应用数学和力学，第16卷 第3期（1995年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高阶取样定理*

陈达段　刘晓明

（上海大学，上海　200072）

（1994年7月30日收到）

摘　要

Shannon取样定理是通讯理论中根据离散取样值重建信号的一个最基本定理．彭瑞仁先生在对取样间隔作微小牺牲的前提下，得出了收敛速度比Shannon取样公式快得多的三阶、四阶和五阶的取样公式[1]．本文在彭先生工作的基础上，给出了构造高阶取样公式的一般方法以及一种N阶取样公式的简单形式．

关键词　频谱有限　取样　奈奎斯特频率

一、前　言

给定一个连续的时间信号函数，是否有可能仅仅通过测定离散的时间点上的瞬时值，就能获得该信号的全部信息？这个问题由Shannon于1948年给出的取样定理作出了回答[3]．Shannon 指出，一个频带有限（band-limited）的信号函数，可以转化成离散的时间信号，而不丢失其内含的信息量．

Shannon 定理　设$f(t)\in L^2$，且存在$b>0$，使当$|\omega|>b$时，$\hat{f}(\omega)=0$，则有

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\cdot\frac{\sin b(t-nT)}{b(t-nT)} \tag{1.1}$$

其中$\hat{f}(\omega)$是$f(t)$的付里叶变换．$T=\frac{\pi}{b}$，$\frac{1}{T}$为取样频率，在公式（1.1）中$\frac{1}{T}=\frac{b}{\pi}$称为奈奎斯特频率（Nyquist frequency）[4]．

Shannon 定理说明，一个连续的信号函数，如果它是频谱有限的，就可以被它在离散的等间隔时间点上的值$f(nT)$来准确表出．从公式（1.1）中我们看到，指定时刻t的信号值$f(t)$被表成t时刻之前和之后的各抽样点上的瞬间值的加权和．加权因子是$\frac{\sin b(t-nT)}{b(t-nT)}$，它的幅度与$(t-nT)$成反比．公式（1.1）反映了这样一个物理特性：连续信号函数$f(t)$在固定时刻t_0的信号值，与t_0时刻之前之后收到的信号有着相关性．离t_0时刻较近的取样点上的样本值对$f(t_0)$的值有较大的影响，取样点$t_n=nT$离t_0越远，$f(t_n)$对$f(t_0)$的贡献也就越小．

从数学角度来看公式（1.1），加权因子中的分子随n的变化而改变符号（不一定是逐项交

* 钱伟长推荐．

叉变化），而分母是 $(t-nT)$ 的一次幂，所以对固定的 t，公式(1.1)的右边是一个条件收敛的级数。它收敛，但收敛速度很不理想。需要计算很多项，才能达到一定的精确度。

但是在实际问题中，远离点的样本值的影响，随着时间间隔的增大，往往衰减得非常之快。这说明应该有可能找到比Shannon公式更好的数学模型来描述一个时间信号函数。

彭瑞仁先生从改变取样间隔出发，发现只要以稍大于 b/π (Nyquist rate) 的速率取样，就可把取样公式的阶数提高[1]。因为 $\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(t_0-nT)^{1+\varepsilon}}$ $(t_0\neq nT)$ 当 $\varepsilon>0$ 时就是绝对收敛的，所以从一阶公式到高阶取样公式是一个本质性的突破。在计算机上对三阶取样公式进行实例演算和比较，三阶公式的收敛速度比一阶公式提高了数百倍。

本文，在彭先生工作的基础上，给出一个导出高阶取样公式的一般方法，并且求出了高阶取样公式的一般表达形式。

二、高阶取样公式

下面我们给出一个构造高阶取样公式的一般方法

定理1　设(1) $f(t)\in L^2$，且 $\exists\, b>0$，使 $\operatorname{supp}\hat{f}\cup[-b,b]$；

