}{b}\right)^2}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\frac{\operatorname{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}+\frac{\pi}{4}\left[\operatorname{th}\frac{m\pi}{2}\frac{\operatorname{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{l_1}{b}\frac{\operatorname{sh}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}-\frac{8}{m\pi}\frac{\operatorname{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{4}}\right]\right\} \tag{A.11}$$

将(A.5)，(A.10)和(A.11)代入(A.1)中，在最后得到

$$A=-\frac{\pi}{4}m^4\frac{(1-\nu)^2}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\left\{\frac{m\left(\frac{l_1}{b}\right)^2}{k^2+\left(\frac{l_1}{b}m\right)^2}\frac{\operatorname{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{4}\left(\operatorname{th}\frac{m\pi}{2}\frac{\operatorname{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}-\frac{l_1}{b}\frac{\operatorname{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}-\frac{4}{m\pi}\frac{\operatorname{ch}\frac{m\pi l_1}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}\right)\right\} \tag{A.12}$$

参 考 文 献

[1] 付宝连，求解挠曲方程的一个新方法，东北重型机械学院第三届学术报告会，(1981, 1)。

[2] 付宝连，应用功的互等定理求解具有复杂边界条件矩形板的挠曲方程，应用数学和力学，3(3)，(1982)。

[3] 付宝连，论功的互等定理与叠加原理的等价性，应用数学和力学，6(9)(1985)。

[4] 付宝连，关于求解弹性力学平面问题的功的互等定理法，应用数学和力学，10(5)(1989)。

[5] 陈立志、付宝连，简支与固定混合边界条件矩形薄板的弯曲，东北重型机械学院学报，17(1)，(1993)。

[6] Kurata, M. Bending of simply supported rectangular plates with clamped portions along abitrary sections of the edges, Ingenieur-archiv, Band 27, Heft 6, (1960).

The Bending of Thin Rectangular Plates with Mixed Supported Segments of Straight Edges

Chen Li-zhi

(Qin Huang Dao Port Authority, Qinhuangdao)

Fu Bao-lian

(Yanshan University, Qinhuangdao)

Abstract

In this paper, the exact analytical solution or the rectangular plate having simply supported segments mixed with free segments of straight edges are first given by means of the method of reciprocal theorem.

By comparison, we calculate the same problem by finite element method. The comparision shows that the analytical solution is correct.

Key words the method of reciprocal theorem, supported segment, transformation of trigonometric series