

Oldroyd B 流体依时性管内流动 的变分解析方法*

韩式方 H·拉姆金森

(中国科学院成都分院非牛顿流体力学实验室) (特立尼达 西印度大学数学系)
(康振黄推荐, 1994年5月17日收到)

摘 要

在本文中, 研究上随体 Oldroyd B 流体在水平管内依时性流动. 该问题可归结为无量纲速度分量的三阶偏微分方程的初值问题. 采用改进的 Kantorovich 方法, 将该方程化为各级近似的二阶常微分方程组的初值问题. 通过 Laplace 变换, 求得其二阶常微分方程的解析解. 在本文中, 提出了变分解析解的新概念. 获得了二级近似变分解析解, 其中包括常压力梯度和周期性压力梯度两种情形. 应用计算机符号处理和 Laplace 变换, 可以获得任意近似下的变分解析解.

关键词 Oldroyd B 流体 非牛顿流体 依时性流体 变分一解析法 改进的 Kantorovich 方法

一、引 言

经典的 Navier-Stokes 方程, 不能充分描述复杂的非牛顿流体, 如高分子溶液和融体、血液、泥浆、油漆、食品等的力学行为, 导致新兴的流体力学分支, 即非牛顿流体力学的发展. Oldroyd^[1]在材料本构理论方面的研究, 取得突破性进展. Oldroyd-Maxwell 型本构方程成为描述粘弹流体的流变行为的最佳形式. 聚异丁烯在聚乙烯中的溶液, 是一种典型的粘弹流体.

在化学工业及石油工业中, 圆柱管道内依时性流动是一重要流动. 若干作者研究了牛顿流体的非定常流动. 由于本构方程的复杂性, 对于非牛顿流体非定常流动, 尚研究得不够, 比较重要的工作有以下几个方面. Balmer 和 Fiorina^[2]应用差分方法得到幂律流体的数值解. Gorla 和 Madden^[3]应用 Kantorovich 变分原理进一步研究了幂律流体非定常流动. Ramkissoon 等研究了有记忆的 Walters B 流体非定常流动^[6]. 韩式方采用改进的 Kantorovich 方法^[8~8], 研究了粘弹流体依时性流动. 研究表明, 康氏方法的二级近似与差分格式结果比较, 取得良好的一致性.

本文研究 Oldroyd B 流体在水平管内的依时性流动. 本文讨论了常压力梯度和周期性

* 第三世界科学院和中国国家自然科学基金资助项目

压力梯度变化等两种情形。在研究中,采用了改进的 Kantorovich 方法。本问题在数学上可归结为轴向速度分量的三阶偏微分方程的初值边值问题。应用改进的 Kantorovich 变分方法,可将该三阶偏微分方程的初边值问题,化为各级近似的二阶常微分方程的初值问题。在本文中,采用 Laplace 变换,求得一级和二级近似的解析解。因此,我们称这一过程所得到的解答为变分解析解,从而发展了变分解析方法的新概念。若采用计算机符号处理技术,可以得出任意近似的变分解析解。

二、基本方程

我们将研究管内依时性非牛顿流体流动,采用了三参数的 Oldroyd B 流体的本构方程。采用圆柱坐标系,认为流体是不可压缩的,本构方程可以写为以下形式:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{S} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\mathbf{S}} = 2\mu \mathbf{D} + 2\lambda_2 \overset{\nabla}{\mathbf{D}} \quad (2.2)$$

其中: \mathbf{S} 为偏应力张量, \mathbf{D} 为变形速度张量, \mathbf{T} 为总应力张量, λ_1 为松弛时间, λ_2 为推迟时间, μ 为极限粘度。上随体导数 $\overset{\nabla}{\cdot}$ 的定义如下:

$$\overset{\nabla}{A}{}^{ij} = \partial A^{ij} / \partial t + q^m A^{ij}{}_{,m} - A^{im} q^j{}_{,m} - A^{mj} q^i{}_{,m} \quad (2.3)$$

式中 \mathbf{q} 为速度向量。

我们假设速度场具有以下形式

$$\mathbf{q} = (0, 0, w(r, t)) \quad (2.4)$$

将(2.4)式代入运动方程,得出轴向分量 $w(r, t)$ 的方程如下:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{S_{rz}}{r} \quad (2.5)$$

