

广义非线性、非定常力学理论及在 粒子物理学中的应用*

杨文熊

(上海交通大学工程力学系, 1994年3月23日收到)

摘 要

本文考虑自由质点作高速非定常运动时其动量出现的非线性效应可按Laurent级数展开并得出非线性和非定常动量的完整表达式。高速度的非线性和非定常现象可进一步推广到质点的非线性和非定常运动学理论, 这理论由第I类Fredholm型积分方程所确定。另外, 根据所得非线性、非定常动量可以导出非线性的力学方程、功和能量、质量和能量诸关系式。文章最后计算了粒子物理学中 μ^+ 介子和快中子运动的实验, 所计算的结果完全被实验所证实。

关键词 广义非线性力学理论 特征速度 Laurent级数, 粒子物理学 μ 介子 快中子

一、引 言

非线性力学的提出和研究由来已久, 但是它仅讨论局部的非线性现象。例如在固体力学中建立非线性板壳理论, 讨论了诸如薄板大挠度问题; 非线性弹性力学讨论了物理非线性和几何非线性问题; 在运动学中仅讨论了质点作非线性振动; 在流体力学中可以说刚刚开始讨论流动稳定性问题, 其结果与实际比较还相差甚远^[1]。

随着现代高新科技的迅速发展, 自然界或生产实践中出现的很多现象就不能用传统的经典的线性理论解释或解决了。例如湍流流场中速度(或加速度)出现多值解问题显然是属于流体微团运动时的非线性和非定常问题。还有在粒子物理学中, 当粒子作高速运动时同样会出现非线性的力学问题……。看来, 研究非线性非定常的现象和质点的运动是力学工作者今后的一大任务, 这也是跨世纪甚至于21世纪的任务。

基于以上的原因, 作者系统地研究自由质点作高速(高加速)运动时出现的非线性, 非定常的力学理论, 并且把所得的理论结果应用到高速粒子物理学中去, 取得了理论计算与实验结果吻合的结果。

二、非线性、非定常力学理论

本文提出的非线性、非定常力学理论是从线性的牛顿力学体系发展起来的, 因为我们人

* 何福保推荐。

类认识自然界、实践一定是从低级到高级，从线性理论到非线性理论的。众所周知，牛顿力学是一切力学的基础，它是以牛顿三大定律、动量定理以及相应的运动定律（伽里略）为依据。因此，我们先从这些定律和定理出发逐步研究当自由质点在以高速度、高加速度时的运动遵守什么规律。

1. 质点的非线性和非定常动量

在牛顿力学中，质点的动量 \mathbf{P} 与其运动速度 \mathbf{v} 成线性比例： $\mathbf{P} \propto \mathbf{v}$ ，若写成等式，则

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \quad (2.1)$$

式中 m 为自由质点的质量。式(2.1)已完全被质点低速度运动所证实。式(2.1)中的 m 实际上是一比例系数而已。倘若质点的速度不断增大而且其值还与其位置 \mathbf{s} 和时间 t 的变化有关： $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{s}, t)$ ，则式(2.1)所表示的动量值有所变化。为了表达式(2.1)的变化，我们可以式(2.1)为基础而进行修正。为了妥善地表达修正，我们试用Laurent级数按 \mathbf{v} 进行展开^[2]，并要求在 \mathbf{v} 不大时就是式(2.1)的表达式：

$$\mathbf{P} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j \mathbf{v}^j \quad (2.2)$$

式(2.2)中的 α_j 是级数第 j 项 \mathbf{v}^j 前的系数。式(2.2)显然是向量幂级数。为了便于分析、需对式(2.2)分为三部分：

$$\mathbf{P} = \sum_{j=-\infty}^{-1} \alpha_j \mathbf{v}^j + \alpha_0 \mathbf{v}^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mathbf{v}^j \quad (2.3)$$

为了满足 $\mathbf{v}=0$ 时 $\mathbf{P}=0$ 的条件，式(2.3)中部分 α_j 必须为零：

$$\alpha_j \equiv 0 \quad (j = -\infty, \dots, -1, 0) \quad (2.4)$$

因而式(2.3)实际上是

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mathbf{v}^j \quad (2.5)$$

进一步考察式(2.5)可知， j 一定是奇序数的，因为 j 为偶序数时，速度的向量性质变为标量性质了，这是不可能的。因此，在 $j=2n(n=1, 2, \dots)$ 时其 \mathbf{v}^j 前的系数一定为零*：

$$\alpha_j = 0 \quad (j = 2n, n = 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

