应用数学和力学，第16卷 第2期（1995年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于一类四阶非线性系统李雅普诺夫函数构造的研究*

梁 在 中

（北京工业大学应用数学系，1994年4月1日收到）

摘 要

本文导出了四维线性系统的李雅普诺夫函数公式，研究了一类四阶非线性系统平凡解的稳定性.

关键词 非线性 稳定性 李雅普诺夫函数

文献[1]导出了二阶和三阶常系数线性系统的李雅普诺夫函数公式，并应用相应的公式研究了二阶和三阶非线性系统李雅普诺夫函数的构造与应用，以及解决了一类三阶非线性系统的平凡解的全局稳定性问题。本文利用类似的方法，首先导出四维常系数线性系统的李雅普诺夫函数公式；其次，再分析一类四阶线性系统的李雅普诺夫函数的构造；最后，利用类比的方法，研究一类四阶非线性系统平凡解的稳定性。

一、四维常系数线性系统李雅普诺夫函数

考虑四维常系数线性方程组

$$d\boldsymbol{x}/dt=A\boldsymbol{x} \tag{1.1}$$

其中

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}$$

$a_{ik}(i,k=1,2,3,4)$ 均为实常数。

设方程组(1.1)的系数矩阵A的特征方程

$$|A-\lambda E|=\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}-\lambda&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}-\lambda&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}-\lambda\end{bmatrix}=0$$

* 丁协平推荐.

的所有根都具有负实部，则根据文献 [1] 中的有关定理可知，对预先任意给定的负定二次型

$$w(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i,k=1}^{4} w_{ik}x_ix_k$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \\ w_{41} & w_{42} & w_{43} & w_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$(w_{ik}=w_{ki},\ i,\ k=1,\ 2,\ 3,4)$，都可找到唯一的正定二次型

$$v(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i,k=1}^{4} v_{ik}x_ix_k$$

$$= (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$(v_{ik}=v_{ki},\ i,k=1,2,3,4)$，使得

$$dv/dt = 2w$$

即

$$\begin{aligned} dv/dt &= 2(v_{11}x_1+v_{12}x_2+v_{13}x_3+v_{14}x_4)(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4) \\ &\quad +2(v_{12}x_1+v_{22}x_2+v_{23}x_3+v_{24}x_4)(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4) \\ &\quad +2(v_{13}x_1+v_{23}x_2+v_{33}x_3+v_{34}x_4)(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4) \\ &\quad +2(v_{14}x_1+v_{24}x_2+v_{34}x_3+v_{44}x_4)(a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4) \\ &= 2(w_{11}x_1^2+2w_{12}x_1x_2+2w_{13}x_1x_3+2w_{14}x_1x_4+w_{22}x_2^2+2w_{23}x_2x_3 \\ &\quad +2w_{24}x_2x_4+w_{33}x_3^2+2w_{34}x_3x_4+w_{44}x_4^2) \end{aligned} \tag{1.2}$$

