

沿抛物线分布的各向异性曲线裂纹问题

胡元太 赵兴华

(上海大学; 上海市应用数学和力学研究所, 1994年1月15日收到)

摘 要

文章利用 Stroh 法及映射法研究了沿抛物线 Ω 分布的各向异性曲线裂纹问题, 获得了有关的应力及位移场. 这种解不仅适用于平面问题, 而且也适用于反平面变形或两者偶合的情形. 对于单曲线裂纹和双曲线裂纹问题, 文章还获得了它们的应力和位移场的封闭解, 并求得了相应的应力强度因子及裂纹面上的张开位移.

关键词 特征值 裂纹 应力强度因子

一、引 言

工程中的实际结构大多存在空孔、裂纹或夹杂, 这些缺陷的存在会引起极大的应力集中现象, 过去许多学者都研究过这种问题^[1~6]. 通常, 对于各向同性平面问题, 利用 Airy 应力函数法可以较方便地确定介质中的应力应变场, 求得缺陷周围的应力集中因子或应力强度因子^[7, 8]; 但对于各向异性问题, 情况就复杂多了, 因此必须寻找新的研究方法, 这方面最早的工作可见 Eshelby 等^[2]和 Lekhnitskii 等^[9]的文章, 他们根据平面变形的特征, 通过特征值法确定了各向异性平面问题的一般解. 1958年至1962年间 Stroh^[4, 10]将他们的方法做了系统的整理和推广, 由于 Stroh 法能给出二维变形问题的简洁明了的表示式, 所以目前已被广泛地应用到各向异性问题的研究中. C. Hwu 等^[1, 3]曾利用该方法研究了各向异性直裂纹问题, 求得了工程设计所必须的力学参数.

通常介质中裂纹的形状和方向都是任意的, 为了准确描述裂纹的行为, 对曲线裂纹的研究也是必要的. 本文首先通过 Stroh 法及保角变换法获得沿抛物线分布的多曲线裂纹的一般解, 然后由给定的表示式出发, 求解两种特殊的曲线裂纹问题, 即单曲线裂纹和双曲线裂纹问题, 并确定它们的断裂参数——应力强度因子和裂纹面张开位移.

二、一 般 解

考虑在无限大各向异性弹性介质中, 存在一组沿抛物线 Ω 分布的曲线裂纹, 在无限远处受均布荷载作用 (图1a) 设第 j 个裂纹弧在复平面 $z = x_1 + ix_2$ 上 x_1 轴的投影区间为

$$a_j \leq x_1 \leq b_j, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.1)$$

其中

$$-\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n < \infty \quad (2.2)$$

n 是裂纹数目。

利用Muskhelishvili的解答及Stroh方法, C. Hwu^[6]求得了各向异性共线裂纹的解答

$$u = 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) \right\}, \quad \phi = 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 b_{\alpha} f_{\alpha}(z_{\alpha}) \right\} \quad (2.3)$$

$$\sigma_{i1} = -\phi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \phi_{i,1} \quad (2.4)$$

其中

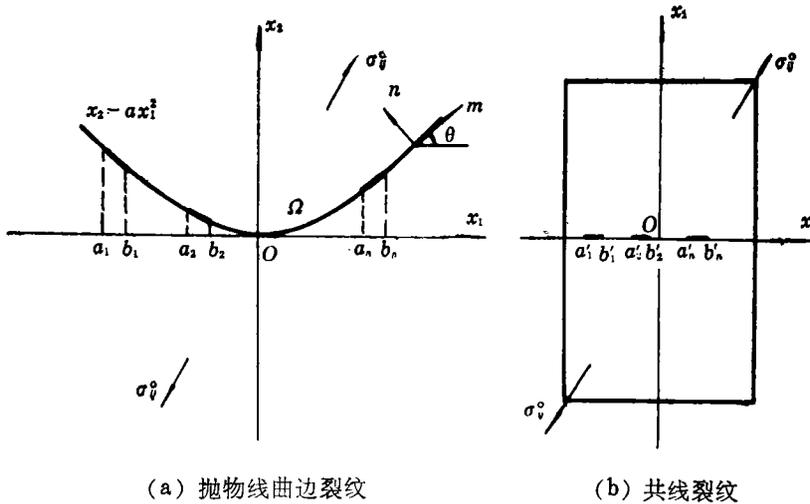
$$\left. \begin{aligned} f_{\alpha}(z_{\alpha}) &= \int P_{\alpha}(z_{\alpha})/X(z_{\alpha}) dz_{\alpha} + Cz_{\alpha} \\ P_{\alpha}(z_{\alpha}) &= C_0 z_{\alpha}^2 + C_1 z_{\alpha}^{-1} + \dots + C_n \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$X(z_{\alpha}) = \prod_{j=1}^n (z_{\alpha} - a'_j)^{1/2} (z_{\alpha} - b'_j)^{1/2}, \quad z_{\alpha} = x_1 + p_{\alpha} x_2$$