因而式(2.5)又可写成

$$\mathbf{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} \mathbf{v}^{2n+1} \quad (2.7)$$

对于牛顿的动量定理(2.1)，式(2.7)中的系数 $\alpha_{2n+1} \geq 0$ ，例如

$$\alpha_1 = m > 0, \alpha_3 = \alpha_5 = \dots = 0 \quad (2.8)$$

这时式(2.7)退化为式(2.1)。然而当 \mathbf{v} 很大时， $\alpha_3, \alpha_5, \dots$ 则需要确定。为此，首先考察 α_3 。 α_3 一定与 $m(=a_1)$ 有关，因为当质量 m 为零时， $\mathbf{P}=0$ 的。其次，为了量纲的同一化， α_3 还应与系统的固有特征速度（最大值） G_3 有关： $\alpha_3 \propto \frac{m}{G_3^2}$ ，即

*后来研究表明，这种限制是不必要的。

$$\alpha_3 = \epsilon_3 \frac{m}{G_3^2} \tag{2.9}$$

式中 ϵ_3 是一无量纲微量值。由于 ϵ_3 是微小值，故 α_3 也一定是微小的物理量。因而当 v 是普通值时 $\alpha_3 v^3 \ll m v$ ，这时式(2.7)就是式(2.1)。另外，由于式(2.7)对所有的系统都具有相同的效果和形式，例如自由质点在地球系统 E 、太阳系 S 及在银河系统 M 等中运动时都应有

$$\frac{\epsilon_{3E}}{G_{3E}^2} = \frac{\epsilon_{3S}}{G_{3S}^2} = \frac{\epsilon_{3M}}{G_{3M}^2} = \dots = \frac{\epsilon_3}{G_3^2} = \text{const} > 0 \tag{2.10}$$

成立。对于 $\alpha_5, \alpha_7, \dots$ 类似地有

$$\left. \begin{aligned} \alpha_5 &= m \frac{\epsilon_5}{G_5^4} \\ \alpha_7 &= m \frac{\epsilon_7}{G_7^6} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \tag{2.11}$$

这些量都是一不变量，而且可以看到应有：

$$G_3 = G_5 = G_7 = \dots = G \tag{2.12}$$

式中 G 是指所有系统中的特征速度。为了使式(2.12)成立，从近代物理知，宇宙间的最大特征速度就是光在真空中的速度 c ($\sim 3 \times 10^8 \text{m/s}$)，所以有

$$G = c \tag{2.13}$$

这样一来，原来的 $\epsilon_3, \epsilon_5, \dots$ 已并非一定是微量而成为一组小量 c_3, c_5, \dots (< 1)了。这时式(2.7)成为

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} \left(\frac{v}{c}\right)^{2n} \quad (v < c) \tag{2.14}$$

或者写成：

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \left[1 + c_3 \left(\frac{v}{c}\right)^2 + c_5 \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots \right] \quad (v < c) \tag{2.15}$$

注意：式(2.14)或(2.15)在 $v < c$ 时为一收敛级数(物理实践所确定的)。在当自由质点以匀速度且接近于光速 c 时，狭义相对论提供了完全确定的动量表达式^[3]

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \cdot \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]^{-1/2} \quad (v < c) \tag{2.16}$$

当把式(2.16)展开时，即

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \frac{5}{16} \left(\frac{v}{c}\right)^6 + \dots \right] \tag{2.17}$$

而式(2.15)对质点作高匀速运动是同样成立的。这样，式(2.15)和式(2.17)两者相同。由此式(2.15)中的系数分别为

$$c_3 = \frac{1}{2}; \quad c_5 = \frac{3}{8}; \quad c_7 = \frac{5}{16}; \quad \dots \tag{2.18}$$

由此，由Laurent级数对 v 展开的非线性、非定常动量为

$$\mathbf{P} = m \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{2.19}$$

式(2.19)意味着质点作高速运动时其动量对 v 作 $\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right]^{-1/2}$ 的修正值(增大)。

2. 质点非线性、非定常的运动学关系

现在来研究质点作高速运动时位置 s 、时间 t 和速度 v 的运动学理论。对于线性的经典运动学理论， v 乃是 s 对时间 t 的一阶导数：

$$\frac{ds}{dt} = v \quad (2.20)$$

然而当质点作高速且又是非定常运动时，式(2.20)中的 v 也应与式(2.1)一样按 Laurent 级数展开，只不过在式(2.8)中令 $\alpha_1 = 1$ 。因此，完全与以前相同的方法对式(2.20)进行修正：

$$\frac{ds}{dt} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (v < c) \quad (2.21)$$

