应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于非完整力学系统相对部分变量的稳定性*

朱海平 梅凤翔

（北京理工大学，北京 100081）

（1994年8月29日收到）

摘 要

本文给出研究非完整系统相对部分变量稳定性的一种方法，并得到非完整系统相对部分变量的一些稳定性定理；同时，本文还得到一类非完整系统相对全部变量稳定性与相对部分变量稳定性的关系。

关键词 非完整系统 部分变量 稳定性 流形

一、引 言

自从 Whittaker[1]于1904年首先提出非完整系统的平衡位置稳定性问题以来，许多学者在这一领域作了大量的研究工作，得到了许多重要结果[2~8]。非完整系统不同于完整系统，其平衡位置常常不是孤立的，且其运动方程的特征行列式是非对称的，这使得部分变量稳定性的研究在非完整系统稳定性的研究中占有重要位置。Румянцев[2,3]研究了线性齐次非完整系统相对部分变量的稳定性；文献[6]将一部分以往结果推广到了非线性非完整系统。然而，这些研究还不够完善，特别是关于非线性非完整系统的稳定性，结果不多。本文给出一种研究非完整系统平衡位置相对部分变量稳定性的方法，此方法既适合线性非完整系统，也适合非线性非完整系统。由此，本文得到非完整系统平衡位置相对部分变量稳定性的一些判据。对于某些非完整系统，其相对全部变量的稳定性与相对部分变量的稳定性具有等价关系，文献[8]给出了一类这样的非完整系统。本文得到了另一类这样的非完整系统，而文献[8]中的系统为其特殊情况。

二、相应完整系统在约束流形上关于部分变量的稳定性

设力学系统所受完整约束是定常的，其位形由n个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$来确定，在系

* 朱照宣推荐。
国家自然科学基金资助项目。高校博士点专项科研基金资助课题。

统的运动上受有g个理想的定常 Четаев 型非完整约束

$$f_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{q}=(q_1,\ q_2,\cdots,q_n)^T$，$\dot{\boldsymbol{q}}=(\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_n)^T$.

系统的运动方程可表为 Routh 方程形式[7]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s}+Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.2}$$

其中 $T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(\boldsymbol{q})\dot{q}_i\dot{q}_j$为系统的动能，$U=U(\boldsymbol{q})$为系统的力函数，$Q_s=Q_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统所受非有势力，λ_β为不定乘子.

将约束方程(2.1)对t求导，得

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s+\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)=0 \tag{2.3}$$

将由方程(2.2)解得的$\ddot{q}_s(s=1,\cdots,n)$代入方程(2.3)，得到为确定乘子λ_β的代数方程

$$\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_{sl}^{-1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\lambda_\beta+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_l}\dot{q}_l$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_l}\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;\ s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\frac{\partial U}{\partial q_s}+Q_s\right\}=0$$

$$(\gamma=1,2,\cdots,g) \tag{2.4}$$

由方程(2.4)可求得λ_β，设为

$$\lambda_\beta=\lambda_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{2.5}$$

将式(2.5)代入方程(2.2)，得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=\frac{\partial U}{\partial q_s}+Q_s+\Lambda_s \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{2.6}$$

其中 $\Lambda_s=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$为系统所受约束反力. 我们称方程(2.6)为与非完整系统(2.1)(2.2)相应的完整系统的运动方程. 非完整系统的运动可由约束方程(2.1)和相应完整系统的运动方程(2.6)确定.

将$\ddot{\boldsymbol{q}}=0$，$\dot{\boldsymbol{q}}=0$代入(2.1)(2.6)中，可得系统的平衡方程

$$\left.\begin{array}{ll} f_\beta(\boldsymbol{q},0)=0 & (\beta=1,2,\cdots,g) \\ \dfrac{\partial U}{\partial q_s}+(Q_s+\Lambda_s)|_{\dot{q}=0}=0 & (s=1,2,\cdots,n) \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

这里假设$(Q_s+\Lambda_s)|_{\dot{q}=0}$有意义. 以上方程组中含有$n+g$个方程，$n$个未知量. 由于方程(2.3)与方程(2.6)相容，故方程(2.7)中的第二组方程中至多只有$\varepsilon=n-g$个独立. 这样，平衡方程(2.7)中至多只有n个独立的方程.