由本构方程(2.2),同时应用(2.3),可以得到

$$S_{rz} + \lambda_1 \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} = \mu \frac{\partial w}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} \quad (2.6)$$

在方程(2.5)和(2.6)中,消去 S_{rz} ,可得出以下方程

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\lambda_1} \frac{\partial w}{\partial t} - \left(\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ + \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

引入以下无量纲量

$$\varphi = \mu w / \left(\frac{\Delta p}{L} \right) R^2, \quad \eta = \frac{r}{R}, \quad \tau = \frac{\mu t}{\rho R^2}, \quad Ga = \frac{\lambda_2 \mu}{\rho R^2}, \quad Ha = \frac{\lambda_1 \mu}{\rho R^2} \equiv \frac{We}{Re}$$

其中: R 为管道半径, Re 为雷诺数, We 为 Weissenberg 数。方程(2.7)化为以下无量纲形式:

$$\begin{aligned} Ha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) - Ga \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \\ - \psi(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中

$$\psi(\tau) = -\frac{L}{\Delta p} \frac{\partial p}{\partial z} - Ha \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{L}{\Delta p} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \quad (2.9)$$

无量纲压力梯度等于

$$-\frac{L}{\Delta p} \frac{\partial p}{\partial z} = f(\tau) \quad (2.10)$$

$$\psi(\tau) = f(\tau) + Ha \frac{d}{d\tau} f(\tau) \quad (2.11)$$

方程(2.8)与上随体Maxwell模型的结果^[6,7]的区别,在于包含有 Ga 的三阶偏导数。经无量纲化的边界条件和初始条件化为:

$$\varphi(1, \tau) = 0, \quad \partial\varphi(\eta, \tau)/\partial\eta = 0, \quad \text{当 } \eta = 0, \varphi(\eta, 0) = 0 \quad (2.12)$$

上述条件(2.12),与文献[6,8]中采用的条件相同。然而,由于方程(2.8)中,包含更高阶偏导数,因此,满足(2.12)的方程(2.8)的解,仍含有一个任意常数。显然,其出路只有两种,或者增加一个条件,或者允许解具有任意性。

三、一般问题的解答

为了求得方程(2.8)的解,我们将采用由 Kantorovich^[4]最先提出的,后来加以改进的变分方法研究粘弹流体运动^[6,8],即称为改进的康氏方法。现在,我们首先简要地介绍这一改进的方法。

我们假设,需要求解以下形式的偏微分方程

$$L(\varphi(\eta, \tau)) = f \quad (3.1)$$

上述方程的解,满足一定的边界条件。根据 Ritz 方法,可以近似地假设解 $\varphi(\eta, \tau)$ 为以下形式

$$\varphi_n(\eta, \tau) = \sum_{k=1}^n a_k(\tau) g_k(\eta) \quad (3.2)$$

其中: $g_k(\eta)$ 是满足边界条件的基函数, $a_k(\tau)$ 为待求的依时性函数。将(3.2)代入(3.1)可得:

$$L(\varphi_n) - f = e \quad (3.3)$$

其中 e 为残值。 $g_k(\eta)$ 称为基函数。变分原理可以写为以下形式:

$$\int_{\tau} \int_S [L(\varphi_n) - f] \delta\varphi_n dS d\tau = 0 \quad (3.4)$$

应用(3.2)式,将得到

$$\int_{\tau} \int_S [L(\varphi_n) - f] g_k \delta a_k dS d\tau = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (3.5)$$

改进的Kantorovich方法的实质可简述如下。应用定常状态下的解答,构成近似函数系系列。一般,选取定常流动解 φ_s 作为 $g_1(\eta)$,在这一情况下,当 $\tau \rightarrow \infty$ 时, $a_1(\tau) \rightarrow 1$ 且 $a_k(\tau) \rightarrow 0 (k \neq 1)$ 。显然,上述近似函数的选择不是唯一的。