C, C_0, C_1, \dots, C_n 是任意实常数

$(a'_j, b'_j) (j=1, 2, \dots, n)$ 是裂纹区间

其中, Re 表示取实部, u 和 ϕ 是 $(u_i, \phi_i, i=1, 2, 3)$ 的三维矢量, 它们分别代表位移和应力矢量(u_i, σ_{ij}, ϕ_i 分别为位移、应力和应力函数); $p_{\alpha}, \alpha=1, 2, 3$ 是由弹性系数 C_{ijkl} 所确定的具有正虚部的特征值^[6]; a_{α} 及 b_{α} 是与 p_{α} 相对应的特征矢量, 应该注意的是, [3]所给出的结果是在 $p_{\alpha} (\alpha=1, 2, 3)$ 互不相等的条件下得到的, 不过它们同样适用半单纯退化材料^[1, 6] (见图1(b)).



(a) 抛物线曲边裂纹

(b) 共线裂纹

图 1

映射函数

$$\xi(z) = \frac{\sqrt{1+4iaz} - 1}{2ia} \quad (2.6)$$

将图1(a)所示的抛物线 $x_2 = ax_1^2$ ($a > 0$)映射成 x_1 轴。对于各向异性问题, 存在三个Stroh复变量 $z_{\alpha} = x_1 + p_{\alpha} x_2$ ($\alpha=1, 2, 3$) 加上一个物理变量 $z = x_1 + ix_2$ 。因此必须寻找三个附加的各向异性映射 $z_{\alpha}(\xi_{\alpha})$, 它将每个抛物线上的点 z_{α} 映射成 x_1 轴上的对应点 $\xi = \xi_{\alpha}$, 参照(2.6), 可以选择映射

$$\xi_a(z_a) = \frac{\sqrt{1+4p_a a z_a} - 1}{2a p_a}, \quad (a=1,2,3) \quad (2.7)$$

它们正好符合要求。在 a 不是很大的情形下（即抛物线 Ω 的焦点不很靠近抛物线 Ω ），图1(a)所示的裂纹的一般解也可写成

$$u = 2\operatorname{Re}\left\{\sum_{a=1}^3 a_a \psi_a(z_a)\right\}, \quad \phi = 2\operatorname{Re}\left\{\sum_{a=1}^3 b_a \psi_a(z_a)\right\} \quad (2.8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \psi_a(z_a) &= \int P_{n+1}(\xi_a)/X(\xi_a) d\xi_a + \beta \xi_a + \gamma \xi_a^2 \\ X(\xi_a) &= \prod_{j=1}^n (\xi_a - a_j)^{1/2} (\xi_a - b_j)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

β 和 γ 是任意常数。

三、沿 Ω 的单曲线裂纹

研究弹性介质中的单个裂纹问题对分析结构的稳定性具有很重要的意义，假设在 Ω 上从 $(a_1, a a_1^2)$ 到 $(b_1, a b_1^2)$ 点间有一曲线裂纹，因为线性关系，所以可以利用叠加原理，图1(a)解可表为一无损介质中的均匀场加上一个修正，均匀应力状态为

$$t_1^T = (\sigma_{11}^0, \sigma_{12}^0, \sigma_{13}^0)^T, \quad t_2^T = (\sigma_{12}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{23}^0)^T \quad (3.1)$$