(2) $h<\pi/b$，$\beta=\pi/b-h>0$；

(3) $\Phi_N(s)$ 为频域中的一个偶函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $N-2$ 次可导，$N-1$ 次分段可导；在 $[-b,b]$ 内 $\Phi_N(s)\equiv1$；$\operatorname{supp}\Phi_N(s)=[-b-2\beta,\ b+2\beta]$；$\Phi_N^{(k)}(-b-2\beta)=\Phi_N^{(k)}(b+2\beta)=0$ $(k=0,1,\cdots,N-2)$；$\Phi_N^{(N-1)}(s)$ 在 $[-b-2\beta,b+2\beta]$ 上为分段常函数。

则有

(a) $f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}f(nh)\varphi_N(t-nh)\cdot h$

(b) $\varphi^N(t)=O\left(\frac{1}{t^N}\right)$ 　　$(t\to\infty)$

(c) $\varphi_N(t)$ 为 t 的实初等函数。

其中 $\varphi_N(t)$ 是 $\Phi_N(s)$ 的付里叶逆变换。

证明　(a) 对 $[-b-\beta,b+\beta]$ 上的 $\hat{f}(s)$ 作周期延拓，周期 $T=2(b+\beta)=2\pi/h$，得周期函数 $F_p(s)$，并将它作付里叶展开：

$$F_p(s)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n\cdot\exp[-in\omega s] \tag{2.1}$$

其中　$\omega=2\pi/T=h$。

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}F_p(s)\exp[in\omega s]ds=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\hat{f}(s)\exp[in\omega s]ds$$

$$=\frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(s)\exp[inhs]ds=h\cdot f(nh)$$

所以

$$F_p(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h\cdot f(nh)\exp[-inhs]$$

$$\hat{f}(s) = F_p(s)\cdot\Phi_N(s) = h\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty} f(nh)\Phi_N(s)\exp[-inhs] \tag{2.2}$$

对(2.2)式两边作付里叶逆变换：

$$f(t) = \frac{h}{2\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty} f(nh)\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_N(s)\exp[-in\omega s]\cdot\exp[ist)ds$$

$$= h\cdot\sum_{-\infty}^{+\infty} f(nh)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_N(s)\exp[i(t-nh)s]ds \tag{2.3}$$

$$= h\sum_{n=-\infty}^{n+\infty} f(nh)h\phi_N(t-nh)$$

这里$\varphi_N(t)$是$\Phi_N(s)$的付氏逆变换.

(b) 由条件(3)，$\Phi_N^{(k)}(-b-2\beta) = \Phi_N^{(k)}(b+2\beta) = 0(k=0,1,\cdots,N-2)$，$\Phi_N^{(N-1)}(s)$ 除若干个分点外存在，且为分段常函数，即存在分点：$-b-2\beta = S_{-m} < S_{-m+1} < \cdots < S_{-1} < S_0 = 0 < S_1 < \cdots < S_m = b+2\beta, S_{-k} = -S_k$，使

$$\Phi_N^{(N-1)}(s) = E_k^N \qquad (s\in(S_{k-1},S_k);k=-m+1,-m+2,\cdots,m-1,m)$$

E_k^N为常数。

因为

$$\varphi_N(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi_N(s)\exp[its]ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-b-2\beta}^{b+2\beta}\Phi_N(s)\exp[its]ds$$

对等式右边进行多次分部积分，

$$\varphi_N(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-b-2\beta}^{+b+2\beta}\Phi_N(s)\exp[its]ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(-1)^{N-2}}{(it)^{N-2}}\int_{-b-2\beta}^{b+2\beta}\Phi_N^{(N-2)}(s)\exp[its]ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(-1)^{N-1}}{(it)^N}\sum_{k=-m+1}^{m}\int_{S_{k-1}}^{S_k} E_k^N d\exp[its] \tag{2.4}$$

等式右边的和式显然有界，所以$\varphi_N(t) = O\left(\frac{1}{t^N}\right)(t\to\infty)$.