现在,我们将应用所提出的方法,求解上述问题。对于Oldroyd B 流体在管内流动,其定常流动解 φ_s 由下式给出:

$$\varphi_s = (1 - \eta^2) \quad (3.6)$$

在这一情形下,我们将选取的基函数系列为

$$g_k(\eta) = (1 - \eta^2) \eta^{2(k-1)} \quad (3.7)$$

令微分算子 $L(\varphi)$ 等于

$$L(\varphi) \equiv Ha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) - Ga \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) - \psi(\tau) \quad (3.8)$$

一级近似

为了得到一级近似 φ_1 , 我们在方程中(3.2)中取 $n=1$, 并应用(3.7), 有

$$\varphi_1 = a_1(\tau)(1-\eta^2) \quad (3.9)$$

将上述表达式代入(3.5), 并设 $f \equiv 0$, 可得

$$\int_{\tau} \int_{\eta} L(\varphi_1)(1-\eta^2) \delta a_1 d\eta d\tau = 0$$

在上式中, 完成对 η 由0至1的积分后, 得

$$\int_{\tau} [(4Ha)a_1'' + (4+20Ga)a_1' + 20a_1 - 5\psi(\tau)] \delta a_1 d\tau = 0$$

由于 τ 的任意性, 积分函数应等于零, 所以

$$(4Ha)a_1'' + (4+20Ga)a_1' + 20a_1 = 5\psi(\tau) \quad (3.10)$$

这是一个二阶线性、非齐次常微分方程。应用 Laplace 变换, 可以得出一级近似解如下:

$$a_1(\tau) = \frac{5}{4Ha(\gamma_1 - \gamma_2)} \int_0^{\tau} \psi(\tau-l) (\exp[\gamma_1 l] - \exp[\gamma_2 l]) dl + (A/(\gamma_1 - \gamma_2)) (\exp[\gamma_1 \tau] - \exp[\gamma_2 \tau]) \quad (3.11)$$

其中, $a_1(0) = 0$, $a_1'(0) = A$, γ_1 和 γ_2 是下述代数方程的根

$$\gamma^2 + \frac{1+5Ga}{Ha} \gamma + \frac{5}{Ha} = 0$$

将(3.11)代入(3.9), 即得一级近似解 φ_1 .

二级近似

在(3.2)中, 设 $n=2$, 并应用(3.7)和(3.5), 即得到

$$\varphi_2 = a_1(\tau)(1-\eta^2) + a_2(\tau)\eta^2(1-\eta^2) \quad (3.12)$$

变分原理将通过以下方程写出

$$\int_{\tau} \int_{\eta} L(\varphi_2)(1-\eta^2) \delta a_1 d\eta d\tau = 0 \quad (3.13)$$

$$\int_{\tau} \int_{\eta} L(\varphi_2)\eta^2(1-\eta^2) \delta a_2 d\eta d\tau = 0 \quad (3.14)$$

重复推导一级近似的全过程, 可得出由两个二阶非齐次线性常微分方程组成的方程组:

$$Ha(28a_1'' + 4a_2'') + (28+140Ga)a_1' + (4-28Ga)a_2' + 140a_1 - 28a_2 = 35\psi(\tau) \quad (3.15)$$

$$Ha(12a_1'' + 4a_2'') + (12+84Ga)a_1' + (4+60Ga)a_2' + 84a_1 + 60a_2 = 21\psi(\tau) \quad (3.16)$$

应用 Laplace 交换, 并经过若干处理后, 可以得到二级近似方程组的解析形式解答:

$$a_1(\tau) = \frac{7}{8} \sum_{j=3}^6 A_j \int_0^{\tau} \psi(\tau-l) \exp[\theta_j l] dl + \frac{1}{64} \sum_{j=3}^6 C_j \exp[\theta_j \tau] \quad (3.17)$$

$$a_2(\tau) = 2 \sum_{j=3}^6 B_j \int_0^\tau \psi(\tau-l) \exp[\theta_j l] dl - \frac{1}{64} \sum_{j=3}^6 D_j \exp[\theta_j \tau] \quad (3.18)$$