其中右上标 T 表示转置，因此对应的修正解的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} t_n = \phi = \phi, m = -\cos \theta t_2^T + \sin \theta t_1^T & \quad \text{沿着裂纹表面} \\ \sigma_{ij} \rightarrow 0 & \quad \text{在无限远处, } \theta \text{见图1(a)} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式中 t_n 为裂纹面上的表面力， n 是 Ω 的法向矢量， t_n 与 ϕ, m 之间的相等性可参见 Stroh[4]， m 是 Ω 的切向矢量。因此从(2.8)可得到单个曲边裂纹的一般解为

$$u = 2 \sum_{j=1}^3 \operatorname{Re}\{A \psi_j(\xi) q_j\}, \quad \phi = 2 \sum_{j=1}^3 \operatorname{Re}\{B \psi_j(\xi) q_j\} \quad (3.3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A &= (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3) \\ \psi_j(\xi) &= \operatorname{diag}\{\psi_j(\xi_1), \psi_j(\xi_2), \psi_j(\xi_3)\}, \quad (j=1,2,3) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

且

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\xi_a) &= \xi_a^2 - \int \frac{\xi_a^2}{X(\xi_a)} d\xi_a \\ \psi_2(\xi_a) &= \xi_a - \int \frac{\xi_a}{X(\xi_a)} d\xi_a \\ \psi_3(\xi_a) &= \int \frac{1}{X(\xi_a)} d\xi_a \\ X(\xi_a) &= (\xi_a - a_1)^{1/2} (\xi_a - b_1)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (\alpha=1,2,3) \quad (3.5)$$

$q_j, j=1,2,3$ 是三维矢量，它由边界条件(3.2)确定，沿裂纹表面， $X(\xi_a)$ 的值为

$$X(\xi_a) = \pm i X_0(x_1), \quad X_0(x_1) = \sqrt{(x_1 - a_1)(b_1 - x_1)}, \quad a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad (3.6)$$

将复矢量 q_j 分解成

$$g_j = A^{-1}g_j + B^{-1}h_j \quad (3.7)$$

式中, g_j 及 h_j 为实矢量, 引入下列恒等式^[6]

$$BA^{-1} = iM, \quad AB^{-1} = -iM^{-1} \quad (3.8)$$

M 为一阻抗矩阵, 它满足

$$\left. \begin{aligned} M &= H^{-1}(I+iS) = (I-iS^T)H^{-1} \\ M^{-1} &= L^{-1}(I+iS^T) = (I-iS)L^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

S, H, L 为三维实矩阵, 它们由弹性系数 C_{ijkl} 确定^[6], 将方程 (3.3)~(3.9) 代入 (3.2), 就有

$$g_1 = g_2 = g_3 = 0, \quad h_1 = \frac{1}{2}at_1^0, \quad h_2 = -\frac{1}{2}t_2^0 \quad (3.10)$$

因为位移在裂纹尖端 (a_1, aa_1^2) 和 (b_1, ab_1^2) 是单值的, 即

$$u^+ \Big|_{(a_1, aa_1^2)} = u^- \Big|_{(a_1, aa_1^2)}, \quad u^+ \Big|_{(b_1, ab_1^2)} = u^- \Big|_{(b_1, ab_1^2)} \quad (3.11)$$

式中右上标+和-分别表示裂纹面上、下的量, (3.11)可改写成

$$[u^+ - u^-] \Big|_{(a_1, aa_1^2)}^{(b_1, ab_1^2)} = 0 \quad (3.12)$$

利用方程 (3.3)、(3.6) 及 (3.7), 并代入 (3.10) 的结果, (3.12) 成为

$$2 \sum_{j=1}^3 \operatorname{Re} \left\{ A[\Psi_j^+ - \Psi_j^-] \Big|_{(a_1, aa_1^2)}^{(b_1, ab_1^2)} B^{-1} \right\} h_j = 0 \quad (3.13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} [\Psi_1^+ - \Psi_1^-] \Big|_{(a_1, aa_1^2)}^{(b_1, ab_1^2)} &= -2i \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1^2}{X_0(x_1)} dx_1 I \\ [\Psi_2^+ - \Psi_2^-] \Big|_{(a_1, aa_1^2)}^{(b_1, ab_1^2)} &= -2i \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 I \\ [\Psi_3^+ - \Psi_3^-] \Big|_{(a_1, aa_1^2)}^{(b_1, ab_1^2)} &= 2i \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 I \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