(c) 因为$\Phi_N(s)$为偶函数，所以

当N为偶数时，$\Phi_N^{(N-2)}(s)$为偶函数

$$\varphi_N(t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{(-1)^{N-2}}{(it)^{N-2}}\int_{-b-2\beta}^{b+2\beta}\Phi_N^{(N-2)}(s)[\cos st + i\sin st]ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{N-2}}{(it)^{N-2}}\int_0^{b+2\beta}\Phi_N^{(N-2)}(s)\cdot\cos st ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^N}{i^{N-2}t^N}\sum_{k=1}^{m} E_k^N[\cos S_k t - \cos S_{k-1} t] \tag{2.5}$$

当N为奇数时，$\Phi_N^{(N-2)}(s)$为奇函数，可以得到

$$\varphi_N(t)=\frac{1}{\pi}\quad\frac{(-1)^N}{i^{N-1}t^N}\quad\cdot\sum_{k-1}^{m}E_k^N[\sin S_k t-\sin S_{k-1}t]\tag{2.6}$$

从(2.5)式和(2.6)式即知$\varphi_N(t)$为实初等函数。

定理2 满足定理1条件(3)的$\Phi_N(s)$是存在的。

证明 我们要做的只需把满足条件(3)的$\Phi_N(s)$构造出来。

可以有许多的方法构造出这样的$\Phi_N(s)$。但是从我们推导公式(2.5)和(2.6)的步骤中可以看到，如果$\Phi_N^{(N-1)}(s)$是$[-b-2\beta,-b]$中一些等长区间上的分段常函数，而且在各小区间上$\Phi_N^{(N-1)}(s)$的绝对值相等，（它在$[b,b+2\beta]$上也必然如此）那么公式(2.5)和(2.6)的结果还可以进一步简化。从这一思路出发，我们来构造一个$\Phi_N(s)$（这里规定$N\geqslant 2$）

把$[-b-2\beta,-b]$等分成2^{N-2}个小区间，每个小区间的长度为$\beta/2^{N-3}$，分点为$S_k=-b-2\beta+\frac{k\beta}{2^{N-3}}$ $(k=0,1,2\cdots,2^{N-2})$。

记

$$l_m=\beta/2^{m-3}$$

$$h_2=1$$

$$h_m=\frac{h_m-1}{l_m}=\frac{h_2}{l_m\cdot l_{m-1}\cdots l_3}=\frac{2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\cdots 2^{m-3}}{\beta^{m-2}}\qquad(m\geqslant 3)$$

$$k_m=\frac{h_m}{l_m}$$

则有

$$\begin{cases}k_2=\dfrac{1}{2\beta}\\[2ex] k_m=\dfrac{2^0\cdot 2^1\cdot 2^2\cdots 2^{m-3}\cdot 2^{m-3}}{\beta^{m-1}}\qquad(m\geqslant 3)\end{cases}\tag{2.7}$$

以$\pm k_N$为斜率在$[-b-2\beta,-b]$上作折线如下：

$$t_1(x)=k_N(x+b+2\beta)\qquad\left(x\in\left[-b-2\beta,\ -b-2\beta+\frac{\beta}{2^{N-3}}\right]\right)$$

然后按下列规律逐步延拓：

$$t_m(x)=\begin{cases}t_{m-1}(x) & \left(x\in\left[-b-2\beta,\ -b-2\beta+\dfrac{\beta}{2^{N-m-1}}\right]\right)\\[2ex] (-1)^m t_{m-1}\left(-2b-4\beta+\dfrac{\beta}{2^{N-m-2}}-x\right) & \end{cases}$$