式(2.21)便是质点高速运动时的非线性非定常的导数式。若对此式进一步运算：

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \frac{v(s, t)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} dt + s_1 \quad (2.22)$$

式(2.22)是向量式的第 I 类 Fredholm 积分方程^[4]， $v(s, t) / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 为积分方程的核函数且呈非线性形式。若质点作的是匀速度运动，则式(2.22)简化为

$$s = \frac{vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + s_0 \quad (2.23)$$

式(2.22)和式(2.23)中的 s_1 和 s_0 都起始时的位置。设起始位置为零，则按式(2.23)的匀速运动求得匀速度为

$$v = \frac{s}{t} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{s^2}{c^2 t^2}}} \quad (2.24)$$

式(2.24)意味着质点匀速运动时，距离和时间对 v 的关系式。特别当测量到距离 s 和在 s 内质点耗时 t 为已知后， v 就应按式(2.24)求得。一般在低中速时，由于 $\frac{s^2}{c^2 t^2} \ll 1$ ，式(2.24)就回到一般的 $v = s/t$ 。

3. 质点非线性、非定常运动的动力学关系

我们可以讨论具有加速状态时质点的受力问题。为此，只要对式(2.19)进行求导数， dP/dt ，得：

$$F = m \frac{\frac{dv}{dt}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (2.25)$$

式(2.25)中 dv/dt 是加速度。在经典力学中，加速度表示为

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (2.26)$$

由于 a 为一向量，但当质点作高加速度运动时式(2.26)中的 a 与式(2.1)一样应按 Laurent 级数展开。在展开过程中引入一最大加速度 A 作为所有系统的特征加速度。当 $|a| < A$ 时也有

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}} \quad (2.27)$$

成立。所以质点的受力状态其最普遍的表示式为

$$\mathbf{F} = m \frac{\mathbf{a}}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2} \left[1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (2.28)$$

式(2.28)中的 A 存在与否将另文研究。不过在这里可对式(2.28)提出以下三种特殊情况来讨论:

$$(i) \quad \text{当 } |\mathbf{a}| \ll A, \quad \mathbf{F} = m \frac{\mathbf{a}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \quad (2.29)$$

$$(ii) \quad \text{当 } |\mathbf{v}| \ll c, \quad \mathbf{F} = m \frac{\mathbf{a}}{\left(1 - \frac{a^2}{A^2}\right)^{1/2}} \quad (2.30)$$

$$(iii) \quad \text{当 } |\mathbf{a}| \ll A, \text{ 又 } |\mathbf{v}| \ll c, \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (2.31)$$

式(2.31)正是普通情况的牛顿第二定律,是式(2.28)的特殊情况。

三、非线性、非定常力学理论的能量关系

自由质点作高速度、高加速度的运动时也有能量的关系式,但这种关系将看到与普通牛顿力学系统不同。对能量守恒而言,外力 \mathbf{F} 对质点所作的功 W 是

$$W = \int_0^s \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.1)$$

为质点动能 E 的增加, E_k 。而积分号下 \mathbf{F} 应取式(2.19),

$$E_k = \int_0^s \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int_0^s d \left(\frac{mv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right) \frac{d\mathbf{s}}{dt} \quad (3.2)$$

对上式中 $d\mathbf{s}/dt$ 应采用式(2.21),故上式可写成:

$$E_k = m \int_0^v \frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \cdot d \left(\frac{v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \right) = \frac{1}{2} m \left(\frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) \quad (3.3)$$

根据上式,若给出能量 E_k ,则可以求出 v^2 :

$$v^2 = \frac{2E_k c^2}{mc^2 + 2E_k} \quad (3.4)$$

上式的分母中与 $2E_k$ 一项并列的项 mc^2 是与速度 v^2 无关且为一定值。 mc^2 是能量项它是质量 m 的固有能量 E_0 :

$$E_0 = mc^2 \quad (3.5)$$

式(3.5)同样被称质能关系^[3]。式(3.3)或式(3.4)给出了质点非线性和非定常运动时的能量关系式。以下我们籍文中的运动学和能量关系式计算粒子物理学中高速粒子运动时的著名实验。