应用 (3.10) 及 (3.13), 将有

$$\left. \begin{aligned} h_3 &= \frac{1}{2\mu} \left[a \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1^2}{X_0(x_1)} dx_1 t_1^0 - \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 t_2^0 \right] \\ \mu &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

将 (3.10) 及 (3.15) 所确定的 g_j 与 h_j 代入 (3.3) 及 (3.5), 就得到了单个裂纹的位移及应力场。

四、沿 Ω 存在双裂纹

双裂纹的研究对理解弹性介质中裂纹之间的相互影响是有意义的, 通过上面同样的步骤, 可得到修正解的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} t_n = \phi, m = -t_n^0 \cos\theta + t_1^0 \sin\theta & \quad \text{沿 } \Omega \\ \sigma_{ij} \rightarrow 0 & \quad \text{在无限远处} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

由 (2.8) 知, 它的一般解形式为

$$u = 2 \sum_{j=1}^4 \operatorname{Re}\{AR_j(\xi)w_j\}, \quad \phi = 2 \sum_{j=1}^4 \operatorname{Re}\{BR_j(\xi)w_j\} \quad (4.2)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} R_j(\xi) &= \operatorname{diag}\{r_j(\xi_1), r_j(\xi_2), r_j(\xi_3)\}, \quad (j=1,2,3,4) \\ r_1(\xi_\alpha) &= \xi_\alpha^2 - \int \frac{\xi_\alpha^2}{X(\xi_\alpha)} d\xi_\alpha \\ r_2(\xi_\alpha) &= \xi_\alpha - \int \frac{\xi_\alpha^2}{X(\xi_\alpha)} d\xi_\alpha \quad (\alpha=1,2,3) \\ r_3(\xi_\alpha) &= \int \frac{\xi_\alpha}{X(\xi_\alpha)} d\xi_\alpha \\ r_4(\xi_\alpha) &= \int \frac{1}{X(\xi_\alpha)} d\xi_\alpha \\ X(\xi_\alpha) &= \{(\xi_\alpha - a_1)(\xi_\alpha - a_2)(\xi_\alpha - b_1)(\xi_\alpha - b_2)\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

$w_j (j=1,2,3,4)$ 是三维待定矢量, 它由边界条件(4.1)确定.

$$X(\xi_\alpha) = \mp i X_0(x_1), \quad a_1 \leq x_1 \leq b_1 \text{ 或 } a_2 \leq x_1 \leq b_2, \quad x_2 = 0^{\pm} \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} X_0(x_1) &= \sqrt{(x_1 - a_1)(b_1 - x_1)(a_2 - x_1)(b_2 - x_1)}, \quad a_1 \leq x_1 \leq b_1 \\ X_0(x_1) &= -\sqrt{(x_1 - a_1)(x_1 - b_1)(x_1 - a_2)(b_2 - x_1)}, \quad a_2 \leq x_1 \leq b_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

将 w_j 分解成

$$w_j = A^{-1}s_j + B^{-1}v_j, \quad (j=1,2,3,4) \quad (4.6)$$

s_j 及 v_j 是实矢量, 将(4.2)~(4.6)及(3.8)、(3.9)代入(4.1), 得

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0, \quad v_1 = at_1^0/2, \quad v_2 = -t_2^0/2 \quad (4.7)$$

利用位移在裂纹尖端 (a_μ, aa_μ^2) 和 (b_μ, ab_μ^2) ($\mu=1,2$) 的单值性有

$$2 \sum_{j=1}^4 \operatorname{Re}\left\{A[R_j^+ - R_j^-] \Big|_{\substack{(b_\mu, ab_\mu^2) \\ (a_\mu, aa_\mu^2)}} B^{-1}\right\} v_j = 0, \quad (\mu=1,2) \quad (4.8)$$