现设

$$D=\{(\boldsymbol{q},\dot{q})\,|\,f_\beta(\boldsymbol{q},\dot{q})=0,\ \beta=1,\cdots,g\} \tag{2.8}$$

显然，D是R^{2n}内的一闭流形，称为系统的约束流形. 从方程(2.6)的推导过程可以看出，D

是相应完整系统运动方程(2.6)的不变集。从而，非完整系统的稳定性可以转化为相应完整系统在约束流形上的稳定性。

定理2.1 非完整系统(2.1)(2.2)的平衡位置$q=\bar{q}, \dot{\boldsymbol{q}}=0$相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$的稳定性等价于相应完整系统(2.6)的平衡位置$\boldsymbol{q}=\bar{\boldsymbol{q}}, \dot{\boldsymbol{q}}=0$在约束流形$D$上相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$的稳定性，这里$\boldsymbol{q}'=(q_1,\cdots,q_s),^T \dot{\boldsymbol{q}}'=(\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_s)^T$。

平衡位置相对部分变量的稳定性已经有了一系列结果[9]，这些结果大多可以被移植到在闭流形D上相对部分变量的稳定性。例如

命题 若存在函数$V=V(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$在流形$D$上相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$正定（负定），且i)它沿原系统的导数$\dot{V}$在$D$上常负（常正），则平衡位置在流形$D$上相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$稳定；ii)它沿原系统的导数$\dot{V}$在$D$上相对$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$负定（正定），则平衡位置在流形$D$上相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$渐近稳定。

三、非完整系统相对部分变量的稳定性定理

不失一般性，假设$\boldsymbol{q}=0$，$\dot{\boldsymbol{q}}=0$为非完整系统(2.1)(2.2)的平衡位置。显然，它也是方程(2.6)的平衡位置。

取V函数为

$$V=T-U \tag{3.1}$$

它沿方程(2.6)的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}&=\frac{d}{dt}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-T-U\Big)\\&=\sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}-\frac{\partial U}{\partial q_s}\Big)\dot{q}_s\\&=\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s\end{aligned} \tag{3.2}$$

若力函数U相对部分变量$\boldsymbol{q}'$负定，那么$V=T-U$在流形D上相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$正定。这时，利用命题，有结论

定理3.1 如果力函数U相对部分变量$\boldsymbol{q}'$负定，且

i) $\sum\limits_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s$在流形$D$上常负，则平衡位置$\boldsymbol{q}=0$，$\dot{\boldsymbol{q}}=0$相对$\boldsymbol{q}'$,$\dot{\boldsymbol{q}}'$稳定；

ii) $\sum\limits_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s$在流形$D$上相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$负定，则平衡位置$\boldsymbol{q}=0, \dot{\boldsymbol{q}}=0$相对$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$渐近稳定。

若力学系统仅受线性非完整约束

$$\sum_{s=1}^{n}a_{s\beta}(\boldsymbol{q})\dot{q}_s=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{3.3}$$

并假设系统只受有力势的作用，那么，在约束流形 $D_1=\left\{(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\mid\sum\limits_{s=1}^{n}a_{s\beta}(\boldsymbol{q})\dot{q}_s=0,\ \beta=1,\cdots,g\right\}$上，

$$\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}\Lambda_s\dot{q}_s=0 \tag{3.4}$$

若系统除受有势力作用外，还受有耗散力$F_s(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\sum\limits_{k=1}^{n}B_{sk}(\boldsymbol{q})\dot{q}_k$作用。那么，在约束流形$D_1$上，

$$\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s=\sum_{s=1}^{n}F_s\dot{q}_s\leqslant 0 \tag{3.5}$$

所以，由定理可得

推论3.1[2] 若线性齐次定常非完整系统的力函数$U(\boldsymbol{q})$相对$\boldsymbol{q}'$负定，那么无论有无耗散力作用，其平衡位置$\boldsymbol{q}=0$，$\dot{\boldsymbol{q}}=0$相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$都是稳定的。

如果非完整约束(2.1)满足关系

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s=k_\beta f_\beta\qquad(\beta=1,2,\cdots,g) \tag{3.6}$$

那么，类似推论(3.1)，有结论

推论3.2 对于受有满足条件(3.6)的非完整约束(2.1)的定常力学系统，若其力函数$U(\boldsymbol{q})$相对$\boldsymbol{q}'$负定，那么无论有无耗散力作用，其平衡位置$\boldsymbol{q}=0$，$\dot{\boldsymbol{q}}=0$相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$都是稳定的。