四、粒子物理学中应用举例

在质点作普通运动时就不会出现非线性问题的。因此牛顿力学就主宰了运动规律。但是

当质点作很高速度或很大的加速度时, 牛顿力学就会出现很大的偏离, 这表示质点进入了非线性范围的运动了。但目前由于普通质量作高速运动甚少, 我们还是列举高速粒子物理学中粒子运动为例而且它们都被实验过的。

例1 计算 μ^{\pm} 介子从1920 m (6300英尺)高山顶上到海平面 3m 处每小时衰减的个数^[5]。1963年, 在美国New Hampshire的Mt. Washington山顶上 Fricch和Smith教授测出 μ^{\pm} 介子每小时为568个, 而在海平面处, μ^{\pm} 介子还幸存每小时达412个之多。

为了计算 μ^{\pm} 介子在海平面(0m)处幸存的数据, 我们采用式(2.23)。为此, 先计算从1920m到海平面3m所需时间 t :

$$t = \frac{s}{v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \quad (4.1)$$

由于已知 μ^{\pm} 介子的速度 $v = 0.994c$ ^[6], $s = 1920 - 3 = 1917\text{m}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 则

$$t = \frac{1917}{0.994 \times 3 \times 10^8} \cdot \left(1 - \frac{8.89}{9}\right)^{1/2} = 0.7107 \times 10^{-6} \text{ s}$$

又已知 μ^{\pm} 介子的平均寿命 $\tau = 2.21 \times 10^{-6} \text{ s}$, 则按粒子衰减公式

$$N = N_0 \exp(-t/\tau) \quad (4.2)$$

计算每小时的个数 N 。 $N_0 = 568$ 个, $t = 0.7107 \times 10^{-6} \text{ s}$, 则

$$N = 568 \exp(-0.7107 \times 10^{-6} / 2.21 \times 10^{-6}) = 412 \text{ 个}$$

这个数据与实测取得惊人的符合(见图1)。



图1 海平面测得 μ^{\pm} 介子数^{[5],[6]}

例2 计算 μ^{\pm} 介子穿过大气层的高位能量

已知从例1中给出 μ^{\pm} 介子穿过大气层的速度是 $0.994c$, 因此其所需的能量应按式(3.3)计算。从粒子 μ^{\pm} 介子的质量为 $m_{\mu} = 207m_e$ (电子质量 $= 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$) $= 207 \times 9.1 \times 10^{-31} = 1.88 \times 10^{-28} \text{ kg}$ 。所以

$$E_{k\mu} = \frac{1}{2} m_{\mu} \left(\frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right) = 6.84 \times 10^{-10} \text{ N} \cdot \text{m}.$$

由于 $1 \text{ Mev} = 1.6075 \times 10^{-13} \text{ N} \cdot \text{m}$, 所以上式

$$E_{k\mu} = 4.25 \times 10^3 \text{ Mev} = 4.25 \text{ Gev}.$$

这个数据完全在[7]测出 μ^{\pm} 穿过大气层时至少要大于几个G.(京)电子伏的能量范围内。

例3. 计算对 $\text{Li}^7(p, n)\text{Be}^7(0, 1)$ 反应产生的快中子群真正飞行的时间。由实验知, 两群快中子的能量分别为 7.8 Mev 和 7.4 Mev , 飞行的距离为 7.3 m ^[8]。

我们按两群不同能量的快中子计算出中子真正飞行时间 t 。

(1) 已知 $E_{kn_1} = 7.8 \text{ Mev}$, 中子的质量 $m_n = 1.67496 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 按式(3.4)计算速度:

$$v_{7.8}^2 = \frac{2 \times 7.8 \times 1.6075 \times 10^{-13} \times 9 \times 10^{16}}{1.67496 \times 10^{-27} \times 9 \times 10^{16} + 2 \times 7.8 \times 1.6075 \times 10^{-13}}$$

$$= 0.1473 \times 10^{16} \text{m}^2/\text{s}^2,$$

$$v_{7.8} = 0.3837 \times 10^8 \text{m/s}.$$

飞行的时间可按式(2.23)计算:

$$t_{7.8} = \frac{7.3}{0.3837 \times 10^8} \sqrt{1 - \left(\frac{0.1473}{9}\right)} = 188.7 \times 10^{-9} \text{s}.$$

(2) 已知 $E_{kn_2} = 7.4 \text{Mev}$, 与上述一样计算, 其结果:

$$v_{7.4}^2 = 0.1398 \times 10^{16} \text{m}^2/\text{s}^2,$$

$$v_{7.4} = 0.3739 \times 10^8 \text{m/s},$$

$$t_{7.4} = 193.7 \times 10^{-9} \text{s}.$$

按实验[8]测到结果: $t_{7.8} \sim 188 \times 10^{-9} \text{s}$, $t_{7.4} \sim 193 \times 10^{-9} \text{s}$ (见图2)。两者都非常接近。