两个未知参数 v_3 及 v_4 可用方程(4.10)确定, 即

$$v_3 = (a\lambda_1 t_1^0 - \lambda_2 t_2^0)/2D, \quad v_4 = (a\lambda_3 t_1^0 - \lambda_4 t_2^0)/2D \quad (4.9)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} D &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 \\ \lambda_1 &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1^3}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{x_1^3}{X_0(x_1)} dx_1 \\ \lambda_2 &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1^2}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{x_1^2}{X_0(x_1)} dx_1 \\ \lambda_3 &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{x_1^3}{X_0(x_1)} dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1^3}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 \\ \lambda_4 &= \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{x_1^2}{X_0(x_1)} dx_1 - \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1^2}{X_0(x_1)} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

将(4.6)~(4.10)代入(4.2)及(4.3), 就得到双裂纹的弹性场。

五、断裂参数

断裂力学中两个很重要的参数就是应力强度因子 K 和裂纹张开位移 Δu (图2(b)), 应力强度因子 K 的定义为

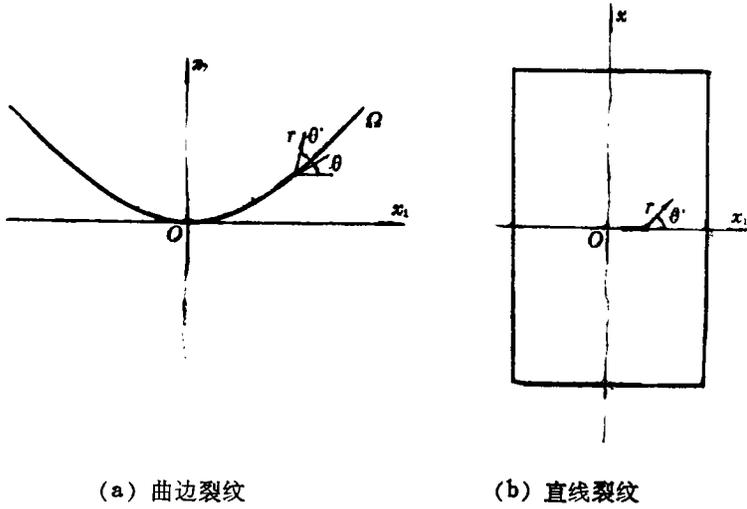


图 2

$$K = (K_{\text{I}}, K_{\text{II}}, K_{\text{III}})^T = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta' = 0}} \sqrt{2\pi r} (\sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{23})^T = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta' = 0}} \sqrt{2\pi r} \phi' \quad (5.1)$$

而对于图2a示的曲线裂纹, 我们定义裂纹尖端 a_j 或 b_j 的应力强度因子为

$$K = (K_{\text{I}}, K_{\text{II}}, K_{\text{III}})^T = \lim_{(x_1 \rightarrow a_j \text{ 或 } b_j)} \sqrt{2\pi r_j} \phi, m \quad (5.2)$$

$$r_j = \begin{cases} a_j - x_1 & \text{在 } \xi_\alpha = a_j \\ x_1 - b_j & \text{在 } \xi_\alpha = b_j \end{cases} \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (5.3)$$

裂纹张开位移 Δu 为

$$\Delta u = u(\xi, 0^+) - u(\xi, 0^-), \quad a_j \leq x_1 \leq b_j \quad (5.4)$$

(5.1)中, (r, θ') 为裂纹尖端的局部坐标系, 其原点在裂纹尖端, 方向 $\theta = 0$ 与裂纹面方向相反(图2b), (5.4)中, $(\xi, 0^\pm)$ 代表裂纹面沿 Ω 的上、下表面, ξ 见(2.6).

注意到应力强度因子 K 或 $(K_{\text{I}}, K_{\text{II}}, K_{\text{III}})$ 表示应力奇异性的强度, 在均匀介质中, $K_{\text{I}}, K_{\text{II}}, K_{\text{III}}$ 分别是张开型 I, 剪切型 II 及撕开型 III 的应力强度因子.