$$(j=3, 4, 5, 6)$$

$$\left. \begin{aligned} A_j &= [Ha\theta_j^2 + (1+4Ga)\theta_j + 48] / \prod_{k(\neq j)=3}^6 (\theta_j - \theta_k) \\ B_j &= [Ha\theta_j^2 + \theta_j] / \prod_{k(\neq j)=3}^6 (\theta_j - \theta_k) \\ C_j &= 4Ha(B_0 - C_0)\theta_j^2 + 4[B_0(1+15Ga) - C_0(1-7Ga)]\theta_j \\ &\quad + 60B_0 + 28C_0 \\ D_j &= 4Ha(3B_0 - 7C_0)\theta_j^2 + 4[B_0(3+21Ga) - C_0(7+35Ga)]\theta_j \\ &\quad + 84B_0 - 140C_0 \\ B_0 &= 28Ha(a'_1(0)) + 4Ha(a'_2(0)), \quad C_0 = 12Ha(a'_1(0)) + 4Ha(a'_2(0)) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

θ_3, θ_4 由下式决定:

$$Ha\theta^2 + (1+\theta_1 Ga)\theta + \theta_1 = 0$$

θ_5, θ_6 由下式决定:

$$Ha\theta^2 + (1+\theta_2 Ga)\theta + \theta_2 = 0$$

和 $\theta_1 = (35 + \sqrt{553})/2, \theta_2 = (35 - \sqrt{553})/2$

因此, 二级近似的解可由下式给出

$$\varphi_2(\eta, \tau) = a_1(\tau)(1-\eta^2) + a_2(\tau)(1-\eta^2)\eta^2 \quad (3.20)$$

其中, $a_1(\tau), a_2(\tau)$ 由(3.17)、(3.18)给出. 该解可以要求满足初始条件:

$$a'_1(0) = a'_2(0) = 0 \quad (\varphi'(\eta, 0) = 0)$$

由于这一补充条件, 有 $B_0 = C_0 = C_j = D_j = 0$. 应用该初始条件, 补充(2.12)中的初始条件, 消除了全面的任意常数的不确定性, 也就是说, 使解具有唯一性. 然而, 这一要求是比较严格的.

四、特殊情形

正如前面指出, 提出 $\varphi'(\eta, 0) = 0$, 是一比较苛刻的条件. 我们在这里, 要求 $a_k(\tau)$ 和 $\varphi(\eta, \tau)$ 在 $\tau=0$ 处, 可以按 Taylor 级数展开, 因此, 可以忽略高阶小量 $O(\tau^2)$. 所以, 在小 τ 的情形下, $a_k(\tau)$ 是 τ 的线性函数, 即

$$a'_k(0) = \alpha_k \quad (\text{常数}) \quad (4.1)$$

显然, α_k 也可以为零, 因此, (4.1) 也包含了前面的特殊情形 $\varphi'(\eta, 0) = 0$. 因此, 可以应用更一般的条件(4.1).

现在我们讨论本问题的两个特殊情形.

a 常压力梯度

我们取:

$$-\frac{L}{\Delta p} \frac{\partial p}{\partial z} = 4 \quad (4.2)$$

一级近似

将(4.2)代入(2.11), 得出 $\psi(\tau)=4$, 若代入(3.10), 可得, $a_1'(0)=\alpha=A=5/(1+5Ga)$, 这里, 利用到 $a_1(0)=0$ 的条件. 再由(3.11), 可得出

$$a_1(\tau) = 1 + \frac{5}{(1+5Ga)(\gamma_1-\gamma_2)} (\exp[\gamma_1\tau] - \exp[\gamma_2\tau]) \\ + \frac{1}{\gamma_1-\gamma_2} (\gamma_2 \exp[\gamma_1\tau] - \gamma_1 \exp[\gamma_2\tau])$$

一级近似解将由下式给出

$$\varphi_1(\eta, \tau) = (1-\eta^2) \left[1 + \frac{5}{(1+5Ga)(\gamma_1-\gamma_2)} (\exp[\gamma_1\tau] - \exp[\gamma_2\tau]) \right. \\ \left. + \frac{1}{\gamma_1-\gamma_2} (\gamma_2 \exp[\gamma_1\tau] - \gamma_1 \exp[\gamma_2\tau]) \right] \quad (4.3)$$