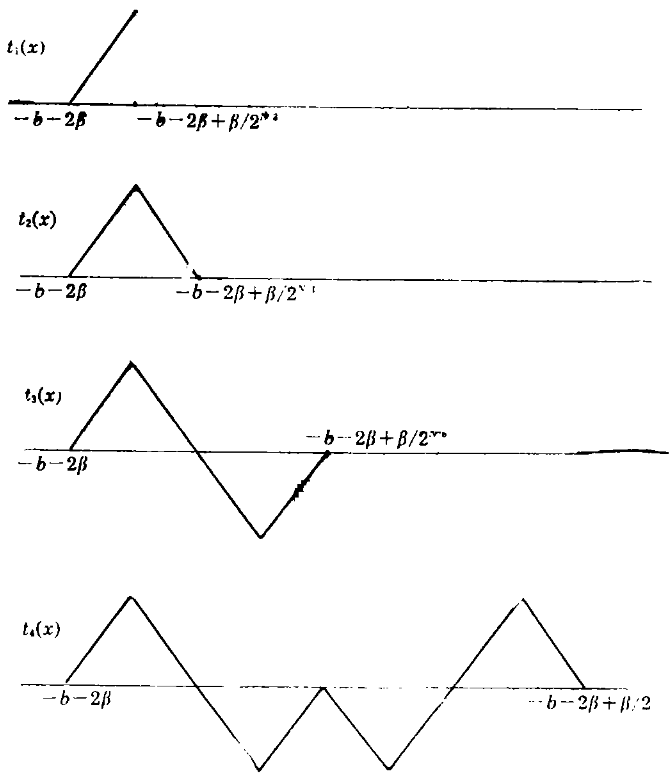
$$\left(x\in\left[-b-2\beta+\frac{\beta}{2^{N-m-1}},\ -b-2\beta+\frac{\beta}{2^{N-m-2}}\right]\right)$$

$$(2\leqslant m\leqslant m-1)$$

最后得到的是

$$t_{N-1}(x)=\begin{cases}t_{N-2}(x) & (x\in[-b-2\beta,\ -b-\beta])\\ (-1)^{N-1}t_{N-2}(-2b-2\beta-x) & (x\in[-b-\beta,\ -b])\end{cases}$$

下面的图形给出了逐步构造的过程：



……

图 1

如此向右依次作奇偶交替延拓，最后将图形延拓至整个$[-b-2\beta,\ -b]$区间，得到的函数为$t_{N-1}(x)$。

记

$$T_N(x)=t_{N-1}(x)$$

令

$$g_1(x)=\int_{-b-2\beta}^{x} T_N(u)\,du$$

$$g_2(x)=\int_{-b-2\beta}^{x} g_1(u)\,du$$

……

$$g_{N-2}(x)=\int_{-b-2\beta}^{x} g_{N-3}(u)\,du \tag{2.8}$$

再记

$$G_N(x)=g_{N-2}(x)$$

那么

$$\Phi_N(s)=\begin{cases} G_N(s) & (S\in[-b-2\beta,\ -b)) \\ 1 & (s\in[-b,\ b)) \\ G_N(-s) & (S\in[b,\ b+2\beta]) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{2.9}$$