例3.1 假设一单位质量质点在空间中运动，其动能为$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$，力函数为$U=-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$，耗散函数为$F=\frac{1}{2}(\mu_1\dot{q}_1^2+\mu_2\dot{q}_2^2+\mu_3\dot{q}_3^2)$，非完整约束方程为$\dot{q}_3-\frac{1}{2}[a_1(\boldsymbol{q})\dot{q}_1^2+a_2(\boldsymbol{q})\dot{q}_2^2]=0$，这里要求，对任意的$c\in R$，$a_1(0,0,c)$与$a_2(0,0,c)$有意义。

方程(2.2)给出

$$\left.\begin{aligned}\ddot{q}_1&=-q_1-\mu_1\dot{q}_1-a_1\dot{q}_1\lambda\\ \ddot{q}_2&=-q_2-\mu_2\dot{q}_2-a_2\dot{q}_2\lambda\\ \ddot{q}_3&=-\mu_3\dot{q}_3+\lambda\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

由约束方程和方程(3.7)求得

$$\lambda=\frac{\frac{1}{2}(\dot{a}_1\dot{q}_1^2+\dot{a}_2\dot{q}_2^2)+\mu_3\dot{q}_3-a_1q_1\dot{q}_1-a_2q_2\dot{q}_2-\mu_1a_1\dot{q}_1^2-\mu_2a_2\dot{q}_2^2}{1+a_1^2\dot{q}_1^2+a_2^2\dot{q}_2^2}$$

由平衡方程(2.7)求得系统的平衡状态流形

$$\mathscr{E}_1=\{(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\mid q_1=q_2=0,\ q_3\in R,\ \dot{\boldsymbol{q}}=0\}$$

利用λ的表达式和方程(3.7)可得，在约束流形上

$$\sum_{s=1}^{3}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s=-\mu_1\dot{q}_1^2-\mu_2\dot{q}_2^2-\mu_3\dot{q}_2^2$$

$$-\frac{(a_1\dot{q}_1^2+a_2\dot{q}_2^2)[(\mu_3-2\mu_1)a_1\dot{q}_1^2+(\mu_3-2\mu_2)a_2\dot{q}_2^2+\dot{a}_1\dot{q}_1^2+\dot{a}_2\dot{q}_2^2-2a_1q_1\dot{q}_1-2a_2q_2\dot{q}_2]}{4(1+a_1^2\dot{q}_1^2+a_2^2\dot{q}_2^2)}$$

可以看出，当$\mu_1>0$，$\mu_2>0$，$\mu_3\geqslant 0$时，在$\dot{\boldsymbol{q}}=0$的充分小邻域内$\sum\limits_{s=1}^{3}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s$常负。所以，利用定理3.1可知，$\mathscr{E}_1$上的每一点相对部分变量$q_1$，$q_2$，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$都是稳定的。

例3.2 设力学系统的动能为$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$，力函数为$U=-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$，耗散函数为$F=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)$，非完整约束方程为$\dot{q}_3-q_1\dot{q}_1-q_2\dot{q}_2=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$。

方程(2.2)给出

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{q}_1=-q_1-\dot{q}_1-q_1\lambda\\&\ddot{q}_2=-q_2-\dot{q}_2-q_2\lambda\\&\ddot{q}_3=\lambda\end{aligned}\right\}\tag{3.8}$$

由约束方程和方程(3.8)求得λ

$$\lambda=\frac{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-q_1^2-q_2^2}{1+q_1^2+q_2^2}$$

由平衡方程(2.7)求得系统的平衡状态流形

$$\mathscr{E}_2=\{(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})\,|\,q_1=q_2=0,\ q_3\in R,\ \dot{\boldsymbol{q}}=0\}$$

利用λ的表达式和方程(3.8)可得，在约束流形上

$$\sum_{s=1}^{3}(Q_s+\Lambda_s)\ \dot{q}_s=-\frac{(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)(2+q_1^2+q_2^2)+(q_1^2+q_2^2)^2}{2(1+q_1^2+q_2^2)}$$

显然，在约束流形上$\sum\limits_{s=1}^{3}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s$相对$q_1,q_2,\dot{q}_1,\dot{q}_2$负定。所以，由定理3.1知，$\mathscr{E}_2$上的每一点相对部分变量$q_1$，$q_2$，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$都是渐近稳定的。