比较(1.2)式两端同次幂的系数得

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}v_{11}+a_{21}v_{12}+a_{31}v_{13}+a_{41}v_{14}+0\cdot v_{22}+0\cdot v_{23}+0\cdot v_{24}+0\cdot v_{33}+0\cdot v_{34}+0\cdot v_{44}=w_{11} \\ &a_{12}v_{11}+(a_{11}+a_{22})v_{12}+a_{32}v_{13}+a_{42}v_{14}+a_{21}v_{22}+a_{31}v_{23}+a_{41}v_{24}+0\cdot v_{33}+0\cdot v_{34} \\ &\qquad +0\cdot v_{44}=2w_{12} \\ &a_{13}v_{11}+a_{23}v_{12}+(a_{11}+a_{33})v_{13}+a_{43}v_{14}+0\cdot v_{22}+a_{21}v_{23}+0\cdot v_{24}+a_{31}v_{33} \\ &\qquad +a_{41}v_{34}+0\cdot v_{44}=2w_{13} \\ &a_{14}v_{11}+a_{24}v_{12}+a_{34}v_{13}+(a_{11}+a_{44})v_{14}+0\cdot v_{22}+0\cdot v_{23}+a_{21}v_{24}+0\cdot v_{33}+a_{31}v_{34} \\ &\qquad +a_{41}v_{44}=2w_{14} \\ &0\cdot v_{11}+a_{12}v_{12}+0\cdot v_{13}+0\cdot v_{14}+a_{22}v_{22}+a_{32}v_{23}+a_{42}v_{24}+0\cdot v_{33}+0\cdot v_{34}+0\cdot v_{44}=w_{22} \\ &0\cdot v_{11}+a_{13}v_{12}+a_{12}v_{13}+0\cdot v_{14}+a_{23}v_{22}+(a_{22}+a_{33})v_{23}+a_{43}v_{24}+a_{32}v_{33}+a_{42}v_{34} \\ &\qquad +0\cdot v_{44}=2w_{23} \\ &0\cdot v_{11}+a_{14}v_{12}+0\cdot v_{13}+a_{12}v_{14}+a_{24}v_{22}+a_{34}v_{23}+(a_{22}+a_{44})v_{24}+0\cdot v_{33}+a_{32}v_{34} \\ &\qquad +a_{42}v_{44}=2w_{24} \\ &0\cdot v_{11}+0\cdot v_{12}+a_{13}v_{13}+0\cdot v_{14}+0\cdot v_{22}+a_{23}v_{23}+0\cdot v_{24}+a_{33}v_{33}+a_{43}v_{34}+0\cdot v_{44}=w_{33} \\ &0\cdot v_{11}+0\cdot v_{12}+a_{14}v_{13}+a_{13}v_{14}+0\cdot v_{22}+a_{24}v_{23}+a_{23}v_{24}+a_{34}v_{33}+(a_{33}+a_{44})v_{34} \\ &\qquad +a_{43}v_{44}=2w_{34} \\ &0\cdot v_{11}+0\cdot v_{12}+0\cdot v_{13}+a_{14}v_{14}+0\cdot v_{22}+0\cdot v_{23}+a_{24}v_{24}+0\cdot v_{33}+a_{34}v_{34}+a_{44}v_{44}=w_{44} \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

方程组(1.3)的系数行列式为

$$
\Delta=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & 0 & 0 & 0\\
a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & a_{43} & 0 & a_{21} & 0 & a_{31} & a_{41} & 0\\
a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{11}+a_{44} & 0 & 0 & a_{21} & 0 & a_{31} & a_{41}\\
0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{22} & a_{32} & a_{42} & 0 & 0 & 0\\
0 & a_{13} & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{22}+a_{33} & a_{43} & a_{32} & a_{42} & 0\\
0 & a_{14} & 0 & a_{12} & a_{24} & a_{34} & a_{22}+a_{44} & 0 & a_{32} & a_{42}\\
0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & a_{33} & a_{43} & 0\\
0 & 0 & a_{14} & a_{13} & 0 & a_{24} & a_{23} & a_{34} & a_{33}+a_{44} & a_{43}\\
0 & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & a_{34} & a_{44}
\end{vmatrix}
\tag{1.4}
$$

根据克莱姆法则解方程组(1.3)得

$$v_{ik}=\Delta_{ik}/\Delta \qquad (i,k=1,2,3,4)$$

其中Δ_{ik}表示从行列式Δ中用方程组(1.3)的右端去代替这个方程组中v_{ik}前面的系数而得到的行列式，所以，

$$v(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_{i,k=1}^{4}v_{ik}x_ix_k=\frac{1}{\Delta}\sum_{i,k=1}^{4}\Delta_{ik}x_ix_k$$

$$
=-\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}
0 & x_1^2 & 2x_1x_2 & 2x_1x_3 & 2x_1x_4 & x_2^2 & 2x_2x_3 & 2x_2x_4 & x_3^2 & 2x_3x_4 & x_4^2\\
w_{11} & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2w_{12} & a_{12} & a_{11}+a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & 0 & 0 & 0\\
2w_{13} & a_{13} & a_{23} & a_{11}+a_{33} & a_{43} & 0 & a_{21} & 0 & a_{31} & a_{41} & 0\\
2w_{14} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{11}+a_{44} & 0 & 0 & a_{21} & 0 & a_{31} & a_{41}\\
w_{22} & 0 & a_{12} & 0 & 0 & a_{22} & a_{32} & a_{42} & 0 & 0 & 0\\
2w_{23} & 0 & a_{13} & a_{12} & 0 & a_{23} & a_{22}+a_{33} & a_{43} & a_{32} & a_{42} & 0\\
2w_{24} & 0 & a_{14} & 0 & a_{12} & a_{24} & a_{34} & a_{22}+a_{44} & 0 & a_{32} & a_{42}\\
w_{33} & 0 & 0 & a_{13} & 0 & 0 & a_{23} & 0 & a_{33} & a_{43} & 0\\
2w_{34} & 0 & 0 & a_{14} & a_{13} & 0 & a_{24} & a_{23} & a_{34} & a_{33}+a_{44} & a_{43}\\
w_{44} & 0 & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0 & a_{24} & 0 & a_{34} & a_{44}
\end{vmatrix}
\tag{1.5}
$$