就是满足条件(3)的一个函数。

现在我们再从$\Phi_N(s)$的结构出发，回过去求$\Phi_N^{(N-1)}(s)$。

$\Phi_N(s)$ $N-2$ 次可导，

$N=2$ 时，

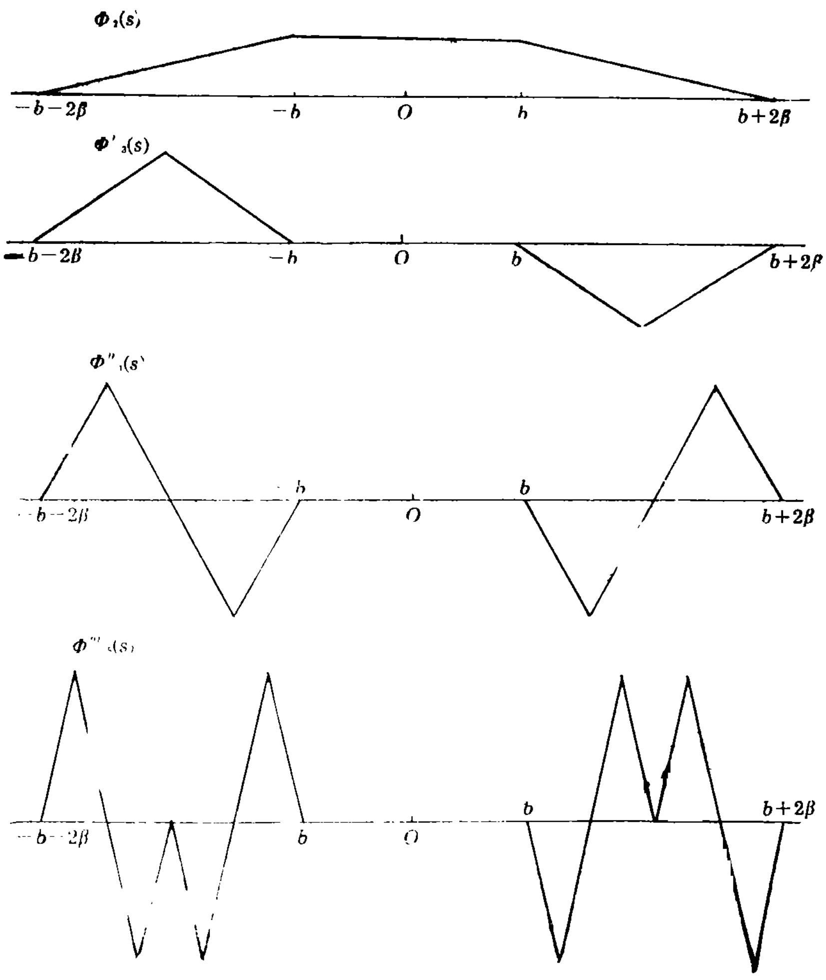
$$\Phi_2(s)=\begin{cases} T_2(s) & (s\in[-b-2\beta,\ -b]) \\ T_2(-s) & (s\in[b,\ b+2\beta]) \\ 1 & (s\in[-b,\ b]) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \tag{2.10}$$

$N\geqslant 3$时

$$\Phi_N^{(N-2)}(s)=\begin{cases} T_N(s) & (s\in[-b-2\beta,\ -b]) \\ (-1)^{N-2}T_N(-s) & (s\in[b,\ b+2\beta] \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases} \tag{2.11}$$

N为奇数或偶数时，$\Phi_N^{(N-2)}(s)$分别为奇函数或偶函数。它们的图形为

……



……

图 2

显然，在各分点分成的小区间内，$\Phi_N(s)$ $N-1$ 次可导，且 $\Phi_N^{(N-1)}(s)$ 为 常函数。根据

(2.5)式和(2.6)式，我们要知道的是$\Phi_N^{(N-1)}(s)$在$(0, b+2\beta)$上的值（分点除外）。但在$(0, b)$上，$\Phi_N^{(N-1)}(s)\equiv 0$，所以我们可把讨论范围限制在$(b, b+2\beta)$上。

记

$$\Delta=2\beta/2^{N-2}$$
$$S_j=b+j\Delta$$
$$I_j=(b+(j-1)\Delta,\ b+j\Delta)$$

在I_j上$\Phi_N^{(N-1)}(s)=E_j^N=k_N D_j^N$。这里$k_N$由(2.7)式给出，而$D_j^N=\pm 1$，其符号可按$(-1)^{N-2}T_N(-s)$的结构来确定（参看图2）。比如

$$D_1^2=-1$$
$$D_j^3=\begin{cases}-1 & I_1\\ 1 & I_2\end{cases}$$
$$D_j^4=\begin{cases}-1 & I_1\\ 1 & I_2\\ 1 & I_3\\ -1 & I_4\end{cases}$$
$$\cdots\cdots$$

归纳之，D_j^N满足如下的规律：

$$\begin{cases}D_1^N=-1 & (N=2,3,4,\cdots)\\ & (m=0,1,2,\cdots,N-3)\\ D_{2^m+j}^N=-D_j^N & (j=1,2,3,\cdots,2^m)\end{cases} \tag{2.12}$$

定理3： 定理2所构造的$\Phi_N(s)$ $(N\geqslant 3)$，其付里叶逆变换为

$$\varphi_N(t)=\frac{2^{\frac{(N-2)(N+1)}{2}}}{\pi\beta^{N-1}}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\beta t}{2^{N-2}}\right)\cdot\sin\frac{\beta t}{2^{N-3}}\cdots\sin\frac{\beta t}{2}\cdot\sin\frac{\pi t}{h}}{t^N} \tag{2.13}$$