假设非完整约束(2.1)能表示为

$$f_\beta\equiv\dot{q}_{\varepsilon+\beta}-\varphi_\beta(\boldsymbol{q},\ \dot{q}')=0\qquad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{3.9}$$

这时，有如下渐近稳定性定理

定理3.2 如果非完整系统(3.9) (2.2)在其束流形$D_2=\{\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}})\,|\,\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(\boldsymbol{q},\ \dot{\boldsymbol{q}}')$，$\beta=1,\ \cdots,g\}$上满足

i） 在平衡位置上 $\mathrm{grad}U=0$；

ii） 在平衡位置的某邻域内U和$\sum\limits_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum\limits_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_\delta}\right)q_\delta$相对$\boldsymbol{q}'$负定，且这是由其二次项确定的；

iii) $\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s$相对$\dot{q}$负定，且这是由其二次项确定的；

iv) $\left.\dfrac{\partial^2\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\gamma\partial\dot{q}_\sigma}\right|_{\substack{q'=0\\ \dot{q}=0}}=0$ 或$\left.\dfrac{\partial U}{\partial q_s}\right|_{\dot{q}'=0}=0$，$\left.Q_s\right|_{\dot{q}=0}=0$

$(s=1,\cdots,n;\ \gamma,\ \sigma=1,\cdots,\varepsilon)$.

那么，此系统的平衡位置相对部分变量q'，$\dot{q}'$渐近稳定.

证明 取V函数为

$$V=T-U+\beta\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)q_\sigma$$

在定理的条件iv)下，它沿方程(2.6)的导数为

$$\dot{V}=\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s+\beta\Big[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)\dot{q}_\sigma$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)q_\sigma+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)q_\sigma+\cdots\Big]$$

其中未写之项为$\dot{q}$，q'的次数不小于3的项.

由定理的条件ii) iii)知，在约束流形上，$\sum_{s=1}^{n}(Q_s+\Lambda_s)\dot{q}_s+\beta\Big[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\sigma}$ $+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\Big)\dot{q}_\sigma\Big]$相对$\dot{q}$负定，$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_\sigma}\right)q_\sigma$相对$q'$负定，且这些是由其二次项确定的. 从而，可以推得，在约束流形D_2上$\dot{V}$相对q'，$\dot{q}$负定.

由定理的条件i) ii)可知，在D_2上V相对q'，$\dot{q}$正定.

所以，系统的平衡位置$q=0$，$\dot{q}=0$相对q'，$\dot{q}$ 是渐近稳定的. 显然，它相对q'，$\dot{q}'$ 也是渐近稳定的.

对于仅受线性齐次非完整约束

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}b_{\varepsilon+\beta,\sigma}(q)\dot{q}_\sigma\qquad(\beta=1,2,\cdots,g)\tag{3.10}$$

且受完全耗散力作用的力学系统，定理3.2中的条件 iii) iv)自然成立. 这时，可以得到

推论3.3 如果在平衡位置上 grad $U=0$，且在平衡位置的某邻域内U和$\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big(\frac{\partial U}{\partial q_\sigma}+$ $\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial U}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}b_{\varepsilon+\beta,\sigma}\Big)q_\sigma$相对$q'$负定，而这是由其二次项确定的，那么，在完全耗散力作用下，线性齐次定常的非完整系统的平衡位置相对q'，$\dot{q}'$渐近稳定.

例3.3 例3.1中所讨论的系统满足定理3.2的条件i) ii) iv). 若还要求$\mu_3>0$，则条件iii)也成立. 所以，这个系统的平衡位置相对部分变量q_1，q_2，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$是渐近稳定的.

四、相对全部变量稳定性与相对部分变量稳定性的关系

假设$\boldsymbol{q}=\bar{\boldsymbol{q}}$，$\dot{\boldsymbol{q}}=0$为系统的平衡位置．定义区域

$$Q=\{(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}')\mid\|(\boldsymbol{q}'-\bar{\boldsymbol{q}}',\ \dot{\boldsymbol{q}}')\|<H,\ 0\leqslant\|\boldsymbol{q}''-\bar{\boldsymbol{q}}''\|<+\infty\}$$

这里，$H>0$，$\boldsymbol{q}''=(q_{s+1},\cdots,q_n)^T$，$\bar{\boldsymbol{q}}'=(\bar{q}_1,\cdots,\bar{q}_s)^T$，$\bar{\boldsymbol{q}}''=(\bar{q}_{s+1},\cdots,\bar{q}_n)^T$．