这就是四维常系数线性系统的李雅普诺夫函数公式。

二、四阶线性系统李雅普诺夫函数的构造

考虑四阶常系数线性方程

$$x^{4}+ax^{3}+bx^{2}+cx^{1}+dx=0 \tag{2.1}$$

根据霍维茨定理[2]，方程(2.1)对应的特征方程

$$\lambda^4+a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0$$

的所有根都具有负实部的必要充分条件是下列不等式成立

$$a>0,\ \begin{vmatrix} a & 1 \\ c & b \end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ c & b & a \\ 0 & d & c \end{vmatrix}>0,\ d>0$$

即 $$a>0\quad ab-c>0,\ abc-c^2-a^2d>0,\ d>0$$

由此可得

$$b>0,\ c>0,\ bc-ad>0,\ b^2-4d>0$$

将方程 (2.1) 化为如下的等价系统

$$\left.\begin{aligned} &x^{(1)}=y,\ y^{(1)}=z,\ z^{(1)}=u \\ &u^{(1)}=-dx-cy-bz-au \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

利用(1.4)式可得系统(2.2)的系数行列式为

$$\Delta=d(abc-c^2-a^2d)$$

1． **若给定负定二次型**

$$w(x,y,z,u)=-(abc-c^2-a^2d)u^2$$

则由(1.5)式可得二次型

$$\begin{aligned} v(x,y,z,u)=&cd^2x^2+(c^2+ad^2)y^2+(b(bc-ad)+ac^2-cd)z^2 \\ &+(bc-ad)u^2+2c^2dxy+2d(bc-ad)xz+2bc^2yz \\ &+2cdyu+2c^2zu \end{aligned} \tag{2.3}$$

且沿方程组(2.2)有

$$dv/dt=-2(abc-c^2-a^2d)u^2$$

容易验证(2.3)式所表示的二次型$v(x,y,z,u)$是正定的。事实上，若记$v(x,y,z,u)$的矩阵为

$$B=\begin{bmatrix} cd^2 & c^2d & d(bc-ad) & 0 \\ c^2d & c^3+ad^2 & bc^2 & cd \\ d(bc-ad) & bc^2 & b(bc-ad)+ac^2-cd & c^2 \\ 0 & cd & c^2 & bc-ad \end{bmatrix}$$

则矩阵B的顺序主子式依次为

$$B_{11}=cd^2>0,\ B_{22}=\begin{vmatrix} cd^2 & c^2d \\ c^2d & c^3+ad^2 \end{vmatrix}=acd^4>0$$

$$\begin{aligned} B_{33}=&\begin{vmatrix} cd^2 & c^2d & d(bc-ad) \\ c^2d & c^3+ad^2 & bc^2 \\ d(bc-ad) & bc^2 & b(bc-ad)+ac^2-cd \end{vmatrix} \\ =&ad^5(abc-c^2-a^2d)>0 \end{aligned}$$

$$B_{44}=|B|=d^6(abc-c^2-a^2d)^2>0$$

所以二次型$v(x,y,z,u)$是正定的。

2． **若给定负定二次型**

$$w(x,y,z,u)=-(abc-c^2-a^2d)z^2$$

则由(1.5)式又可得二次型

$$v(x,y,z,u)=ad^2x^2+((ab-c)d+ac^2)y^2+(a^2c+bc-ad)z^2$$
$$+cu^2+2acdxy+2cdxz+2(c^2+a^2d)yz$$
$$+2adyu+2aczu \tag{2.4}$$

且沿方程组(2.2)有

$$dv/dt=-2(abc-c^2-a^2d)z^2$$

若记由(2.4)式所表示的二次型$v(x,y,z,u)$的矩阵为

$$B=\begin{bmatrix} ad^2 & acd & cd & 0 \\ acd & (ab-c)d+ac^2 & c^2+a^2d & ad \\ cd & c^2+a^2d & a^2c+bc-ad & ac \\ 0 & ad & ac & c \end{bmatrix}$$

则矩阵B的顺序主子式依次为

$$B_{11}=ad^2>0,\quad B_{22}=\begin{vmatrix} ad^2 & acd \\ acd & (ab-c)d+ac^2 \end{vmatrix}=ad^3(ab-c)>0$$

$$B_{33}=\begin{vmatrix} ad^2 & acd & cd \\ acd & (ab-c)d+ac^2 & c^2+a^2d \\ cd & c^2+a^2d & a^2c+bc-ad \end{vmatrix}$$
$$=d^3(a^3+ab-c)(abc-c^2-a^2d)>0$$
$$B_{44}=|B|=d^3(abc-c^2-a^2)^2>0$$