其中 γ_1 和 γ_2 为下述代数方程的根

$$Ha\gamma^2 + (1+5Ga)\gamma + 5 = 0 \\ \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \frac{-(1+5Ga) \pm \sqrt{(1+5Ga)^2 - 20}}{2Ha} \quad (4.4)$$

二级近似

为了获得二级近似解, 可由(3.15)和(3.16)式给出 $a_1'(0)$ 和 $a_2'(0)$

$$a_1'(0) = \frac{7(1+48Ga)}{2(1+35Ga+168Ga^2)}, \quad a_2'(0) = \frac{21}{2(1+35Ga+168Ga^2)} \quad (4.5)$$

由(3.17)和(3.18)及 $\psi(\tau)=4$ 得到

$$\left. \begin{aligned} a_1(\tau) &= \sum_{j=3}^6 \left[7A_j \frac{(\exp[\theta_j\tau] - 1)}{2\theta_j} + \frac{1}{64} C_j \exp[\theta_j\tau] \right] \\ a_2(\tau) &= \sum_{j=3}^6 \left[8B_j \frac{(\exp[\theta_j\tau] - 1)}{\theta_j} + \frac{1}{64} D_j \exp[\theta_j\tau] \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

其中 A_j, B_j, C_j 和 D_j 将由(3.19)式给出. 二级近似的依时性函数, 可根据(3.12)式计算 $\varphi_2(\eta, \tau)$.

b. 周期性压力梯度

我们取压力梯度随时间变化

$$-\frac{L}{\Delta p} \frac{\partial p}{\partial z} = \sin\tau \quad (4.7)$$

压力梯度随时间周期性变化, 不仅反映高分子加工过程中的某些现象, 而且反映生物力学中血管内血液流动的脉动现象. 将上式代入(2.11)式, 得

$$\psi(\tau) \sin\tau + Ha \cos\tau$$

一级近似

由(3.10)式, 可得

$$a_1'(0) = 5Ha/(4+20Ga)$$

由(3.11)式, 可得时间函数 $a_1(\tau)$

$$a_1(\tau) = \frac{5}{4Ha(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\frac{\exp[\gamma_1\tau](1 + \gamma_1Ha) - \cos\tau(1 + \gamma_1Ha) - \sin\tau(\gamma_1 - Ha)}{1 + \gamma_1^2} \right. \\ \left. - \frac{\exp[\gamma_2\tau](1 + \gamma_2Ha) - \cos\tau(1 + \gamma_2Ha) - \sin\tau(\gamma_2 - Ha)}{1 + \gamma_2^2} \right] \\ + \frac{5Ha}{4 + 20Ga} \frac{\exp[\gamma_1\tau] - \exp[\gamma_2\tau]}{\gamma_1 - \gamma_2} \quad (4.8)$$

其中: γ_1 和 γ_2 由(4.4)式给出, 一级近似解将由下式给出:

$$\varphi_1(\eta, \tau) = (1 - \eta^2)a_1(\tau) \quad (4.9)$$

二级近似

类似地, 对于二级近似, 可以得到以下形式解答, 其中 $a'_1(0)$ 和 $a'_2(0)$ 由下式给出

$$a'_1(0) = \frac{7(1 + 48Ga)Ha}{8(1 + 35Ga + 168Ga^2)}, \quad a'_2(0) = \frac{21Ha}{8(1 + 35Ga + 168Ga^2)} \quad (4.10)$$

$a_1(\tau)$ 和 $a_2(\tau)$ 由下式给出

$$a_1(\tau) = \sum_{j=3}^6 \left[\frac{7}{8} A_j \frac{\exp[\theta_j\tau](1 + \theta_jHa) - \cos\tau(1 + \theta_jHa) - \sin\tau(\theta_j - Ha)}{1 + \theta_j^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{64} C_j \exp[\theta_j\tau] \right] \\ a_2(\tau) = \sum_{j=3}^6 \left[2B_j \frac{\exp[\theta_j\tau](1 + \theta_jHa) - \cos\tau(1 + \theta_jHa) - \sin\tau(\theta_j - Ha)}{1 + \theta_j^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{64} D_j \exp[\theta_j\tau] \right] \quad (4.11)$$

五、结果与讨论

在本文中, 应用变分—解析方法, 研究了 Oldroyd B 流体管内依时性流动. 该依时性问题, 在数学上化为一个三阶偏微分方程的边初值问题. 采用改进的 Kantorovich 变分方法, 该偏微分方程的边初值问题, 可以化为各级近似的二阶常微分方程的初值问题. 在本研究中, 应用 Laplace 变换求得常微分方程的解析解. 因此, 我们发展了变分—解析方法, 将变分法与解析方法结合, 为解析处理指出了新的发展前景.