假设非完整系统所受约束(2.1)能表示为

$$\dot{\boldsymbol{q}}''=\sum_{\nu=1}^{s}\varphi^{\nu}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}')\dot{q}_{\nu} \tag{4.1}$$

的形式，且φ^{ν}在区域Q内有界，即存在$A>0$，使得φ^{ν}在Q内满足$\|\varphi^{\nu}\|<A$．

对于以上系统，有结论

定理4.1 对于受有非完整约束(4.1)的定常力学系统，其平衡位置相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$稳定的充要条件是此平衡位置相对全部变量$\boldsymbol{q}$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$稳定．

证明 充分性显然成立，只需证明必要性．

将$q_s=\bar{q}_s+\xi_s$代入方程(4.1)中，得

$$\dot{\xi}''=\sum_{\nu=1}^{s}\varphi^{\nu}(\bar{q}+\xi,\ \dot{\xi}')\dot{\xi}_{\nu}=\sum_{\nu=1}^{s}\tilde{\varphi}^{\nu}(\xi,\ \dot{\xi}')\dot{\xi}_{\nu} \tag{4.2}$$

这里$\boldsymbol{\xi}'=(\xi_1,\cdots,\xi_s)^T$，$\boldsymbol{\xi}''=(\xi_{s+1},\cdots,\xi_n)^T$，$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\xi}'^T\boldsymbol{\xi}''^T)^T$．

显然，$\tilde{\varphi}^{\nu}$在区域$\tilde{Q}=\{(\xi,\ \dot{\xi}')\mid\|(\xi',\ \dot{\xi}')\|<H,\ 0\leqslant\|\xi''\|<+\infty\}$内有界．

系统的平衡位置关于$\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}'$是稳定的，故有：对于任意的$\varepsilon_0>0$，存在小于$\varepsilon_0$的$\delta_0=\delta_0(\varepsilon_0,t_0)$，使得当$\|\boldsymbol{\xi}_0\|<\delta_0$时，有$\|\boldsymbol{\xi}'\|<\varepsilon_0$．取$\delta_1=\delta_1(\varepsilon_0,\ t_0)=\delta_0\left(\dfrac{\varepsilon_0}{1+2A\varepsilon},\ t_0\right)$，那么，当$\|\boldsymbol{\xi}_0\|<\delta_1$时，有

$$\|\boldsymbol{\xi}'\|<\frac{\varepsilon_0}{1+2A\varepsilon}$$

并且

$$\|\boldsymbol{\xi}_0'\|\leqslant\|\boldsymbol{\xi}_0\|<\frac{\varepsilon_0}{1+2A\varepsilon},\quad\|\boldsymbol{\xi}_0''\|\leqslant\|\boldsymbol{\xi}_0\|<\frac{\varepsilon_0}{1+2A\varepsilon}$$

所以，我们得到

$$\|\boldsymbol{\xi}'-\boldsymbol{\xi}_0'\|\leqslant\|\boldsymbol{\xi}'\|+\|\boldsymbol{\xi}_0'\|<\frac{2\varepsilon_0}{1+2A\varepsilon}$$

由式(4.2)得

$$\|\boldsymbol{\xi}''-\boldsymbol{\xi}_0''\|=\left\|\sum_{\nu=1}^{s}\int_{t_0}^{t}\tilde{\varphi}^{\nu}\dot{\xi}_{\nu}dt\right\|\leqslant A\sum_{\nu=1}^{s}\|\xi_{\nu}-\xi_{\nu 0}\|\leqslant A\varepsilon\|\boldsymbol{\xi}'-\boldsymbol{\xi}_0'\|$$

所以

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{\xi}''\|&\leqslant\|\boldsymbol{\xi}''-\boldsymbol{\xi}_0''\|+\|\boldsymbol{\xi}_0''\|\leqslant A\varepsilon\|\boldsymbol{\xi}'-\boldsymbol{\xi}_0'\|+\|\boldsymbol{\xi}_0''\|\\&<\frac{2A\varepsilon\varepsilon_0}{1+2A\varepsilon}+\frac{\varepsilon_0}{1+2A\varepsilon}=\varepsilon_0\end{aligned}$$