所以二次型$v(x,y,z,u)$是正定的。

3． **若给定负定二次型**

$$w(x,y,z,u)=-a(abc-c^2-a^2d)y^2$$

则由(1.5)式又可得二次型

$$v(x,y,t,u)=ad(ab-c)x^2+((ab-c)^2+(abc-c^2-a^2d)+a^3c)y^2$$
$$+a(a^3+c)z^2+a^2u^2+2a^3dxy+2a^2dxz$$
$$+2a^3byz+2a(ab-c)yu+2a^3zu \tag{2.5}$$

且沿方程组(2.2)有

$$dv/dt=-2a(abc-c^2-a^2d)y^2$$

若记由(2.5)式所表示的二次型$v(x,y,z,u)$的矩阵为

$$B=\begin{bmatrix} ad(ab-c) & a^3d & a^2d & 0 \\ a^3d & (ab-c)^2+(abc-c^2-a^2d)+a^3c & a^3b & a(ab-c) \\ a^2d & a^3b & a^4+ac & a^3 \\ 0 & a(ab-c) & a^3 & a^2 \end{bmatrix}$$

则矩阵B的顺序主子式依次为

$$B_{11}=ad(ab-c)>0$$

$$B_{22}=\begin{vmatrix} ad(ab-c) & a^3d \\ a^3d & (ab-c)^2+(abc-c^2-a^2d)+a^3c \end{vmatrix}$$
$$=ad((abc-c^2-a^2d)(ab-c+a^3)+ab-c)^3)>0$$

$$B_{33}=\begin{vmatrix} ad(ab-c) & a^3d & a^2d \\ a^3d & (ab-c)^2+(abc-c^2-a^2d)+a^3c & a^3b \\ a^2d & a^3b & a^4+ac \end{vmatrix}$$

$$=a^2d(abc-c^2-a^2d)((abc-c^2-a^2d)+(ab-c-a^3)^2+a^3(ab-c))>0$$

$$B_{44}=|B|=a^4d(abc-c^2-a^2d)^2>0$$

所以二次型$v(x,y,z,u)$是正定的。

三、四阶非线性系统平凡解的稳定性

考虑四阶非线性方程

$$x^{(4)}+ax^{(3)}+bx^{(2)}+cx^{(1)}+f(x)=0 \qquad (f(0)=0) \tag{3.1}$$

将方程(3.1)化为形如(2.2)的等价系统

$$\left.\begin{array}{l} x^{(1)}=y,\ y^{(1)}=z,\ z^{(1)}=u \\ u^{(1)}=-f(x)-cy-bz-au \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

我们有如下的定理：

定理1 假设存在常数$h>0$，$k>0$，使当$|x|\leqslant h$时，函数$f(x)$具有连续的二阶导数，且满足下列条件

$$abc-c^2-2a^2f'(x)\geqslant\varepsilon>0$$

$$f'(x)\geqslant\varepsilon/a^2,\ |f''(x)|\leqslant\varepsilon/ka$$

则当$yz>0$时，系统(3.2)的平凡解渐近稳定。

证 记$F(x)=\int_0^x f(\eta)d\eta$

则易见

$$F(x)=\frac{1}{2}f'(\theta x)x^2\geqslant 0 \qquad (0<\theta<1)$$

在域$|x|\leqslant h$，$|y|\leqslant k$内作类似于(2.5)的李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned} v(x,y,z,u)=&2a(ab-c)F(x)+((ab-c)^2+(abc-c^2-a^2f'(x)))y^2 \\ &+a^3cy^2+a(a^3+c)z^2+a^2u^2+2a^3f(x)y+2a^2f(x)z \\ &+2a^3byz+2a(ab-c)yu+2a^3zu \\ =&\frac{a^3}{c}(cy+f(x))^2+\frac{a}{c}(cz+af(x))^2+2a^2cyz \\ &+((ab-c)y+a^2z+au)^2+(abc-c^2-a^2f'(x))y^2 \\ &+\frac{2a}{c}((abc-c^2)F(x)-a^2f^2(x)) \\ =&\frac{a^3}{c}(cy+f(x))^2+\frac{a}{c}(cz+af(x))^2+2a^2cyz \\ &+((ab-c)y+a^2z+au)^2+(abc-c^2-a^2f'(x))y^2 \\ &+\frac{2a}{c}\int_0^x f(\eta)(abc-c^2-2a^2f'(\eta))d\eta \\ \geqslant&\frac{a^3}{c}(cy+f(x))^2+\frac{a}{c}(cz+af(x))^2+2a^2cyz \end{aligned}$$