应当指出, 如果应用计算机符号处理技术——如软件 Macsyma, Mathematica, Maple 等, 可将上述偏微分方程问题化为任意高阶近似的常微分方程问题. 而 Laplace 变换, 适合于这类常微分方程的求解. 因此, 本文提出的方法, 有更广泛的普遍性.

根据所得到的二级近似的解公式, 对于常压力梯度和周期性压力梯度两种情形, 完成了数值计算, 其结果示于图 1 至图 3. 正如有关非牛顿流体力学研究^[11]所指出, 松弛时间 λ_1 大于推迟时间 λ_2 , 可采用 $\lambda_1 = 6\lambda_2$. 在本文中, 采用了这一比例关系. 图 1 示出依时性函数 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 的变化规律. 图 2 示出在常压力梯度下, 管中心线上的速度随时间的变化. 图 3 给出在周期压力梯度下, 管中心线上速度随时间的变化.

在这里应当指出, 在计算中, 采用了前述特殊情形 $\varphi'(\eta, 0) = 0$. 由于这一初始条件的限制, 在速度随时间变化的规律中, 起始段较为平滑, 没有出现脉动. 在物理上, 可以理解

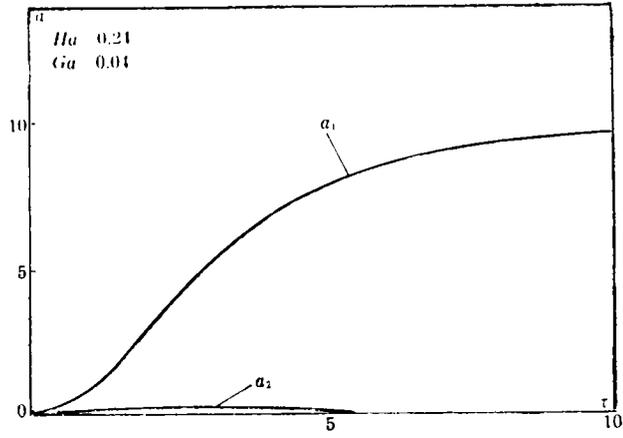


图 1

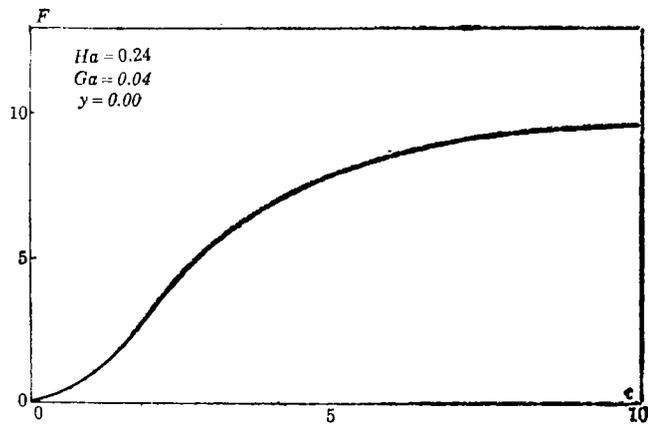


图 2

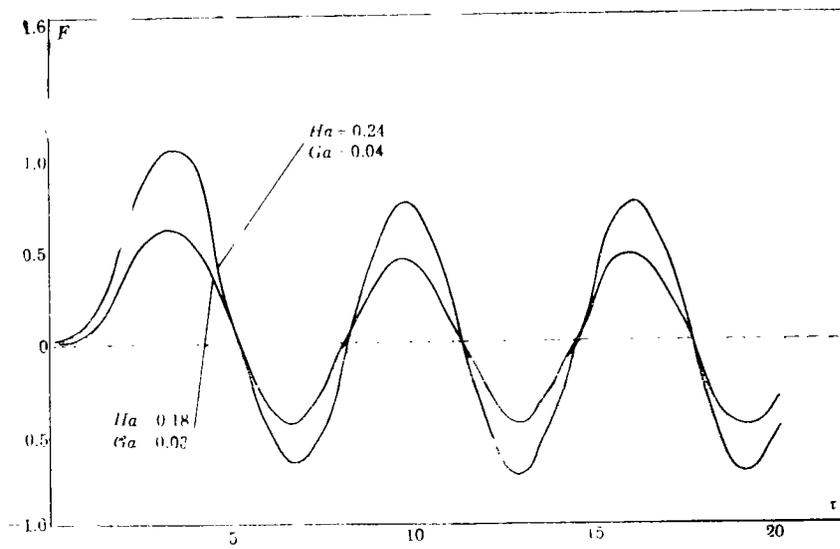


图 3

为一种缓慢的起始过程,可能形成理想的平滑的起始流动。显然,这一条件较为苛刻。然而,本研究表明,非定常流动起始段的脉动现象,随初始条件的不同,如本文所指出的条件,而可能避免。也就是说,上述脉动现象与初始条件有关。如果采用更广义的补充初始条件(4.1),则将得到较新的初始变化过程,如本文解析公式(4.6)和(4.11)所示。

本文作者之一(H. R.)感谢第三世界科学院根据南—南合作纲领提供本项目研究的资助。本项目研究同时得到中国国家自然科学基金和中国科学院的资助,特致以谢意。

参 考 文 献

- [1] Oldroyd, J. G., An approach to non-Newtonian fluid mechanics, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 14 (1984), 9—46.
- [2] Balmer, R. T. and M. A. Fiorina, Unsteady flow of an inelastic power-law fluid in a circular tube, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 7 (1980), 189.
- [3] Gorla, R. S. R. and P. E. Madden, A variational approach to non-steady non-Newtonian flow in a circular pipe, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 16 (1984), 251.
- [4] Kantorovich, L. V. and V. I. Krylov, *Approximate Methods of Higher Analysis*, Interscience Publishes, New York (1958).
- [5] Bamkissoo, H., C. V. Easwaran and S. R. Majumdar, Non-steady flow of Walters fluid B in tube, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 24 (1989), 585.