这样，得到结论：对于任意的$\varepsilon_0>0$，存在$\delta=\min\{\delta_0,\ \delta_1\}$，使得当$\|\boldsymbol{\xi}_0\|<\delta$时，一定有

$$\|\boldsymbol{\xi}\|\leqslant\|\boldsymbol{\xi}'\|+\|\boldsymbol{\xi}''\|<\varepsilon_0+\varepsilon_0=2\varepsilon_0$$

这说明系统的平衡位置相对全部变量$\boldsymbol{q}$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$是稳定的。

文献[8]讨论了如下非完整系统：其约束方程(2.1)能表示为以下的形式

$$\dot{q}_{s+\beta}=\sum_{\nu=1}^{s}f_{\beta}^{\nu}(\boldsymbol{q}',\ \dot{q}')\dot{q}_{\nu} \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{4.3}$$

这里f_{β}^{ν}在点$\boldsymbol{q}'=\dot{\boldsymbol{q}}'$，$\dot{q}'=0$的某邻域内连续。显然，这是定理4.1中系统的一个特殊情况。

推论4.1[8] 受有非完整约束(4.3)的定常力学系统的平衡位置相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$稳定的充要条件是此平衡位置相对全部变量$\boldsymbol{q}$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$稳定。

假设系统仅受有线性非完整约束

$$\dot{q}_{s+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{s}b_{s+\beta,\sigma}(\boldsymbol{q})\dot{q}_{\sigma} \qquad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{4.4}$$

这里要求$b_{s+\beta,\sigma}$在区域$Q_1=\{\boldsymbol{q}\,|\,\|\boldsymbol{q}'-\bar{\boldsymbol{q}}'\|<H,0\leqslant\boldsymbol{q}''-\bar{\boldsymbol{q}}''\|<+\infty\}$内有界。由定理4.1，有

推论4.2 受有线性非完整约束(4.4)的定常力学系统的平衡位置相对部分变量$\boldsymbol{q}'$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$稳定的充要条件是此平衡位置相对全部变量$\boldsymbol{q}$，$\dot{\boldsymbol{q}}'$稳定。

例4.1 设力学系统的动能为$T=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)$，力函数为$U=-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)$，耗散函数为$F=\frac{1}{2}(\mu_1\dot{q}_1^2+\mu_2\dot{q}_2^2+\mu_3\dot{q}_3^2)$，系统所受非完整约束为$\dot{q}_3=\sin q_3\dot{q}_1^2+q_1\dot{q}_2^2$。

此系统为例3.1中系统的一个特例。从而得知，系统的平衡位置$q_1=0$，$q_2=0$，$q_3=c$相对部分变量q_1，q_2，$\dot{q}_1$，$\dot{q}_2$稳定。由定理4.1得，此平衡位置相对全部变量也是稳定的。

参 考 文 献

[1] Whittaker, E.T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Cambridge Univ. Press, Eng. (1904).

[2] Румянцев В. В., Об устойчивости движения неголономых систем, *ПММ*, 31(2) (1967), 260—271.

[3] Mikhailov, G. K. and V. Z. Parton, *Applied Mechanics*: Soviet Reviews, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1(1990), 61—91.

[4] Румянцев В. В., Об асимптотической устойчивости и неутойчивости движения по отношению к части переменных, *ПММ*, 35(1971), 138—143.

[5] 梅凤翔，关于非线性非完整系统平衡状态的稳定性，科学通报，37(1)(1992)，82—85.

[6] 梅凤翔，非完整系统的平衡位置及其稳定性，《稳定振动分叉与混沌研究》，中国科学技术出版社，北京(1992)，25—33.

[7] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社，北京(1985).

[8] 朱海平、梅凤翔，一类非完整系统关于部分变元稳定性与关于全部变元稳定性的关系，科学通报 39(2)(1994)，129—132.

[9] 王照林，《运动稳定性及其应用》，高等教育出版社，北京(1992)，143—167.

On the Stability of Nonholonomic Mechanical Systems with Respect to Partial Variables

Zhu Hai-ping   Mei Feng-xiang
(Beijing University of Science and Technology, Beijing 100081)

Abstract

In this paper, a method to study the stability of nonholonimic systems with with respect to partial variables is given and several stability theorems of nonholonmic systems with respect to partial variables are obtained. Moreover, a relationship between the stability of a nonholonomic system with respect to all variables and that of partial variables is obtained.

Key words nonholonomic system, stability with respect to partial variable, constraint manifold