$$+((ab-c)y+a^2z+au)^2+(abc-c^2-a^2f'(x))y^2$$

$$+\frac{2a}{c}\varepsilon F(x)\geqslant 0$$

所以函数$v(x,y,z,u)$是正定的。

函数$v(x,y,z,u)$沿系统(3.2)对时间t的导数为

$$dv/dt=-2a(abc-c^2-a^2f'(x))y^2-a^2f''(x)y^3$$

$$\leqslant -3a\varepsilon y^2\leqslant 0$$

且只有平凡解才能使$dv/dt\equiv 0$，则据关于渐近稳定的李雅普诺夫定理[1]可知，系统(3.2)的平凡解局部渐近稳定。

再考虑四阶非线性方程

$$x^{(4)}+ax^{(3)}+\varphi'(x^{(1)})x^{(2)}+cx^{(1)}+dx=0 \tag{3.3}$$

将方程(3.3)仍化为形如(2.2)的等价系统

$$\left.\begin{aligned}&x^{(1)}=y,\ y^{(1)}=z,\ z^{(1)}=u\\&u^{(1)}=-dx-cy-\varphi'(y)z-au\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

我们又有如下的定理

定理2　假设存在常数$h>0$，$k>0$，使当$|y|\leqslant h$，$|z|\leqslant k$时，函数$\varphi(y)$具有连续的二阶导数，且满足下列条件

$$ac\varphi'(y)-c^2-a^2d\geqslant\varepsilon>0$$

$$\varphi'(y)>0,\quad |\varphi''(y)|\leqslant\frac{\varepsilon}{l(ah^2+c)}\qquad\left(l=\frac{k}{h}\right)$$

如果在域$|y|\leqslant k$，$|z|\leqslant l$内，$(az+u)\operatorname{sgn}y\geqslant 0$，$(dx+cy)\operatorname{sgn}z\geqslant 0$，则系统(3.4)的平凡解渐近稳定。

证　在域$|y|\leqslant k$，$|z|\leqslant l$内，作类似于(2.4)的李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned}v(x,y,z,u)=&ad^2x^2+((a\varphi'(y)-c)d+ac^2)y^2\\&+(a^2c+c\varphi'(y)-ad)z^2+cu^2+2acdxy\\&+2cdxz+2(c^2+a^2d)yz+2adyu+2aczu\\=&d(a\varphi'(y)-c)y^2+(c\varphi'(y)-ad)z^2\\&+a(dx+cy)^2+c(az+u)^2+2c(dx+cy)z\\&+2ad(az+u)y\end{aligned}$$

由$ac\varphi'(y)-c^2-a^2d>0$及$\varphi'(y)>0$可知$a\varphi'(y)-c>0$，$c\varphi'(y)-cd>0$，故在域$|y|\leqslant k$，$|z|\leqslant l$内，由定理的条件可知函数$v(x,y,z,u)$是正定的。

函数$v(x,y,z,u)$沿系统(3.4)对时间t的导数为

$$\begin{aligned}dv/dt&=-2(ac\varphi'(y)-c^2-a^2d)z^2+(ay^2+cz^2)z\varphi''(y)\\&\leqslant -2\varepsilon z^2+\left(a\left(\frac{y}{z}\right)^2+c\right)|z|\,|\varphi''(y)|z^2\\&\leqslant -2\varepsilon z^2+(ah^2+c)l|\varphi''(y)|z^2\\&=-\varepsilon z^2\leqslant 0\end{aligned}$$

只有平凡解才能使$dv/dt\equiv 0$，故仿定理1可知系统(3.4)的平凡解局部渐近稳定。

参 考 文 献

[1] 王联、王慕秋,《非线性常微分方程定性分析》, 哈尔滨工业大学出版社 (1987), 381—422.
[2] N. Γ. 马尔金,《运动稳定性理论》, 解伯民等译, 科学出版社 (1958), 72—73.

A Study of the Construction of Lyapunov Function for a Class of Fourth Order Nonlinear Systems

Liang Zai-zhong

(Department of Applied Mathematics, Beijing Polytechnic University, Beijing)

Abstract

In this paper Lyapunov function for a fourth order linear system is given, and the stability of the trivial solutions to a class of fourth order nonlinear systems is studied.

Key words nonlinear, stability, Lyapunov function