(i) 沿 Ω 的单一裂纹

将方程(3.4)、(3.5)、(3.11)及(3.15)代入(5.2), 则

$$K = (\pm) \sqrt{\frac{2\pi}{(b_1 - a_1)(1 + 4az_0^2)}} \left[a \left(\frac{1}{\mu} \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1^2}{X_0(x_1)} dx_1 - z_0^2 \right) t_1^0 \right. \\ \left. + \left(z_0 - \frac{1}{\mu} \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 \right) t_2^0 \right] \quad (5.5)$$

式中

$$z_0 = \begin{cases} a_1 & \text{在 } \xi = a_1 \\ b_1 & \text{在 } \xi = b_1 \end{cases} \quad (\pm) = \begin{cases} -1 & \text{在 } \xi = a_1 \\ +1 & \text{在 } \xi = b_1 \end{cases} \quad (5.6)$$

$X_0(x_1)$ 见(3.6)。

由(5.5)我们发现, K 与材料的弹性性质无关, 它与各向同性材料是一致的, 这与裂纹面上作用平衡力系(3.5)是一致的。

将(3.4)、(3.5)及(3.10)、(3.15)代入(5.4), 得

$$\Delta u = \Delta f_1(x_1)L^{-1}t_1^0 + \Delta f_2(x_1)L^{-1}t_2^0 \quad (5.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta f_1(x_1) &= 2a \left(\frac{1}{\mu} \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1^2}{X_0(x_1)} dx_1 - \int_{a_1}^{x_1} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 - \int_{a_1}^{x_1} \frac{x_1^2}{X_0(x_1)} dx_1 \right) \\ \Delta f_2(x_1) &= 2 \left(\int_{a_1}^{x_1} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 - \frac{1}{\mu} \int_{a_1}^{b_1} \frac{x_1}{X_0(x_1)} dx_1 - \int_{a_1}^{x_1} \frac{1}{X_0(x_1)} dx_1 \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

与应力强度因子不同, 裂纹张开位移受材料性质的影响。

(ii) 沿 Ω 的双裂纹问题

将(4.3)、(4.7)、(4.9)及(4.10)代入(5.2), 有

$$K = k_1 t_1^0 + k_2 t_2^0 \quad (5.9)$$

$$k_1 = \left\{ \begin{aligned} & -\sqrt{\frac{2\pi}{(b_1-a_1)(b_2-a_1)(a_2-a_1)(1+4aa_1^2)}} \left[\frac{1}{D} (\lambda_1 a_1 + \lambda_3) - a_1^3 \right] a, \quad x_1 = a_1 \\ & \sqrt{\frac{2\pi}{(b_1-a_1)(a_2-b_1)(b_2-b_1)(1+4ab_1^2)}} \left[\frac{1}{D} (\lambda_1 b_1 + \lambda_3) - b_1^3 \right] a, \quad x_1 = b_1 \\ & -\sqrt{\frac{2\pi}{(a_2-a_1)(a_2-b_1)(b_2-a_2)(1+4aa_2^2)}} \left[\frac{1}{D} (\lambda_1 a_2 + \lambda_3) - a_2^3 \right] a, \quad x_1 = a_2 \\ & \sqrt{\frac{2\pi}{(b_2-a_1)(b_2-b_1)(b_2-a_2)(1+4ab_2^2)}} \left[\frac{1}{D} (\lambda_1 b_2 + \lambda_3) - b_2^3 \right] a, \quad x_1 = b_2 \end{aligned} \right\}$$

$$k_2 = \left\{ \begin{aligned} & -\sqrt{\frac{2\pi}{(b_1-a_1)(b_2-a_1)(a_2-a_1)(a+4aa_1^2)}} \left[a_1^3 - \frac{1}{D} (\lambda_2 a_1 + \lambda_4) \right], \quad x_1 = a_1 \\ & \sqrt{\frac{2\pi}{(b_1-a_1)(a_2-b_1)(b_2-b_1)(a+4ab_1^2)}} \left[b_1^3 - \frac{1}{D} (\lambda_2 b_1 + \lambda_4) \right], \quad x_1 = b_1 \\ & -\sqrt{\frac{2\pi}{(a_2-a_1)(a_2-b_1)(b_2-a_2)(1+4aa_2^2)}} \left[a_2^3 - \frac{1}{D} (\lambda_2 a_2 + \lambda_4) \right], \quad x_1 = a_2 \\ & \sqrt{\frac{2\pi}{(b_2-a_1)(b_2-b_1)(b_2-a_2)(1+4ab_2^2)}} \left[b_2^3 - \frac{1}{D} (\lambda_2 b_2 + \lambda_4) \right], \quad x_1 = b_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