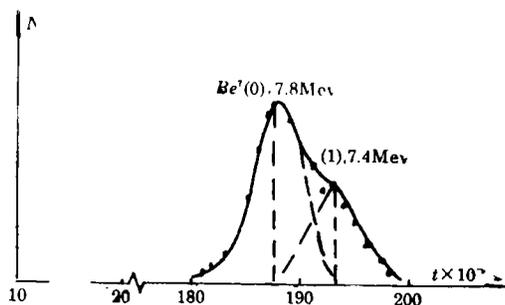


图2 两群快中子真正飞行时间^[8]

五、几点结论

1. 取任何系统中自由质点的最大极限速度是真空中光速 $c (\sim 3 \times 10^8 \text{m/s})$ 为系统的特征速度, 因此在 $|v| < c$ 情况下, 质点运动所产生非线性效应都会很好的收敛。

2. 通过对力学系统中动量 $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ 的Laurent级数展开得到 \mathbf{P} 的非线性、非定常表示式:

$$\mathbf{P} = m \left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \quad (|v| < c) \quad (5.1)$$

类似地还有:

$$\mathbf{s} = \int \frac{\mathbf{v} dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \mathbf{s}_0 \quad (|v| < c) \quad (5.2)$$

及

$$\mathbf{s} = \frac{t\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + \mathbf{s}_0 \quad (|v| < c) \quad (5.3)$$

式(5.3)中 v 是匀速度。还有能量关系:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \frac{v^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}, \quad v^2 = \frac{2E_k c^2}{E_0 + 2E_k} \quad (5.4)$$

式(5.4)中

$$E_0 = mc^2. \quad (5.5)$$

对于质点受力状态:

$$F = m \frac{a}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2} \left[1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2\right]^{1/2}} \quad (|v| < c, |a| < A) \quad (5.9)$$

式(44)中当 $|v| \ll c$, $|a| \ll A$ 时, 系统中质点受力为牛顿第二定律.

3. 文章对粒子 μ^- 介子和快中子群的运动及能量的实例作了计算, 其结果与实测结果符合得很好.

致谢 感谢上海交通大学的杨长俊、罗传径等专家与作者有益的交谈和启示.

参 考 文 献

- [1] 叶开沅、黄执中等, 《中国大百科全书·力学》, 中国大百科全书出版社(1985).
- [2] Yang Wen-xiong, Gu Er-zuo and Zhu Min, Extraction of characteristic roots on Bessel-Neumann's mixed equations, *Applied Mathematics and Mechanics*, 11 (8)(1990), 751.
- [3] Kittel, C., W. D. Knight, M. A. Rudezman, *Mechanics, Berkeley Physics Course*, Vol.1, McGraw-Hill(1973).
- [4] 陈传璋等, 《积分方程及其应用》, 上海科学技术出版社(1986).
- [5] Frisch, D. H., J. H. Smith, Measurement of the relativistic time-dilation using Mu-mesons, *Am. J. Phys.*, 31, (1963), 342.
- [6] French, A. P., *Special Relativity*, W. W. Norton & Comp. (1968).
- [7] 高能物理研究所宇宙线室、空间物理研究所宇宙线室, 《物理学词典》下册: 宇宙线物理学, 科学出版社(1988).
- [8] Рыбаков Б. В., В. А. Сидоров, Спектрометрия быстрых нейтронов, Приложение No 6 к Журналу "Атомная Энергия"(1958).

Generalized Theory of Nonlinear and Unsteady Mechanics and Applications in Particles Physics

Yang Wen-xiong

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai*)

Abstract

The present paper considers that the momentum of a high speed free particle motion appearing in nonlinear and unsteady effects may be extended by using Laurent series and their complete expressions are obtained. These phenomena also may expand to the theory of kinematics and may be determined by the first kind of Fredholm's integral equation. In addition, according to the nonlinear, unsteady momentum the relations with the nonlinear mechanics equations, work done and energy, mass and energy may be obtained. At last, this paper also calculates those results which experimented with Mu mesons, μ^\pm and fast neutrons motion in particles physics, these results calculated are in agreement with experiments completely.

Key words theory of generalized nonlinear mechanics, characteristic speed, Laurent series, Particle Physics, μ^\pm meson, fast neutron