证明 分N为偶数和奇数两种情形来讨论。

$N=2l$时，由(2.5)式

$$\varphi_{2l}(t)=\frac{(-1)^{l-1}\cdot k_{2l}}{\pi t^{2l}}\cdot\sum_{j=1}^{2^{2l-2}}D_j^N[\cos(b+j\Delta)t-\cos(b+(j-1)\Delta)t] \tag{2.14}$$

记

$$f(b,t)=\sum_{j=1}^{2^m}D_j^N[\cos(b+j\Delta)t-\cos(b+(j-1)\Delta)t]$$

则有

$$\sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}}D_j^N[\cos(b+j\Delta)t-\cos(b+(j-1)\Delta)t]$$
$$=\sum_{i=1}^{2^m}D_{2^m+i}^N[\cos(b+2^m\Delta+i\Delta)t-\cos(b+2^m\Delta+(i-1)\Delta)t]$$
$$=-f(b+2^m\Delta,t) \tag{2.15}$$

现在

$$\sum_{j=1}^{2^{2l-2}} D_j^N[\cos(b+j\Delta)t-\cos(b+(j-1)\Delta)t]$$

$$=\sum_{j=1}^{2^0}(\cdot)+\sum_{j=2^0+1}^{2^1}(\cdot)+\sum_{j=2^1+1}^{2^2}(\cdot)+\cdots+\sum_{j=2^{2l-3}+1}^{2^{2l-2}}(\cdot)$$

直接算出等式右边的第一项后，再利用性质(2.15)逐项相加上去，最后可得到

$$\sum_{j=1}^{2^{2l-2}} D_j^N[\cos(b+j\Delta)t-\cos(b+(j-1)\Delta)t]$$

$$=(-1)^{l-1}\cdot 2^{2l-1}\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\cdot\sin\Delta t\cdot\sin 2\Delta t\cdots\sin 2^{2l-4}\Delta t\cdot\sin(b+2^{2l-3}\Delta)t$$

把这个结果代入(2.14)式：

$$\varphi_{2l}(t)=\frac{2^{\frac{(2l-2)(2l+1)}{2}}}{\pi\beta^{2l-1}}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\beta t}{2^{2l-2}}\right)\cdot\sin\frac{\beta t}{2^{2l-3}}\cdots\sin\frac{\beta t}{2}\cdot\sin\frac{\pi t}{h}}{t^{2l}} \tag{2.16}$$

$N=2l+1$时，由(2.6)式

$$\varphi_{2l+1}(t)=\frac{(-1)^l\cdot k_{2l+1}}{\pi t^{2l+1}}\cdot\sum_{j=1}^{2^{2l-1}} D_j^N[\sin(b+j\Delta)t-\sin(b+(j-1)\Delta)t]$$

仿照前面的方法，不难算出

$$\varphi_{2l+1}(t)=\frac{2^{\frac{(2l-1)(2l+2)}{2}}}{\pi\beta^{2l}}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\beta t}{2^{2l-1}}\right)\cdot\sin\frac{\beta t}{2^{2l-2}}\cdots\sin\frac{\beta t}{2}\cdot\sin\frac{\pi t}{h}}{t^{2l+1}} \tag{2.17}$$

综合(2.16)和(2.17)式，即是定理3的结论。

$N=2$的情况则可直接从(2.5)式得到。这样就有

$$\begin{cases}\varphi_2(t)=\dfrac{1}{\pi\beta}\cdot\dfrac{\sin\beta t\cdot\sin\pi t/h}{t^2} \\[2ex] \varphi_N(t)=\dfrac{2^{\frac{(N-2)(N+1)}{2}}}{\pi\beta^{N-1}}\cdot\dfrac{\sin^2\left(\frac{\beta t}{2^{N-2}}\right)\cdot\sin\frac{\beta t}{2^{N-3}}\cdots\sin\frac{\beta t}{2}\cdot\sin\frac{\pi t}{h}}{t^N} \quad (N\geqslant 3)\end{cases} \tag{2.18}$$