- [6] 韩式方, 《非牛顿流体连续介质力学》, 四川科技出版社 (1988).
- [7] Han Shi-fang, Unsteady flow of Maxwell-Oldroyd fluid in tube, *Proc. 4th Asian Congress on Fluid Mechanics*, Hong Kong (1989), F73.
- [8] Han Shi-fang and Wu Yue-qing, Non-steady of upper-convected Maxwell fluid in tube, *Acta Mechanica Sinica*, 6 (1990), 21.
- [9] Petrie, C. J. S., *Elongational Flows*, Pitman, London (1979).
- [10] Han Shi-fang and K. G. Roesner, Time dependent flow of upper-convected Jeffrey fluid between coaxial cylinders, *Computational Fluid Dynamics J.*, 2(1) (1993), 91—104.
- [11] Crochet, M. J., A. R. Davis and K. Walters, *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow*, Elsevier (1984).

A Variational Analytical Approach to Time Dependent Flow of Oldroyd B Fluid in Circular Tube

Han Shi-fang

*(Res. Lab. Non-Newtonian Fluid Mech., Chengdu Branch,
Academia Sinica, Chengdu)*

H. Ramkissoon

*(Department of Mathematics, The University of West Indies,
St. Augustine Trinidad W. I.)*

Abstract

In the present investigation the time dependent flow of an Oldroyd fluid B in a horizontal cylindrical pipe is studied by the variational analytical approach developed by the author. The time dependent problem is mathematically reduced to a partial differential third order equation. Using the improved variational approach due to Kantorovich the partial differential equation can be reduced to a system of ordinary differential equations for different approximations. The ordinary differential equations are solved by the method of the Laplace transform which led to an analytical form of the solutions.

Key words Oldroyd fluid B, non-Newtonian fluid, time dependent flow, variational-analytical approach, improved approach due to Kantorovich