D , λ_1 , λ_2 , λ_3 及 λ_4 由(4.10)给定, 同样, 由上式发现: 应力强度因子与弹性系数无关。

将(4.2)、(4.3)、(4.7)、(4.9)及(4.10)代入(5.4), 有

$$\Delta u = \Delta g_1(x_1)L^{-1}t_1^0 + \Delta g_2(x_1)L^{-1}t_2^0 \quad (5.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta g_1(x_1) &= 2a \int_{a_j}^{x_1} \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_3 - Dx_1^3}{DX_0(x_1)} dx_1 \\ \Delta g_2(x_1) &= 2 \int_{a_j}^{x_1} \frac{Dx_1^2 - \lambda_2 x_1 - \lambda_4}{DX_0(x_1)} dx_1 \end{aligned} \right\} \quad (j=1 \text{ 或 } 2) \quad (5.12)$$

$X_0(x_1)$ 由(4.5)给定, 裂纹张开位移与弹性性质有关, 通过 L^{-1} 联系。

很容易发现, 由(5.5)、(5.7)、(5.9)及(5.11)给出的结果在 $a \rightarrow 0$ 时, 就退化成C.Hwu在[6]中发现的共线裂纹的结果, 又因为 $(1+4ad_j^2) \geq 1$ ($d_j = a_1, b_1, a_2$ 或 b_2), 所以当结构只遭受 t_2^0 时, 曲边裂纹的应力强度因子比直裂纹小。

六、结 论

文章得到了沿抛物线 Ω 分布的各向异性曲线裂纹的一般解, 并求解了单裂纹及双裂纹的断裂参数, 结果显示: 对不同的裂纹尺寸, 其解形式完全相似, 仅仅在于 $k_1, k_2, \Delta g_1(x_1), \Delta g_2(x_1)$ 的选择不同, 当只有 t_2^0 作用时, 曲裂纹的应力强度因子比相应的直裂纹小。

参 考 文 献

- [1] Hwu, C. and T. C. T. Ting, Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solid with an elliptic inclusion, *Quart J. Mech. Appl. Math.*, 42 (1989), 553—572.
- [2] Eshelby, J. D., W. T. Read and W. Shockley, Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory, *Acta Metal*, 1 (1953), 251—259.
- [3] Hwu, C. and W. J. Yen, Green's functions of two-dimensional anisotropic plates containing an elliptic hole, *Internat. J. Solids Structures*, 27 (1991), 1705—1791.
- [4] Stroh, A. N., Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, *Phil. Mag.*, 3 (1958), 625—646.
- [5] Chadwick, P. and G. D. Smith, Foundations of the theory of surface waves in anisotropic elastic materials, *Adv. Appl. Mech.*, 17 (1977), 303—376.
- [6] Hwu, C., Collinear cracks in anisotropic bodies, *Internat. J. Fracture*, 52 (1991), 239—256.
- [7] 钱伟长、叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社 (1980).
- [8] 徐芝纶, 《弹性力学》, 高等教育出版社 (1985).
- [9] Lekhnitskii, S. G., *Theory of Elasticity of Anisotropic Body*, MIR, Moscow (1980).
- [10] Stroh, A. N., Steady-state problems in anisotropic elasticity, *J. Math. Phys.*, 41 (1962), 77—103.
- [11] Sih, G. C., P. C. Paris and G. R. Irwin, Cohlinear cracks, *Int. J. Fracture Mech.*, 1 (1965), 189—203.

Curve Cracks Lying along a Parabolic Curve in Anisotropic Body

Hu Yuan-tai Zhao Xing-hua

(*Shanghai Institute of Applied Mathematics and
Mechanics, Shanghai University, Shanghai*)

Abstract

A general solutions for the stress and displacement of curve cracks distributing along a parabolic curve Ω in an infinite homogeneous anisotropic medium subjected to uniform loading at infinity have been given in this paper by using the Stroh's formalism and the mapping method. The solutions are valid not only for plane problems but also for antiplane problems and the problems whose inplane and antiplane deformations couple each other. A closed form solution for the stress and displacement in the entire domain is obtained for one curve crack or two curve cracks along the parabolic curve. The simple explicit form solution for the stress intensity factors and the crack opening displacement are presented.

Key words eigenvalue, crack, stress intensity factor