引进下面的记号

$$\operatorname{sinc} x=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$$

我们就可把本文的主要结果叙述如下：

定理4（时域中的高阶取样定理） 设$f(x)\in L^2$为b频谱有限函数，那么当取样间隔$h\leqslant\pi/b$时，由$f(t)$的取样值$\{f(nh)\}_{n\in z}$可以完全确定$f(t)$。特别当$h<\pi/b$时，对于任意指定的整数$N(\geqslant 2)$，还成立如下的取样公式

$$f(t)=\sum_{n\in z} f(nh)\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{h}\right)\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{\beta t}{2^{N-2}}\right)\cdot\prod_{j=1}^{N-2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\beta t}{2^j}\right) \tag{2.19}$$

其中$\beta=\pi/b-h$。

用同样的方法，可推出形式上完全一样的频域中的取样定理。

定理5（频率域中的高阶取样定理）

设$\hat{f}(\omega)$是$f(t)$的Fourier变换，$\text{supp}f(t)\subset[-b,b]$，$h\subset\pi/b$，$\beta=\pi/b-h$，则对于任意$N\geqslant 2$，有

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n\in z}\hat{f}(nh)\cdot\text{sinc}\left(\frac{\pi\omega}{h}\right)\cdot\text{sinc}\left(\frac{\beta\omega}{2^{N-2}}\right)\cdot\prod_{j=1}^{N-2}\text{sinc}\left(\frac{\beta\omega}{2^j}\right). \qquad (2.20)$$

为了说明(2.19)式和(2.20)式确实是取样公式，我们最后验证一下函数系$\{h\cdot\varphi_N(t-nh)\}_{n\in z}$的离散正交性和内积正交性。

从(2.18)式可以看到，若$m\neq n$，则右边分子中的最后一个因子在$t=(m-n)h$时为零。另外，又显然有

$$\lim_{t\to nh}h\cdot\varphi_N(t-nh)=1$$

也就是

$$h\cdot\varphi_N(mh-nh)=\delta_{m,n}$$

这就是所谓的离散正交性。

至于内积的正交性，我们先在基本空间V_0中引进如下的内积定义[2]：

$$\langle f,g\rangle_0=\sum_{k\in z}f(kh)\overline{g(kh)} \qquad (f,g\in V_0)$$

根据这一定义，我们容易看出

$$\langle h\cdot\varphi_N(t-nh),\ h\varphi_N(t-mh)\rangle_0$$

$$=\sum_{k\in z}h\cdot\varphi_N(kh-nh)\cdot\overline{h\cdot\varphi_N(kh-mh)}=\delta_{m,n}$$

以及

$$\langle f(t),h\varphi_N(t-nh)\rangle_0=\sum_{k\in z}f(kh)\cdot\overline{h\varphi_N(kh-nh)}=f(nh)$$

正是由于这些性质，使公式(2.19)和(2.20)成为取样公式。

参 考 文 献

[1] 彭瑞仁，信息技术中的数据压缩——快速取样定理，上海工业大学学报，15(4)(1994)

[2] 李世雄，Radon变换的抽样取值与小波，地球物理学报，36(2)(1993)

[3] Jerry, A. J., *The Shannon Sampling Theorem*, proc. IEEE, 65(1977).

[4] Oppenheim, A. V., *Signals and Systems*, Prentice-Hall, Inc.(1983).

Sampling Formulae of Higher Order

Chen Da-duan Liu Xiao-ming

(Shanghai University, Shanghai 200072)

Abstract

Shannon smapling theorem is the basic theorem in signal reconstruction based on discrete sampling values in communication theory. The convergence rate of this formula, however is very slow. Professor Pen Rui-reng, after some slight compromise on sampling rate, has come to the 3rd order, the 4th order and the 5th order sampling formulae. The calculation of the third order formula on the computer proves that it converges much faster than the Shannon formula. This paper gives a general method to construct a higher order sampling formula.

Key words band-limited, sampling, Nyquist frequency